



HAL
open science

Weak formulation, strong formulation and numerical methods of electromagnetic field computation in sight of modeling a novel cardiac prosthesis for medical circulatory support

Nicolas Martinez

► **To cite this version:**

Nicolas Martinez. Weak formulation, strong formulation and numerical methods of electromagnetic field computation in sight of modeling a novel cardiac prosthesis for medical circulatory support. Electric power. Institut National Polytechnique (Toulouse), 2008. English. NNT : 2008INPT038H . tel-04506501

HAL Id: tel-04506501

<https://ut3-toulouseinp.hal.science/tel-04506501>

Submitted on 15 Mar 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *L'Institut National Polytechnique de Toulouse*

Discipline ou spécialité : *Génie Electrique*

Présentée et soutenue par *Nicolas MARTINEZ*

Le 6 Novembre 2008

Titre : *Formulation faible, formulation forte et méthodes de calcul numérique du champ magnétique en vue de la modélisation d'une prothèse innovante pour l'assistance circulatoire*

JURY

Pr. CAPOLINO Gérard-André (Rapporteur et Président du jury)

Dr. VINSARD Gérard (Raapporteur)

Pr. LEPRINCE Pascal

Pr. NOGAREDE Bertrand

Dr. LEFEVRE Yvan

Ecole doctorale : *GEET*

Unité de recherche : *Laboratoire LAPLACE*

Directeur(s) de Thèse : *Dr. LEFEVRE Yvan*

Résumé

L'objectif de ce travail est d'améliorer les méthodes numériques de calcul de champ magnétique en vue de l'estimation de la répartition des forces magnétiques dans les actionneurs, notamment ceux conçus sur de nouveaux concepts à base de matériaux magnétoactifs. Cette étude se place dans le cadre d'une collaboration entre le groupe de recherche en Electrodynamique du laboratoire LAPLACE et le service de chirurgie Cardiovasculaire et Thoracique de l'AP-HP Pitié-Salpêtrière de Paris.

En effet, au cours de ces dernières décennies de nombreux progrès ont été réalisés dans le domaine de l'assistance circulatoire. Toutefois, l'implantation permanente de ces nouveaux systèmes se heurte encore à de nombreuses barrières : encombrement, difficulté et lourdeur de l'implantation, fiabilité, systèmes non physiologiques n'assurant que des débits continus, efficacité insuffisante. Ainsi, de nouveaux concepts de pompes sont aujourd'hui à l'étude, en vue d'assurer un débit pulsé physiologique à l'aide d'un système totalement implantable. L'approche privilégiée dans notre étude est basée sur le "morphing" électroactif d'un corps déformable rempli de fluide magnétorhéologique, dont le déplacement et la conformation spatiale sont contrôlés, par l'intermédiaire du champ magnétique, par des bobines externes. Des simulations par éléments finis ont été réalisées pour montrer la faisabilité des principaux concepts et ont permis le dimensionnement d'un premier démonstrateur.

Lors de ces simulations numériques réalisées avec ANSYS Multiphysics, nous avons eu besoin de connaître très précisément la répartition du champ magnétique sur le corps déformable pour calculer la distribution des forces s'y exerçant et ainsi, déterminer sa déformation. Une analyse approfondie des résultats de calcul a mis en évidence une discontinuité importante de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique au niveau de l'interface de deux matériaux de perméabilité différente.

Bien que constituant une limite bien connue de la formulation faible utilisée couramment pour le calcul par éléments finis du champ magnétique, la discontinuité de cette composante n'a pas été étudiée de manière systématique jusqu'à présent. Or, dans la plupart des méthodes de calcul de force magnétique, l'expression de la densité de force s'exerçant à la surface du corps polarisé fait intervenir cette composante et la discontinuité constatée peut entraîner des erreurs importantes.

Pour comprendre ce problème, nous avons développé un code de calcul par éléments finis permettant la détermination du champ, soit en termes de potentiel scalaire, soit en termes de potentiel vecteur. Grâce à ce code, une étude a pu être menée de façon systématique pour analyser et quantifier cette discontinuité ainsi que son influence sur le calcul des densités de force magnétique selon le maillage et le potentiel utilisés.

Cette discontinuité étant directement liée à l'utilisation de la formulation faible, la solution proposée pour palier ce problème est l'élaboration et la mise en oeuvre d'un code de calcul utilisant une formulation forte. A l'instar du code précédemment développé en éléments finis, cet outil permet de calculer le champ magnétique en potentiel scalaire ou en potentiel vecteur. Une étude comparative des deux formulations, faible et forte, a pu être menée, montrant la supériorité de la formulation forte en ce qui concerne le respect des conditions de passage aux interfaces de deux milieux magnétiques de perméabilité très différente, et ce, sans dégrader la solution dans le reste du domaine d'étude.

Dans une dernière partie, les résultats de ce code ont été confrontés à l'expérience. Cette dernière étape conforte les conclusions précédentes quant à l'amélioration des procédures de calcul numérique du champ. La mise en oeuvre des solutions préconisées constitue un outil précieux pour engager les études d'optimisation du nouveau concept d'assistance circulatoire présenté au début de la thèse.

Mots clés : Formulation faible, Formulation forte, Méthode des éléments finis, Méthode des différences finies, Fluide magnétorhéologique, Assistance circulatoire.

Abstract

This thesis focuses on the improvement of numerical methods to compute the magnetic field in order to estimate the distribution of magnetic forces in actuators, including those designed on innovative concepts based on the use of magnetoactive materials. Thus, in the field of mechanical circulatory support, new implantable cardiac prosthesis are under consideration to ensure a pulsating flow. Here, the approach is based on the electroactive "morphing" of a deformable body, so the displacement and the deformation can be modified at distance. The repartition of magnetic field around the deformable body must be precisely known to compute the repartition of forces and to determine its deformation. An analysis of the results obtained from finite element method, highlighted a discontinuity of the tangential component of magnetic field excitation at the interface of two materials of different magnetic permeability. To understand this problem due to the use of a weak formulation, a precise study was led in order to analyze this discontinuity and its influence on the calculation of the magnetic force density. To overcome this problem, the proposed solution is to develop a code using a strong formulation. A comparative study between the two formulations and experimental value has been completed to show the superiority of the strong formulation. The solution is a valuable tool to initiate the optimization studies of the new concept of prosthesis presented at the beginning of the thesis.

Keywords : Weak formulation, strong formulation, Finite Element method, Finite Difference method, Continuity conditions, Mechanical circulatory support, Cardiac Prosthesis, Magnetorheological Fluid.

A ma femme Amélie,
à mes enfants, David, Abigaëlle et Alissa,
à mes parents,

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du groupe de recherche en Electrodynamique - GREM3 du LAboratoire PLAsma et Conversion de l'Energie (LAPLACE) à l'ENSEEIH de Toulouse. Il a été réalisé en collaboration avec le service de Chirurgie Cardiovasculaire et Thoracique du centre Hospitalier Pitié-Salpêtrière APHP, Paris.

Je tiens tout d'abord à remercier le Pr. Bertrand Nogarède, Professeur des universités à l'INPT (Institut National Polytechnique de Toulouse) pour la confiance qu'il m'a accordée en me proposant de réaliser cette thèse au sein de son groupe de recherche en Electrodynamique. De plus, son enthousiasme, son humanité et son dynamisme m'ont donné les motivations nécessaires pour réaliser ces travaux.

Je tiens également à remercier M. Yvan Lefèvre, Chargé de Recherche au CNRS, mon directeur de thèse qui m'a accompagné tout au long de ces 3 ans, et qui a toujours été présent pour m'aider, me supporter et surtout m'ouvrir les portes du merveilleux domaine de la modélisation numérique. Merci.

Je souhaite aussi remercier les membres du jury :

- M. Capolino, Professeur à l'université de Picardie - Jule Verne, pour avoir accepté le rôle de rapporteur et contribué à améliorer la qualité de ce mémoire.
- M. Vinsard, Maitre de conférence à l'Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, pour avoir également accepté la charge de rapporteur et pour l'enthousiasme qu'il a manifesté durant nos divers échanges oraux ;
- Pr. Pascal Leprince, Professeur en Médecine et Chirurgien Cardiaque à l'Hôpital Pitié Salpêtrière, qui a permis par ses remarques lumineuses de faire avancer le projet. Nos rencontres régulières m'ont permis de mieux connaître l'univers de la Chirurgie Cardiaque et d'aborder le monde de l'Electromagnetisme sous un angle différent. C'est avec un grand plaisir que j'ai partagé avec lui ces 3 années de travail et je le remercie pour sa bonne humeur et sa disponibilité.

Je tiens également à remercier toutes les personnes du groupe de recherche GREM3 qui ont toujours su être disponibles pour répondre à mes questions et me faire part de leurs très bons conseils, Mme Carole Henaux, M. Dominique Harribey, M. Jean-François Rouchon, M. Eric Duhayon, M. Frédéric Messine et M. Francois Pigache.

Je remercie aussi toutes les personnes en charge des aspects administratifs du laboratoire, Mesdames Mebrek, Schwarz, Daguillanes, Dedet, Bodden, Moll-Mazella sans qui les démarches administratives relatives à la thèse n'auraient pu être aussi bien finalisées.

Bien sûr, je n'allais pas oublier mes chers collègues thésards sans qui le quotidien n'aurait pas été aussi extraordinaire. C'est pour cela que je remercie chaleureusement les anciens, tout d'abord : Lauric, Paul-Etienne, Jérôme D., Alexis, Martin, Gianluca, Julien F., Matthieu L. Merci également à Samer, Youssef, Rafael, Marcos, Marcus, Christophe, Abdenour, Bayram, Valentin, Wojciech, Piotr, Jerome M., Jerome F., Frederic A., Cédric, Bernardo, Meriem, Hoan, Aziz, Djibrilah, LAL, Delphine, Céline, Francois B., Vincent B, Francois D., Buphen, Baptiste, Laurianne, Marwan, Vincent P., Dédé, ... pour les bons moments passés ensemble.

Je ne saurais remercier suffisamment mes anciens collègues de bureaux Adao Delehelle, Mathieu Couderc, Christophe Viguier, ainsi que les nouveaux Clément Nadal et Raphaël Vilamot avec qui j'ai partagé des instants inoubliables, qui m'ont aidé à franchir un certain nombre d'obstacles et qui ont surtout supporté ma « culture » musicale.

Pour terminer, je remercie plus particulièrement ma famille et surtout ma femme Amélie, qui m'a toujours aidé et soutenu dans les moments les plus difficiles. Sans elle, ce manuscrit n'aurait certainement jamais abouti. Je remercie également mes parents qui m'ont toujours laissé la liberté dans le choix de mon cursus scolaire et qui de plus, m'ont toujours donné les moyens matériels et le soutien moral nécessaire. J'espère que toute ma famille trouvera dans ces travaux et ce manuscrit toute la reconnaissance et l'amour que je leur porte.

Table des matières

Introduction générale	1
I Concept innovant de prothèse cardiaque pour l'assistance circulatoire	3
1 Etat de l'art des technologies utilisées pour l'assistance circulatoire et enjeu des matériaux électroactifs	5
1.1 Introduction	7
1.2 Rappels sur le fonctionnement du coeur humain	7
1.2.1 La circulation sanguine	9
1.2.2 La révolution cardiaque	9
1.3 Etat de l'art des systèmes utilisés par l'assistance circulatoire	11
1.3.1 Les principaux coeurs artificiels totaux	12
1.3.1.1 Le coeur artificiel total pneumatique : Système "Cardiowest"	12
1.3.1.2 Le coeur artificiel total électrique : Système "Abiocor"	15
1.3.2 Les assistances circulatoires	17
1.3.2.1 Les pompes volumétriques	17
1.3.2.1.1 Les assistances circulatoires pneumatiques : Système "Thoratec"	18
1.3.2.1.2 Les assistances circulatoires électriques : Système "Novacor"	19
1.3.2.2 Les pompes rotatives	21
1.3.2.2.1 Les pompes centrifuges	22
1.3.2.2.2 Les pompes axiales	22
1.4 Les matériaux électroactifs et leurs applications dans le domaine médical	24
1.4.1 Les céramiques piézoélectriques	24
1.4.1.1 Le phénomène piézoélectrique	24
1.4.1.2 Equations fondamentales	25
1.4.1.3 Propriétés électriques et mécaniques	26

1.4.1.4	Quelques exemples dans le domaine médical	27
1.4.2	Les polymères piézoélectriques	30
1.4.2.1	Définition et propriétés d'usage	30
1.4.2.2	Quelques exemples d'application dans le domaine médical	31
1.4.3	Les alliages à mémoire de forme	32
1.4.3.1	Propriétés des alliages à mémoire de forme	33
1.4.3.2	Quelques exemples dans le domaine médical	35
1.4.4	Les fluides magnétorhéologiques	37
1.4.4.1	Propriétés des fluides magnétorhéologiques	37
1.4.4.2	Quelques exemples dans le domaine médical	38
1.4.5	Les ferrofluides	39
1.4.5.1	Principe	39
1.4.5.2	Applications dans le domaine médical	40
1.4.6	Les fluides électrorhéologiques	41
1.5	Comparaison des différentes technologies en présence	42
1.6	Conclusion	44

2 Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques 47

2.1	Introduction	49
2.2	Présentation du système proposé	49
2.2.1	Le concept PULSAMAG	49
2.2.2	Pré-dimensionnement de l'actionneur	52
2.3	Considérations sur les efforts développés au sein de la pompe	53
2.3.1	Rappel sur le Tenseur de Maxwell	53
2.3.1.1	Lignes de champ normales à l'élément de surface	54
2.3.1.2	Lignes de champ tangentielles à l'élément de surface	55
2.3.1.3	Lignes de champ obliques de 45° à l'élément de surface	56
2.3.2	Résultats de simulation	57
2.3.2.1	Caractéristiques des fluides magnétorhéologiques	57
2.3.2.2	Déplacement de la capsule	62
2.3.2.2.1	Capsule "occlusive"	62
2.3.2.2.2	Capsule "ouverte"	64
2.3.2.3	Déformation de la capsule	66
2.3.2.3.1	Allongement de la capsule	66
2.3.2.3.2	Retour à sa forme initiale	70
2.4	Etude d'un premier démonstrateur	73
2.4.1	Description du démonstrateur	74
2.4.2	Simulation	75
2.4.3	Réalisation du démonstrateur et résultats obtenus	76
2.4.3.1	Résultats sans valve anti-retour	77

2.4.3.2	Résultats avec valve anti-retour	79
2.5	Conclusion	80

II Formulation faible, formulation forte et méthodes de calcul numérique du champ magnétique 83

3	Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques	85
3.1	Introduction	87
3.2	Forme faible des équations du champ	88
3.2.1	Problème physique considéré	88
3.2.2	Formulation en potentiel vecteur	89
3.2.3	Intégrations par parties	90
3.2.4	Principe de moindre action	92
3.2.5	La méthode des résidus pondérés	94
3.2.6	Bilan sur les différentes approches utilisées	97
3.3	Structure d'illustration	99
3.4	Méthodes de calcul de forces utilisées	100
3.5	Calcul avec les valeurs élémentales des composantes du champ	101
3.5.1	En utilisant la formulation potentiel vecteur	101
3.5.2	En utilisant la formulation potentiel scalaire	101
3.5.3	En utilisant la formulation imbriquée	103
3.5.4	Calcul des densités de force	105
3.6	Calcul avec les valeurs nodales des composantes du champ	107
3.6.1	En utilisant la formulation potentiel vecteur	107
3.6.2	En utilisant la formulation potentiel scalaire	108
3.6.3	En utilisant la formulation imbriquée	108
3.6.4	Calcul des densités de force	110
3.7	Etude en fonction du maillage	112
3.7.1	Calcul avec des éléments linéaires	113
3.7.2	Calcul avec des éléments quadratiques	116
3.8	Calcul de la force résultante	118
3.9	Conclusion	119
4	Forme forte des équations du champ et conditions de passage	123
4.1	Introduction	125
4.2	Présentation de la méthode des différences finies	125
4.3	Forme intégrale particulière	127
4.4	Structure étudiée	129
4.5	Forme forte des équations du champ	129
4.5.1	Equations à l'intérieur des milieux	130

4.5.2	Les équations aux interfaces	131
4.5.2.1	Interface Air-Fer	131
4.5.2.2	Interface Air-Aimant	133
4.5.3	Equations aux limites	134
4.6	Résultats avec la forme forte des équations du champ	135
4.6.1	Formulation en potentiel vecteur	135
4.6.2	Formulation en potentiel scalaire magnétique	137
4.6.3	Comparaisons des différentes approches	140
4.6.3.1	Pour la composante B_n	140
4.6.3.2	Pour la composante H_t	142
4.7	Comparaison avec une étude expérimentale	143
4.7.1	Dispositif mis en place	143
4.7.2	Forme forte et étude expérimentale	145
4.7.2.1	Avec l'aimant centré	145
4.7.2.2	Avec l'aimant décalé de 4 cm	147
4.7.2.3	Avec l'aimant décalé de 6 cm	148
4.7.3	Forme faible et étude expérimentale	150
4.7.3.1	Avec l'aimant centré	150
4.7.3.2	Avec l'aimant décalé de 4 cm	151
4.7.3.3	Avec l'aimant décalé de 6 cm	152
4.7.4	Au niveau des conditions de passage	154
4.8	Conclusion	155
	Conclusion générale	157
	Annexes	161
	A Caractéristiques des principales pompes rotatives	163
	B Présentation des outils numériques utilisés par la méthode des éléments finis	171
B.1	Les éléments de référence	171
B.2	Les fonctions d'interpolation	172
B.2.1	Interpolation sur l'élément de référence	173
B.2.2	Expression des dérivées premières	173
B.2.3	Expression des intégrales	173
B.3	Expression des fonctions \bar{N} et N	174
B.3.1	Les éléments triangulaires	174
B.3.2	Les éléments quadrangulaires	174
B.4	Points de Gauss	176

C	Forme forte des équations du champ avec le potentiel vecteur	179
C.1	Les équations aux interfaces	179
C.1.1	Interface Air-Fer	179
C.1.1.1	Interface Air-Aimant	182
C.2	Equations aux angles	184
C.2.1	Pour le fer	184
C.2.2	Pour l'aimant	185
C.3	Equations aux bordures	186
C.3.1	Equations aux limites	186
C.3.2	Conditions de symétrie	187
D	Forme forte des équations du champ avec le potentiel scalaire magnétique	189
D.1	Equations à l'intérieur des milieux	189
D.2	Les équations aux interfaces	190
D.2.1	Interface Air-Fer	190
D.2.2	Interface Air-Aimant	193
D.3	Equations aux angles	195
D.3.1	Pour le fer	195
D.3.2	Pour l'aimant	196
D.4	Equations aux bordures	197
D.4.1	Equations aux limites	197
D.4.2	Conditions de symétrie	198
E	Exemple de code utilisant une formulation forte	201
F	Résultats obtenus en différences finies	219
	Bibliographie	233

Table des figures

1.1	Emplacement du coeur dans la cage thoracique [Inr07]	8
1.2	Anatomie du coeur [Inf07]	8
1.3	Schéma de la circulation sanguine dans le corps humain [cir07]	9
1.4	Phase de systole ventriculaire	10
1.5	Phase de diastole	10
1.6	Schéma d'implantation d'une assistance circulatoire [Lep05].	11
1.7	Principe d'un coeur artificiel pneumatique [Lep05]	12
1.8	Les deux ventricules du coeur artificiel total Cardiowest [Tex07]	13
1.9	Schéma d'implantation du coeur artificiel total Cardiowest [Syn07]	14
1.10	Console du coeur artificiel total Cardiowest [Syn07]	14
1.11	Console portable du Cardiowest [Syn07]	14
1.12	Éléments du coeur artificiel total électrique Abiocr [Lep07]	15
1.13	Schéma d'implantation de l'Abiocr chez un homme [Med07]	15
1.14	Schéma de fonctionnement du coeur artificiel total électrique Abiocr [Abi07]	16
1.15	Vue externe de l'Abiocr [Abi07]	16
1.16	Vue de l'assistance ventriculaire gauche Thoratec [Tho07]	18
1.17	Schéma de principe de la pompe Novacor [Lep05]	20
1.18	Photo de l'assistance ventriculaire gauche du Novacor [Her03]	21
1.19	Schéma de principe d'une pompe centrifuge [Lep05]	22
1.20	Vue d'une pompe centrifuge [Lep05]	22
1.21	Schéma en coupe d'une pompe axiale [BJ97]	23
1.22	La pompe axiale Jarvik 2000 [Ass07]	23
1.23	Implantation du Jarvik 2000 [Ass07]	23
1.24	Modes de couplage électromécanique élémentaires dans les céramiques PZT [Vig05]	26
1.25	Détails de l'intégration mécanique de PIVERT [Vig07]	28
1.26	Actionneur configuration 1 [Vig07]	29
1.27	Actionneur configuration 2 [Vig07]	29
1.28	Actionneur configuration 3 [Vig07]	29
1.29	Temps de coagulation en fonction de l'indice du potentiel thrombodynamique avec et sans actionneur [Vig07]	29

1.30	Principe de fonctionnement d'une micro-pompe utilisant les polymères piézoélectriques [Xia06]	32
1.31	Evolution caractéristique de la déformation S en fonction de la température Θ d'un AMF précontraint.	34
1.32	Courbe contrainte T /déformation S caractéristique du comportement pseudoélastique (a) et superélastique (b) [Vig05].	34
1.33	Valve porcine avec une structure en alliage à mémoire de forme [Leo06]	36
1.34	Myocarde artificiel utilisant les alliages à mémoire de forme et les éléments Peltier, posé sur une maquette de coeur en plastique [Yam03a]	37
1.35	Schéma de principe d'un fluide magnétorhéologique sous l'action d'un champ magnétique	38
1.36	Amortisseur à base de fluide magnétorhéologique utilisé pour la prothèse entière de jambe [Car01].	39
1.37	Schéma de fonctionnement de la prothèse [Car01]	39
1.38	Photo de la prothèse lors d'une descente d'escalier [Car01]	39
1.39	Schéma du système d'étanchéité par ferrofluide [Sek01]	40
1.40	Schéma de principe d'un fluide électrorhéologique [Cho00]	41
2.1	Principe de fonctionnement de la pompe	50
2.2	Utilisation de la pompe d'assistance cardiaque par ballon intra-aortique [DeB97].	51
2.3	Schématisation des forces s'exerçant entre 2 corps magnétiques A et B à l'aide d'une surface entourant le corps A (d'éléments dS).	53
2.4	Evolution de la perméabilité magnétique relative du fluide magnétorhéologique en fonction de la proportion volumique de fer mesurée à l'hystérésigraphe.	59
2.5	Rhéogramme théorique d'un fluide magnétorhéologique	60
2.6	Rhéogramme expérimental d'un fluide magnétorhéologique réel	60
2.7	Structure de l'actionneur	62
2.8	Schéma de l'actionneur lors du déplacement de la capsule en configuration fermée	63
2.9	Allure du champ dans la capsule en configuration fermée.	63
2.10	Allure du champ magnétique dans la structure avec la capsule en configuration occlusive.	64
2.11	Configuration de l'actionneur lors du déplacement de la capsule	65
2.12	Allure du champ magnétique dans la capsule en configuration ouverte.	65
2.13	Allure du champ magnétique dans toute la structure avec la capsule en configuration ouverte.	66
2.14	Forces requises sur la capsule pour lui donner sa configuration ouverte	67
2.15	Allure du champ magnétique dans l'actionneur lors de la déformation de la capsule	68
2.16	Champ magnétique dans la capsule	68

2.17	Simulation de la déformation de la capsule	69
2.18	Déformation de la capsule en fonction du temps	70
2.19	Forces requises pour obtenir la configuration "occlusive" de la capsule	71
2.20	Disposition des bobines en forme de selle de cheval sur le tube	71
2.21	Allure du champ magnétique créé par les bobines en forme de selle de cheval	72
2.22	Répartition des forces sur la capsule avec les bobines en selle de cheval	72
2.23	Valve aortique de type St Jude de 22 mm de diamètre	74
2.24	Structure du démonstrateur	75
2.25	Force développée au cours de l'avancement de la valve	76
2.26	Allure du champ dans le démonstrateur lors du déplacement du cylindre	76
2.27	Dessin technique du démonstrateur	77
2.28	Présentation du démonstrateur	77
2.29	Caractéristiques débits/pressions en fonction de la fréquence	78
2.30	Valve de cochon implantée à l'entrée du conduit d'aspiration	79
2.31	Caractéristiques débits/pressions avec l'ajout de la valve antireflux	80
3.1	Domaine étudié ayant une forte variation de perméabilité magnétique au niveau de l'interface Γ_{12}	89
3.2	Structure servant d'illustration à l'étude proposée.	99
3.3	Répartition de la valeur élémentaire de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b), calculée avec la formulation en potentiel vecteur, et en utilisant 20 éléments sur l'interface.	102
3.4	Répartition de la valeur élémentaire de composante tangentielle H_t dans le fer uniquement le long de l'interface (a,b), calculée avec la formulation en potentiel vecteur, et en utilisant 20 éléments sur l'interface.	102
3.5	Répartition de la valeur élémentaire de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.	103
3.6	Répartition de la valeur élémentaire de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.	104
3.7	Répartition de la valeur élémentaire de la composante normale H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.	104
3.8	Répartition de la densité de force calculée avec la méthode du tenseur de Maxwell suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs élémentaires de H_t et B_n	106
3.9	Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs élémentaires de H_t et B_n	106

3.10	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.	107
3.11	Répartition de la valeur nodale de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.	108
3.12	Répartition de la valeur nodale de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec le potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.	109
3.13	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec le potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.	109
3.14	Répartition de la densité de force calculée avec la méthode du tenseur de Maxwell suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t	111
3.15	Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t	111
3.16	Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie calculée avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t en formulation imbriquée et en potentiel scalaire.	112
3.17	Maillage utilisant 10 éléments (a), 20 éléments (b), 90 éléments (c) le long de l'interface [ab]	113
3.18	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface	114
3.19	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air <u>tout le long</u> de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface	115
3.20	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air <u>au milieu</u> de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface	115
3.21	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques sur l'interface	116

3.22	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air <u>tout le long</u> de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques imposés sur l'interface	117
3.23	Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air <u>au milieu</u> de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques imposés sur l'interface	117
4.1	Maillage utilisé pour illustrer l'exemple de la forme intégrale des équations du champ.	128
4.2	Structure étudiée en différences finies	129
4.3	Grille utilisée pour les calculs en différences finies à l'intérieur d'un matériau de perméabilité magnétique constante	131
4.4	Grille utilisée pour les calculs en différences finies au niveau des interfaces	131
4.5	Grille utilisée pour les calculs en différences finies, au niveau de l'interface [fg] entre l'aimant et l'air.	133
4.6	Composante tangentielle du champ d'excitation magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel vecteur.	136
4.7	Composante normale du champ magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel vecteur	136
4.8	Allure de la composante du champ B_y dans la structure étudiée en potentiel vecteur	137
4.9	Répartition de la densité de force sur l'interface [ab] avec une forme forte des équations du champ et avec le potentiel vecteur.	137
4.10	Répartition de la densité de force sur l'interface [ab] avec une forme faible des équations du champ et avec le potentiel vecteur.	137
4.11	Composante normale du champ magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel scalaire magnétique.	138
4.12	Composante tangentielle du champ d'excitation magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel scalaire magnétique.	138
4.13	Allure de la composante du champ B_y dans la structure étudiée	139
4.14	Répartition de la densité de force au niveau de l'interface [ab] avec la forme forte et le potentiel scalaire magnétique.	140
4.15	Répartition de la densité de force au niveau de l'interface [ab] avec la forme faible et le potentiel scalaire magnétique	140
4.16	Comparaison entre les principales méthodes de calcul numérique, de la composante normale du champ d'induction magnétique au niveau de l'interface [ab].	141
4.17	Comparaison entre les principales méthodes de calcul numérique, de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique au niveau de l'interface [ab].	142

4.18	Schéma de la structure étudiée	143
4.19	Maillage utilisé pour les calculs	144
4.20	Ligne de déplacement du capteur	145
4.21	Comparaison entre les mesures et les valeurs calculées de la composante B_y dans l'entrefer avec l'aimant centré.	146
4.22	Comparaison entre les mesures et les valeurs calculées de la composante B_x dans l'entrefer avec l'aimant centré.	146
4.23	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.147	
4.24	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.147	
4.25	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.148	
4.26	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.149	
4.27	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant centré.	150
4.28	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées en éléments finis du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant centré.	151
4.29	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm. 151	
4.30	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm. 152	
4.31	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm. 153	
4.32	Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm. 153	
4.33	Comparaison de la composante H_t au niveau de l'interface fer/air avec la forme faible	154
4.34	Comparaison de la composante B_n au niveau de l'interface fer/air avec la forme faible	154
4.35	Comparaison de la composante H_t au niveau de l'interface fer/air avec la forme forte	155
4.36	Comparaison de la composante B_n au niveau de l'interface fer/air avec la forme forte	155
A.1	Inventaires des différentes pompes utilisées en assistance circulaire [Reu00]	164
A.2	Caractéristiques des pompes axiales [Reu00]	165
A.3	Caractéristiques des pompes axiales [Reu00]	166
A.4	Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]	167
A.5	Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]	168

A.6	Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]	169
A.7	Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]	170
B.1	Transformation géométrique en 2D d'un élément de référence triangulaire à un élément de forme quelconque	172
B.2	Eléments triangulaire linéaire et quadratique	174
B.3	Eléments quadrangulaire linéaire et quadratique	175
C.1	Grille utilisée sur l'interface [nb] Fer-Air	179
C.2	Grille utilisée sur l'interface [oc] Fer-Air	181
C.3	Grille utilisée sur l'interface [cb] Fer-Air	181
C.4	Grille utilisée au niveau de l'interface [fg] Air-Aimant.	182
C.5	Grille utilisée sur l'interface [lf] Air-Aimant	183
C.6	Grille utilisée au niveau de l'interface [mg] Air-Aimant	184
C.7	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur du fer	184
C.8	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur du fer	185
C.9	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur de l'aimant	185
C.10	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit de l'aimant	186
D.1	Grille utilisée pour les calculs en différences finies à l'intérieur d'un matériau de perméabilité magnétique constante	190
D.2	Grille utilisée sur l'interface [nb]	191
D.3	Grille utilisée sur l'interface [oc] fer-air	192
D.4	Grille utilisée sur l'interface [cb] Fer-Air	192
D.5	Grille utilisée sur l'interface [mg] Air-Aimant	193
D.6	Grille utilisée sur l'interface [lf] Air-Aimant	194
D.7	Grille utilisée au niveau de l'interface [fg] Air-Aimant	195
D.8	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur droit du fer	195
D.9	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit du fer	196
D.10	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur de l'aimant	196
D.11	Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit de l'aimant	197
F.1	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant centré et avec le potentiel scalaire	220

F.2	Module du champ d'induction magnétique l'aimant centré et avec le potentiel vecteur	220
F.3	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant centré et en éléments finis	221
F.4	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et avec le potentiel vecteur en différences finies	221
F.5	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et avec le potentiel scalaire en différences finies	222
F.6	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et ANSYS	222
F.7	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et avec le potentiel vecteur en différences finies	223
F.8	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et avec le potentiel scalaire en différences finies	223
F.9	Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et ANSYS	224

Liste des tableaux

1.1	Comparaison des matériaux électroactifs : polymères et céramiques piézoélectriques	31
1.2	Propriétés des principaux alliages à mémoire de forme [Vig05]	35
1.3	Comparaison des principaux types de matériaux actifs [Vig05]	43
2.1	Comparaison des perméabilités magnétiques relatives calculées par la loi de Maxwell-Garnett et mesurées à l’hystérésigraphe	58
2.2	Evolution de la densité du fluide magnétorhéologique en fonction du pourcentage volumique de fer.	61
2.3	Résultats des forces calculées sur la capsule par la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode des Travaux Virtuels.	67
2.4	Récapitulatif des forces exercées sur la capsule avec la méthode du tenseur de Maxwell.	73
2.5	Récapitulatif des forces exercées sur la capsule avec la méthode des travaux virtuels.	73
3.1	Problème continu : Forme forte et formes faibles équivalentes	98
3.2	Problème discret	98
3.3	Formes faibles : les égalités garanties faiblement et fortement	99
3.4	Evolution du rapport entre le Ht_{air} et le Ht_{fer} en fonction du nombre d’éléments linéaires le long de l’interface [ab].	114
3.5	Evolution du rapport entre le Ht_{air} et le Ht_{fer} en fonction du nombre d’éléments quadratiques le long de l’interface [ab].	118
3.6	Résultats du calcul de la force résultante sur la pièce ferromagnétique.	119
3.7	Résultats complémentaires sur le calcul de la force résultante.	119
4.1	Calcul de la force globale sur la pièce ferromagnétique en utilisant une forme forte et le potentiel vecteur.	135
4.2	Calcul de la force globale sur la pièce ferromagnétique en utilisant la forme forte et le potentiel scalaire magnétique.	140
4.3	Comparaison des valeurs maximales de B_n le long de l’interface [ab]	141
4.4	Dimensions et propriétés magnétiques de l’exemple étudié	144
B.1	Fonctions pour l’élément triangulaire linéaire	174

B.2	Fonctions pour l'élément triangulaire quadratique	175
B.3	Fonctions pour l'élément quadrangulaire linéaire	175
B.4	Fonctions pour l'élément quadrangulaire quadratique	176
B.5	Points de Gauss pour un élément triangulaire	177
B.6	Points de Gauss pour un élément quadrangulaire	177

Introduction générale

L'émergence de nouveaux matériaux dits "électroactifs", qui offrent l'avantage d'une conversion directe de l'énergie au sein même de la matière, dévoile peu à peu leur capacité d'innovation technologique dans de nombreux domaines. En outre, ces matériaux ont permis d'envisager de nouvelles fonctionnalités, non réalisables actuellement avec des actionneurs "classiques", dans des secteurs très variés tels que l'aéronautique (aile déformable), l'automobile (lubrification électroactive), la robotique. Le secteur médical est quant à lui de plus en plus intéressé par ces matériaux car ils présentent une grande capacité d'intégration fonctionnelle et structurelle, permettant ainsi la réalisation de dispositifs performants, discrets et surtout de moins en moins invasifs. Plus précisément, le domaine de la chirurgie Cardiovasculaire et Thoracique, où le nombre de patients en attente de transplantation est en augmentation constante, est en demande de prothèses artificielles innovantes et de grande fiabilité. En effet, au cours de ces dernières décennies, de nombreux progrès ont été réalisés dans le domaine de l'assistance circulatoire. Toutefois, l'implantation de ces nouveaux systèmes rencontre encore de nombreuses difficultés.

Le travail présenté dans ce mémoire est orienté vers la conception d'un nouveau dispositif d'assistance circulatoire, basée sur le "morphing" électroactif d'un corps magnétique déformable ainsi que sur les problèmes méthodologiques de modélisation numérique associés. Aussi, ce présent document est divisé en deux parties distinctes.

Dans un premier temps, les principes et les technologies d'actionneurs susceptibles de répondre à ce type d'application sont recensés et permettent ainsi l'élaboration d'un premier démonstrateur.

Le premier chapitre du mémoire fait état des technologies employées dans les principales prothèses artificielles existantes et explique les définitions des divers matériaux électroactifs ainsi que leurs principes physiques et leurs applications dans le domaine médical.

Sur la base de cette analyse préliminaire, un concept innovant de pompe électromagnétique est élaboré. Les résultats de l'étude de faisabilité conduisent au dimensionnement et au test d'un premier démonstrateur. L'étape de modélisation met clairement en évidence les limites de la méthode numérique employée (EF) : une discontinuité importante de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique au niveau de l'interface de deux matériaux de perméabilité magnétique

différente existe en effet.

Dans un deuxième temps, une réflexion sur les méthodologies de modélisation et de simulation pouvant aider à la conception de tels dispositifs est menée. Un des enjeux est de calculer les déformations d'une structure mécanique souple soumise à des efforts magnétiques dont il faut déterminer finement la répartition.

Aussi, le troisième chapitre se focalise sur les problèmes méthodologiques que soulève le cas pratique précédemment considéré. A cette occasion, les principales approches utilisées, permettant la mise en équation du problème magnétostatique sous une forme faible, sont rappelées. Grâce au développement d'un code de calcul par éléments finis spécifique déterminant le champ magnétique, soit avec la formulation en potentiel vecteur, soit avec la formulation en potentiel scalaire, une étude systématique et quantitative sur le respect des conditions de passage est réalisée.

Une solution proposée pour pallier ce problème est l'utilisation d'une forme forte des équations du champ qui impose de manière explicite les deux conditions de passage. Celle-ci est présentée dans le quatrième et dernier chapitre. Cette forme forte est associée à la méthode des différences finies et appliquée sur un exemple simple. Enfin, un dispositif expérimental est conçu pour confronter les calculs réalisés avec la méthode des éléments finis, la forme forte des équations du champ et les relevés expérimentaux.

Mentionnons en dernier lieu que cette étude se place dans le cadre d'une collaboration entre le Groupe de Recherche en Electrodynamique du laboratoire LAPLACE - GREM3 et le Service de Chirurgie Cardiovasculaire et Thoracique de l'AP-HP Pitié Salpêtrière de Paris.

Première partie

Concept innovant de prothèse cardiaque pour l'assistance circulatoire

Chapitre 1

Etat de l'art des technologies utilisées pour l'assistance circulatoire et enjeu des matériaux électroactifs

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Rappels sur le fonctionnement du coeur humain	7
1.2.1	La circulation sanguine	9
1.2.2	La révolution cardiaque	9
1.3	Etat de l'art des systèmes utilisés par l'assistance circulatoire	11
1.3.1	Les principaux coeurs artificiels totaux	12
1.3.1.1	Le coeur artificiel total pneumatique : Système "Cardiowest"	12
1.3.1.2	Le coeur artificiel total électrique : Système "Abiocr"	15
1.3.2	Les assistances circulatoires	17
1.3.2.1	Les pompes volumétriques	17
1.3.2.1.1	Les assistances circulatoires pneumatiques : Système "Thoratec"	18
1.3.2.1.2	Les assistances circulatoires électriques : Système "Novacor"	19
1.3.2.2	Les pompes rotatives	21
1.3.2.2.1	Les pompes centrifuges	22
1.3.2.2.2	Les pompes axiales	22
1.4	Les matériaux électroactifs et leurs applications dans le domaine médical	24

1.4.1	Les céramiques piézoélectriques	24
1.4.1.1	Le phénomène piézoélectrique	24
1.4.1.2	Equations fondamentales	25
1.4.1.3	Propriétés électriques et mécaniques	26
1.4.1.4	Quelques exemples dans le domaine médical .	27
1.4.2	Les polymères piézoélectriques	30
1.4.2.1	Définition et propriétés d'usage	30
1.4.2.2	Quelques exemples d'application dans le do- maine médical	31
1.4.3	Les alliages à mémoire de forme	32
1.4.3.1	Propriétés des alliages à mémoire de forme . .	33
1.4.3.2	Quelques exemples dans le domaine médical .	35
1.4.4	Les fluides magnétorhéologiques	37
1.4.4.1	Propriétés des fluides magnétorhéologiques . .	37
1.4.4.2	Quelques exemples dans le domaine médical .	38
1.4.5	Les ferrofluides	39
1.4.5.1	Principe	39
1.4.5.2	Applications dans le domaine médical	40
1.4.6	Les fluides électrorhéologiques	41
1.5	Comparaison des différentes technologies en présence	42
1.6	Conclusion	44

1.1 Introduction

Depuis plusieurs années, les matériaux actifs ne cessent d'évoluer en termes de propriétés, de techniques de mise en oeuvre, et de performances. La diversité des produits accessibles offre de nouvelles perspectives dans de nombreux secteurs tels que l'automobile et l'aéronautique [Duv05] [Ren05], mais aussi dans le domaine médical et notamment dans le secteur de la chirurgie cardiovasculaire. Ce dernier domaine requiert en effet des dispositifs de petite taille pouvant fournir des efforts relativement importants et cela avec une grande fiabilité. Comme les assistances circulatoires tendent à devenir "définitives" du fait de certaines pathologies, mais aussi à cause de l'augmentation des patients en attente de transplantation. Depuis plus de deux ans, il est inscrit annuellement plus de patients sur la liste de transplantation cardiaque (environ 400 en 2007), que de transplantations réalisées dans l'année (environ 350 en 2007). Compte tenu des malades restant sur la liste d'attente de l'année précédente (environ 240 fin 2006), le délai pour obtenir un greffon est en augmentation permanente [Age08] [Lep03b]. C'est pour cela que le domaine de l'assistance circulatoire est en demande de prothèses artificielles de plus en plus fiables et de moins en moins encombrantes.

Afin d'appréhender cette problématique, et après un court rappel du fonctionnement du système cardiovasculaire humain, une étude des principaux systèmes existant a été réalisée, en mettant en avant les avantages et les inconvénients de chacun.

Ensuite, dans une deuxième partie, les définitions des divers matériaux actifs sont détaillées, rappelant certains principes physiques et leurs applications actuelles dans le domaine médical. Enfin, une synthèse des propriétés des matériaux actifs susceptibles d'être utilisés est présentée sous forme de tableau.

1.2 Rappels sur le fonctionnement du coeur humain

Dans le corps humain, le coeur se situe dans le médiastin. C'est la partie médiane de la cage thoracique délimitée par les deux poumons, le sternum et la colonne vertébrale. Il se trouve un peu à gauche du centre du thorax, en arrière du sternum, sur le diaphragme, comme le montre la Figure 1.1 [Rou74a] [Rou74b].

C'est un organe creux comportant un muscle, le myocarde, lui-même enrobé par le péricarde.

Sa taille est d'environ 1,5 fois la taille du poing fermé de la personne. Son volume vaut environ 50 à 60 cm³. Un peu moins gros chez la femme que chez l'homme, il mesure en moyenne chez ce dernier 105 mm de largeur, 98 mm de hauteur, 205 mm de circonférence. Le coeur d'un adulte pèse de 300 à 350

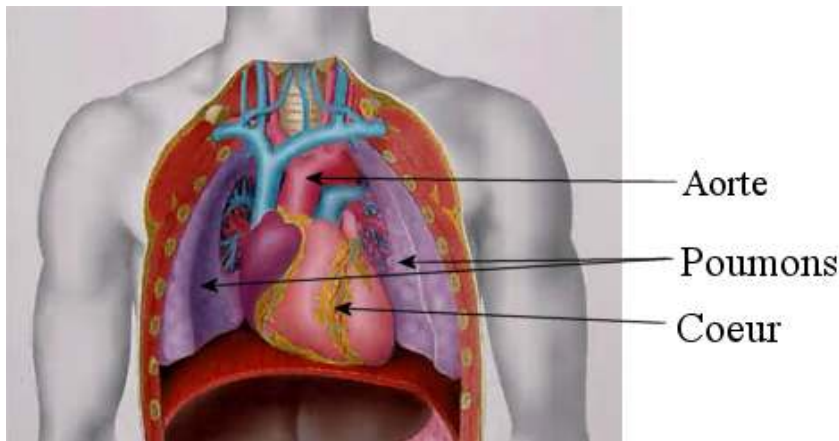


FIG. 1.1 – Emplacement du coeur dans la cage thoracique [Inr07]

grammes. Ces dimensions sont souvent augmentées lors des affections cardiaques.

Le coeur est composé de quatre chambres, appelées cavités cardiaques : deux oreillettes en haut (oreillettes droite et gauche), et deux ventricules en bas (ventricules droit et gauche) (FIG. 1.2).

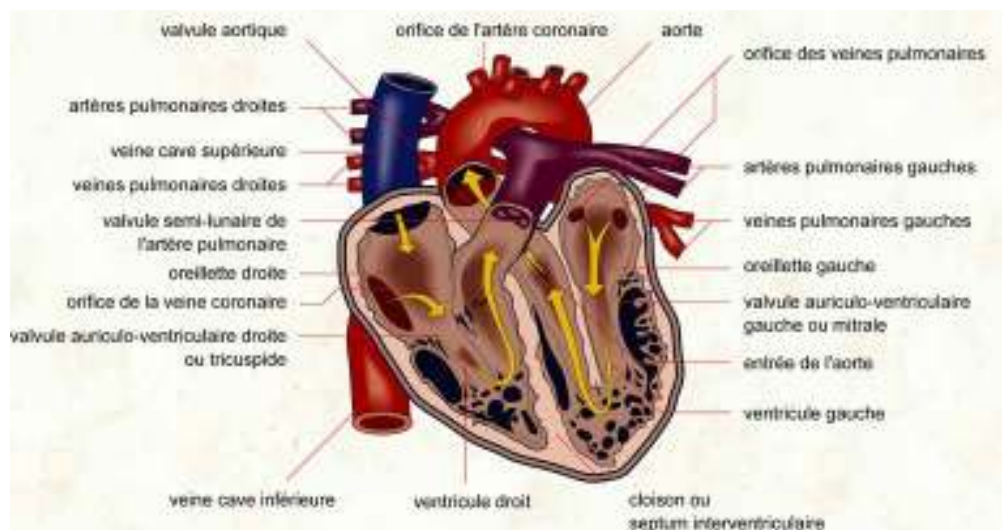


FIG. 1.2 – Anatomie du coeur [Inf07]

Un mur musculaire épais, le septum, divise l'oreillette et le ventricule gauche de l'oreillette et du ventricule droit, évitant le passage de sang entre les deux moitiés du coeur. Des valves entre les oreillettes et les ventricules assurent le passage unidirectionnel et coordonné du sang depuis les oreillettes vers ces ventricules. Les ventricules ont pour fonction de pomper le sang vers le corps ou vers les poumons. Leurs parois sont plus épaisses que celles des oreillettes, et leurs contractions plus importantes.

1.2.1 La circulation sanguine

L'organe central de la circulation sanguine est, en réalité, composé de deux coeurs accolés l'un à l'autre, mais cependant totalement distincts l'un de l'autre : un coeur droit dit veineux, et un coeur gauche dit artériel.

Le sang appauvri en oxygène par son passage dans le corps entre dans l'oreillette droite par trois veines, la veine cave supérieure, la veine cave inférieure et le sinus coronaire. Le sang passe ensuite vers le ventricule droit. Celui-ci l'envoie vers les poumons par l'artère pulmonaire (FIG. 1.3). C'est le coeur droit.

Après avoir perdu son dioxyde de carbone dans les poumons et s'y être chargé en oxygène, le sang passe par les veines pulmonaires avant d'atteindre l'oreillette gauche. De là, le sang oxygéné entre dans le ventricule gauche. Celui-ci est la chambre pompante principale, ayant pour but d'envoyer le sang par l'aorte vers toutes les parties du corps sauf les poumons (FIG. 1.3). C'est le coeur gauche.

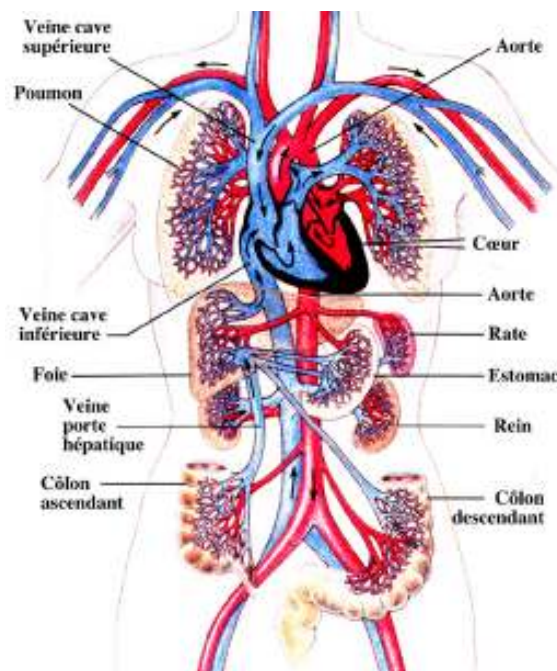


FIG. 1.3 – Schéma de la circulation sanguine dans le corps humain [cir07]

1.2.2 La révolution cardiaque

La fréquence cardiaque au repos est de 60 à 80 battements par minute, pour un débit variant de 4,5 à 5 litres de sang par minute. Chaque battement du coeur entraîne une séquence d'événements appelée la révolution cardiaque. Celle-ci consiste en trois étapes majeures : la systole auriculaire, la systole ventriculaire et la diastole.

1. La systole auriculaire :

Au cours de la systole auriculaire, les oreillettes se contractent et éjectent du sang vers les ventricules (remplissage actif). Une fois le sang expulsé des oreillettes, les valves auriculo-ventriculaires entre les oreillettes et les ventricules se ferment. Ceci évite un reflux du sang vers les oreillettes. La fermeture de ces valves produit le son familier du battement du coeur.

2. La systole ventriculaire :

La systole ventriculaire implique la contraction des ventricules, expulsant le sang vers le système circulatoire. Une fois le sang expulsé, les deux valves sigmoïdes (la valve pulmonaire à droite et la valve aortique à gauche) se ferment. Ainsi le sang ne reflue pas vers les ventricules (FIG. 1.4). La fermeture des valves sigmoïdes produit un deuxième bruit cardiaque plus aigu que le premier. Pendant cette systole les oreillettes maintenant relâchées, se remplissent de sang.

3. La diastole :

Enfin, la diastole est la relaxation de toutes les parties du coeur, permettant le remplissage (passif) des ventricules, par les oreillettes droites et gauches et depuis les veines caves et pulmonaires (FIG. 1.5).

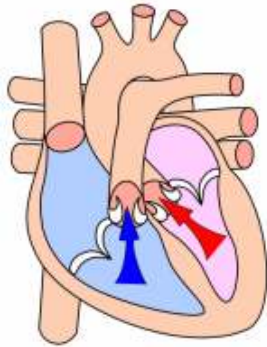


FIG. 1.4 – Phase de systole ventriculaire

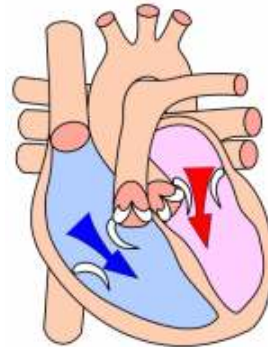


FIG. 1.5 – Phase de diastole

Le coeur passe $\frac{1}{3}$ du temps en systole et $\frac{2}{3}$ en diastole.

L'expulsion rythmique du sang provoque ainsi le pouls que l'on peut sentir.

Maintenant que nous avons vu les principales caractéristiques du coeur, nous allons passer en revue les principaux coeurs artificiels et assistances circulatoires existants.

1.3 Etat de l'art des systèmes utilisés par l'assistance circulatoire

Avant de commencer à décrire les différentes technologies employées, il faut bien faire attention à la différence entre "une assistance circulatoire" et un "coeur artificiel total".

Les coeurs artificiels totaux sont placés en série dans la circulation sanguine et le coeur natif est alors enlevé. L'avantage de ce système est d'éliminer certains problèmes inhérents à la conservation du coeur, comme les troubles du rythme par exemple, la formation de caillots ou les dysfonctionnements valvulaires. De plus, son implantation directe à la place du coeur natif limite les pertes de charge rencontrées au niveau des assistances circulatoires. Par contre, les coeurs artificiels totaux doivent être infaillibles car ils assument à eux-seuls l'intégralité de la fonction cardiaque.

Une assistance circulatoire est quant à elle implantée en parallèle du coeur, et donc celui-ci est laissé en place. Le plus souvent, il s'agit d'une assistance ventriculaire gauche : dans ce cas, le sang des cavités cardiaques gauches (oreillette ou ventricule) est dérivé dans une pompe par l'intermédiaire d'un tube synthétique (ventricule pneumatique gauche). Ensuite, le sang est renvoyé dans l'aorte par un autre tube. C'est le même principe lors d'une assistance ventriculaire droite mais, dans ce cas, le sang est réinjecté dans l'artère pulmonaire. Il est possible d'utiliser simultanément les deux configurations pour réaliser une assistance biventriculaire (FIG. 1.6).

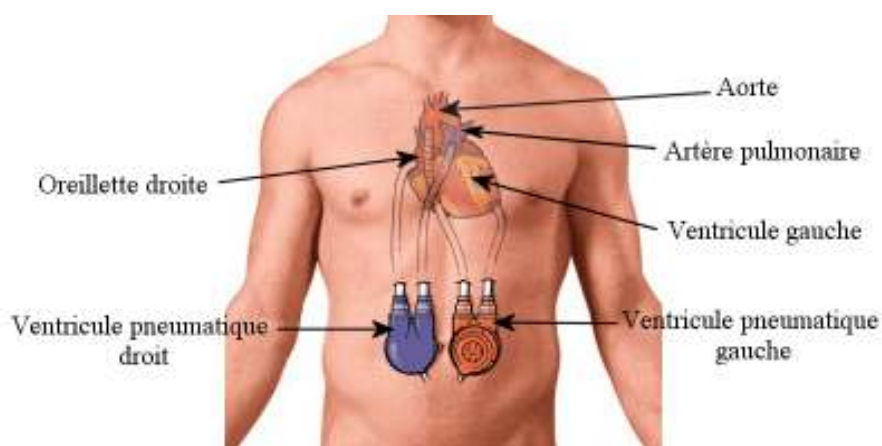


FIG. 1.6 – Schéma d'implantation d'une assistance circulatoire [Lep05].

Dans le cas des assistances circulatoires, les pompes sont le plus souvent placées à l'extérieur du corps. Dans ce cas, on parle alors d'assistance paracorporelle. Lorsqu'elles sont placées à l'intérieur, on parle d'assistance implantable.

Dans un premier temps, nous nous intéresserons aux structures des principaux coeurs artificiels totaux. Ensuite, nous verrons les technologies employées dans les assistances circulatoires.

1.3.1 Les principaux coeurs artificiels totaux

Actuellement, dans les coeurs artificiels totaux, deux types de technologies sont utilisées : les systèmes pneumatiques et les systèmes électriques.

1.3.1.1 Le coeur artificiel total pneumatique : Système "Cardiowest"

Grâce à leur facilité de mise en oeuvre, les systèmes pneumatiques représentent la première génération de pompe volumétrique. Dans un ventricule artificiel, un diaphragme sépare le sang de l'air. Lors d'injection d'air sous pression, le volume du compartiment gazeux augmente et éjecte le sang dans l'organisme par l'intermédiaire de la membrane lorsque la pression d'air diminue (FIG. 1.7).

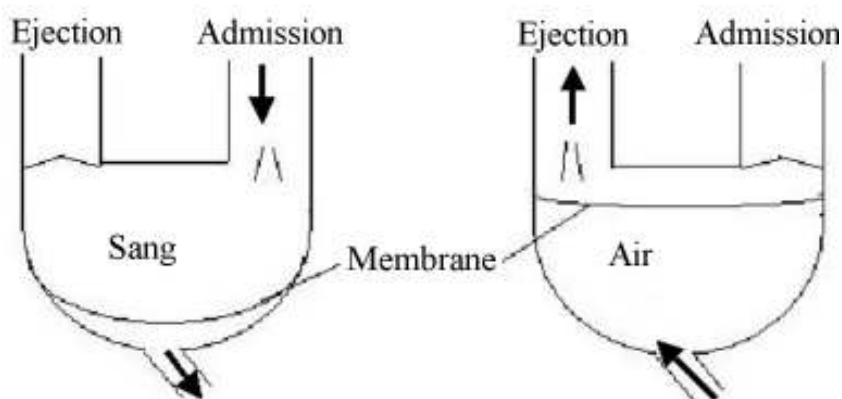


FIG. 1.7 – Principe d'un coeur artificiel pneumatique [Lep05]

Sur ce principe, le seul coeur artificiel total actuellement utilisé chez l'homme est le Jarvik-7 ou Cardiowest [Tex07] [Lep03a]. Il a été développé par la compagnie Syncardia, située à Tucson, aux Etats-Unis [Syn07].

Il est constitué de 2 ventricules indépendants en polycarbonate. Le volume interne de chaque ventricule est de 70 mL et l'encombrement total des deux ventricules réunis est de 750 mL.

Chaque ventricule présente un orifice d'entrée et un orifice de sortie, chacun étant muni d'une prothèse valvulaire mécanique comme illustré sur la Figure 1.8.

Chaque ventricule est composé d'un diaphragme en polyuréthane qui sépare le compartiment sanguin du compartiment d'air. Au départ, le sang rentre par l'orifice d'entrée et remplit le compartiment sanguin. Lorsque celui-ci est plein de sang, la valve d'entrée se ferme, le compartiment gazeux se remplit d'air sous pression, ce

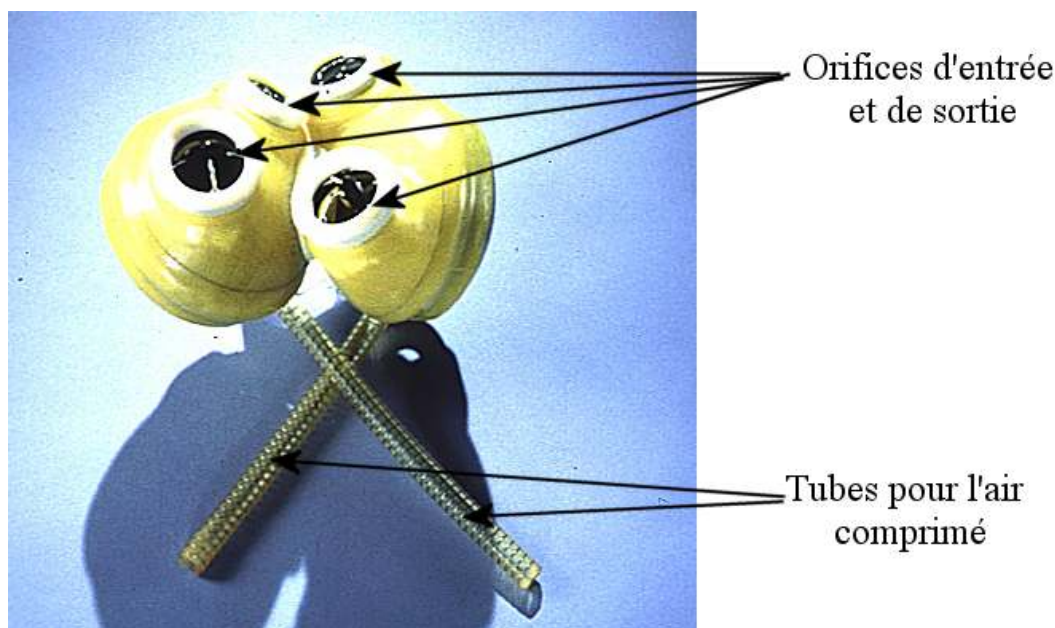


FIG. 1.8 – Les deux ventricules du coeur artificiel total Cardiowest [Tex07]

qui pousse le sang par l'intermédiaire du diaphragme vers l'orifice de sortie. Quand le compartiment sanguin est vide, la valve de sortie se ferme et le sang rentre à nouveau par l'orifice d'entrée.

La Figure 1.9 représente l'implantation du coeur artificiel total Cardiowest [Com04].

Le coeur Cardiowest est piloté par une console externe qui est illustrée sur la Figure 1.10. Cette console contient un ordinateur de surveillance qui fournit à l'utilisateur un diagnostic non invasif et des informations de contrôle telles que le débit du dispositif, le volume d'éjection systolique et le débit cardiaque. Sur la console, un panneau d'alerte distinct fournit des informations sur la pression, les réserves d'air et l'autonomie de la batterie. De plus, une alarme se déclenche si l'ordinateur ne contrôle plus l'état du patient. Toutes les alarmes produisent un signal visuel et sonore.

Les réserves d'air (deux réservoirs d'air) et d'alimentation électrique (bloc d'alimentation de secours et batterie de la console) entrent automatiquement en fonction si l'air comprimé extérieur et/ou l'alimentation secteur sont coupés. Cela peut se produire durant le transport du patient, ou en cas de défaillance du circuit d'alimentation en électricité ou en air de l'hôpital.

Le contrôleur est l'élément principal de la console externe. Il émet des pulsations de pression pneumatique vers les tubulures droite et gauche, reliées aux cavités à air des ventricules artificiels implantés.

Cette console peut être aussi portable pour permettre au patient de sortir de l'hôpital et de retourner à la maison. Dans ce cas, elle est composée de mini compresseurs électriques de la taille d'une valise de cabine d'avion (FIG. 1.11).

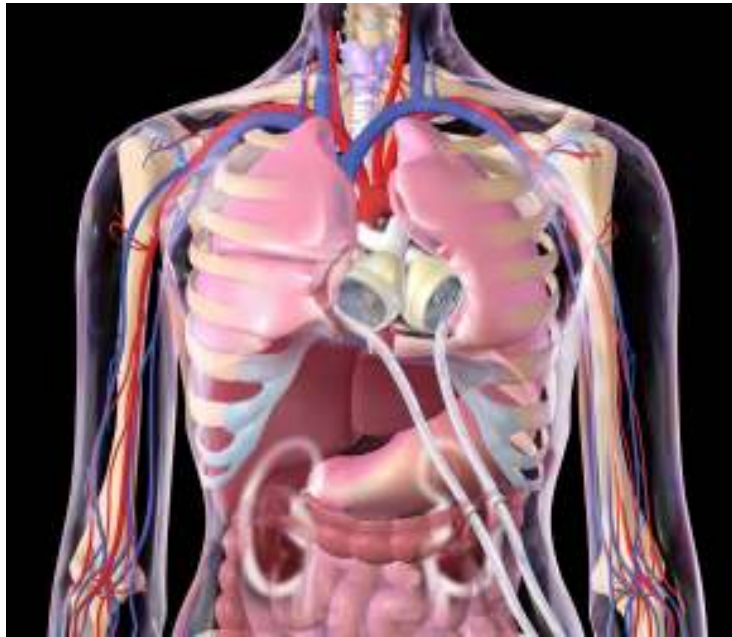


FIG. 1.9 – Schéma d'implantation du coeur artificiel total Cardiowest [Syn07]



FIG. 1.10 – Console du coeur artificiel total Cardiowest [Syn07]



FIG. 1.11 – Console portable du Cardio-
west [Syn07]

1.3.1.2 Le coeur artificiel total électrique : Système "Abiocor"

L'Abiocor est le premier et le seul coeur artificiel total électrique. Il est développé par la compagnie Abiomed dont le siège est situé dans le Massachusetts [Abi07].

L'Abiocor est destiné aux patients qui sont au stade terminal d'insuffisance cardiaque et où les autres options ont été épuisées.

L'Abiocor a l'avantage d'être totalement implantable, c'est à dire qu'aucun câble ne traverse la peau pour le relier à une source d'énergie externe et à un contrôleur [Pav03].

L'Abiocor est composé d'une unité interne thoracique, d'une batterie interne rechargeable, d'un contrôleur et d'une bobine interne pour recevoir l'énergie (FIG. 1.12). Tous ces systèmes sont implantables chez le patient comme le montre la Figure 1.13

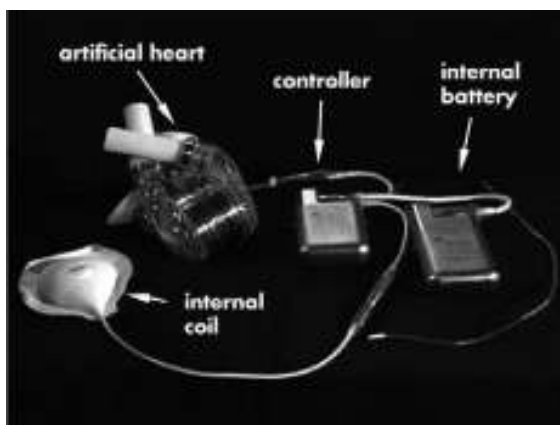


FIG. 1.12 – Eléments du coeur artificiel total électrique Abiocor [Lep07]

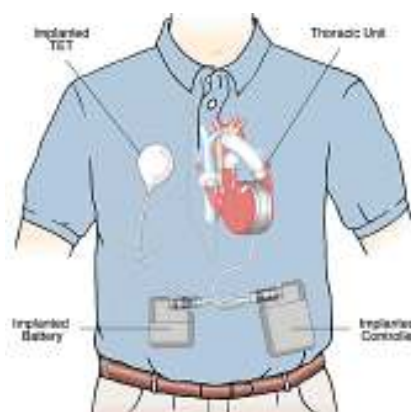


FIG. 1.13 – Schéma d'implantation de l'Abiocor chez un homme [Med07]

L'unité thoracique, montrée sur la Figure 1.15, pèse environ un kilogramme et comprend deux ventricules artificiels en polyuréthane dont les orifices d'entrée et de sortie sont munis de valves unidirectionnelles. Entre les deux ventricules sont placés deux moteurs hydrauliques indépendants. Un moteur conserve la fonction de pompe pour chaque ventricule tandis que l'autre moteur assure la fonction des quatre valves cardiaques.

Le fonctionnement du coeur Abiocor repose sur le principe des coeurs artificiels pneumatiques, l'air étant remplacé par un liquide visqueux. Le moteur assurant la fonction de pompe est placé entre les deux ventricules et, par l'intermédiaire d'un poussoir, entraîne le liquide d'un côté ou de l'autre, comme illustré sur la Figure 1.14. Par exemple, le liquide vient écraser le compartiment sanguin gauche

1. Etat de l'art des technologies utilisées pour l'assistance circulatoire et enjeu des matériaux électroactifs

et envoie ainsi le sang dans tout l'organisme par l'intermédiaire des valves de sortie. Pendant ce temps la pression a diminué du côté droit et le sang a pu ainsi rentrer dans le compartiment sanguin par l'intermédiaire des valves d'entrée. Ensuite, le moteur envoie le liquide visqueux du côté droit et, cette fois-ci, c'est le compartiment droit qui se vide de sang tandis que le gauche se remplit à son tour.

L'Abiocr est capable d'envoyer plus de 3 litres de sang par minute dans les poumons et dans le reste du corps, en simulant le rythme cardiaque.

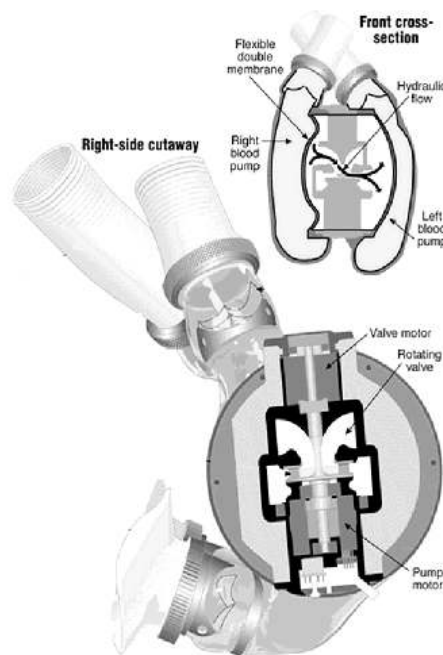


FIG. 1.14 – Schéma de fonctionnement du coeur artificiel total électrique Abiocr [Abi07]



FIG. 1.15 – Vue externe de l'Abiocr [Abi07]

Un des avantages de l'Abiocor est qu'il est entièrement implantable et qu'aucun câble ou tuyau ne traverse la peau, réduisant ainsi les risques d'infection.

L'énergie électrique est transmise à travers la peau par induction entre une bobine externe et une bobine interne. Ce dispositif de transfert d'énergie est appelé TET (Transcutaneous Energy Transmission). Grâce à ce système, le patient peut disposer d'une autonomie réelle et poursuivre un mode de vie actif.

L'Abiocor fonctionne à l'aide de batteries internes et externes au lithium. La batterie interne offre environ une demi-heure d'autonomie, ce qui permet aux patients de mener des activités, comme prendre une douche par exemple, sans qu'une source d'alimentation externe ne soit nécessaire. Les batteries externes, quant à elles peuvent alimenter le système pendant environ 4 heures. Ensuite, le patient doit se brancher sur une console.

L'un des inconvénients majeurs de ce système est son encombrement qui le rend difficile à implanter, même chez les personnes de forte corpulence dont le coeur natif est dilaté. Cela tient notamment au fait que la pompe est intégrée dans la même unité que les 2 ventricules artificiels qui sont obligatoirement solidarisés (FIG. 1.15).

Il est à noter qu'à la différence des assistances circulatoires électriques, les coeurs artificiels ne nécessitent pas de chambre de compliance pour équilibrer les variations de volume des poches de sang. En effet, les deux ventricules fonctionnant en opposition, les variations de volume liées au remplissage de l'un sont compensées par la vidange de l'autre.

Depuis sa sortie en juillet 2001 et jusqu'en septembre 2003, l'Abiocor a été implanté chez plus d'une dizaine de patients [Loi03].

La compagnie Abiomed travaille également sur la prochaine génération de coeur artificiel total, l'AbioCor II. Celui-ci a été conçu avec pour objectifs d'être plus petit et d'avoir une durée de vie de plus de cinq ans.

1.3.2 Les assistances circulatoires

Dans les assistances circulatoires, il existe deux sortes de pompes, les pompes volumétriques et les pompes rotatives.

1.3.2.1 Les pompes volumétriques

En matière de pompes volumétriques, les technologies utilisées sont les mêmes que celles que l'on rencontre dans les coeurs artificiels totaux. Nous retrouvons donc des systèmes d'assistance circulatoire pneumatiques et électriques.

1.3.2.1.1 Les assistances circulatoires pneumatiques : Système "Thoratec"

Le Thoratec, illustré sur la Figure 1.16, est une assistance circulatoire ventriculaire pneumatique paracorporelle. Le ventricule artificiel est constitué d'une chambre souple en Teraflon insérée dans une coque rigide. Deux valves mécaniques situées au niveau des orifices d'entrée et de sortie assurent un débit unidirectionnel. L'enceinte en polyuréthane est connectée à un tuyau qui permet d'injecter de l'air sous pression. Cet air vient comprimer la poche en teraflon et envoie le sang dans l'organisme par l'intermédiaire de la valve de sortie.



FIG. 1.16 – Vue de l'assistance ventriculaire gauche Thoratec [Tho07]

Les ventricules artificiels sont reliés au coeur des patients par deux jeux de canules. Une canule d'admission relie le ventricule artificiel gauche ou droit au coeur natif et une canule d'éjection relie la sortie du ventricule artificiel à l'aorte dans le cas d'une assistance ventriculaire gauche ou à l'artère pulmonaire dans le cas d'une assistance ventriculaire droite.

Pour détecter le remplissage complet du ventricule, un aimant est installé sur le diaphragme. Un capteur à effet Hall, placé sur la coque rigide, permet de connaître la position de l'aimant et ainsi de déterminer le niveau de remplissage du ventricule. En s'assurant que la vidange du ventricule est complète, cette information permet de connaître le débit de la pompe, à partir de sa fréquence de fonctionnement.

La console externe présente deux modules d'activation. Chaque module comprend deux compresseurs pouvant assurer si besoin l'activation des deux ventri-

cules. Le premier permet de vider périodiquement le ventricule dès qu'il est totalement rempli et le second assure un vide qui améliore la qualité du remplissage. Le système électrique fonctionne sur le secteur ou sur batteries (autonomie d'une heure). Cette console peut effectuer deux modes de fonctionnement : un mode asynchrone à fréquence fixe déterminée ou un mode dit "plein vide" à fréquence variable. Pour chaque ventricule, la console indique la pression d'activation, le calcul du temps de remplissage ventriculaire et le débit obtenu.

D'un faible encombrement, le système portable assure une assistance biventriculaire et se substitue totalement à la console. Le patient acquiert ainsi une autonomie beaucoup plus importante. Ce système est contrôlé par un microprocesseur interne et peut fonctionner avec deux batteries au lithium.

1.3.2.1.2 Les assistances circulatoires électriques : Système "Novacor"

Nous détaillons comme exemple type d'assistance circulatoire électrique le Novacor, même s'il en existe d'autres comme le HeartMate ou le Lionheart [Tho07] [Lep04].

Conçu dès 1973 par le Docteur Peer PORTNER à l'Université de Stanford, le Novacor est un ventricule gauche d'assistance mécanique conçu pour proposer une assistance circulatoire de longue durée tout en permettant au patient un retour à une vie quasi normale. Tributaire d'une volumineuse console de gestion, la première version a, depuis plusieurs années, cédé la place à un modèle dit "portable" relié par un câble transcutané à un contrôleur et des batteries qui se portent soit à la ceinture, soit en bandoulière [Wor07].

Le Novacor fonctionne en parfaite harmonie avec le coeur natif. Il se remplit de façon passive par le flux sanguin provenant du ventricule gauche pendant la systole et l'éjection se fait dans l'aorte ascendante pendant la diastole du coeur.

Le Novacor est une pompe électromagnétique, constituée de deux électro-aimants qui compriment une poche de sang par l'intermédiaire de ressorts, comme illustré sur la Figure 1.17. La poche de sang est moulée dans du polyuréthane et comporte deux conduits tangentiels à l'extrémité desquels deux valves sont disposées pour assurer un débit unidirectionnel du flux sanguin. Chaque paroi de la poche est solidaire d'un plateau qui permet de la comprimer afin d'envoyer le sang dans l'organisme. Chaque électro-aimant est relié à un plateau par l'intermédiaire d'un ressort en titane.

L'éjection du sang dans l'organisme se déroule en deux étapes. Pendant la première phase, l'alimentation des électroaimants rapproche les deux plateaux et commence à envoyer le sang dans l'organisme, par l'intermédiaire des ressorts qui jouent ici le rôle de bras de levier. Lors de la deuxième étape, les électroaimants

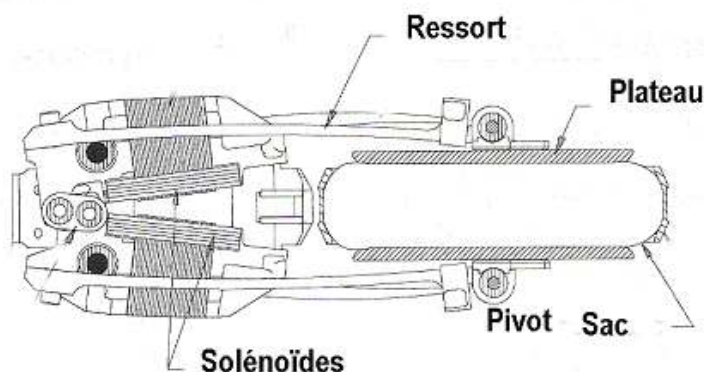


FIG. 1.17 – Schéma de principe de la pompe Novacor [Lep05]

sont arrivés en bout de course et ce sont alors les ressorts qui continuent à rapprocher les plateaux, assurant ainsi une vidange complète de la poche.

Des détecteurs à effet hall permettent de mesurer le déplacement et la tension des ressorts. Cette information est traitée par un algorithme qui permet de connaître le taux et la vitesse de remplissage de la pompe ainsi que la vitesse d'éjection du ventricule.

C'est la suppression des tensions appliquées aux électroaimants qui entraîne une ouverture de la poche de sang et permet ainsi un remplissage passif du ventricule artificiel.

Le débit de la pompe peut atteindre 5 à 7 litres par minute mais il est dépendant de la fréquence cardiaque et du volume d'éjection du ventricule gauche. Le volume d'éjection maximum de la pompe est de 70 ml.

Le Novacor mesure 16 cm de long, 13 cm de large et 6 cm d'épaisseur et pèse environ 800 g. L'ensemble des systèmes est inclus dans un corps de pompe constitué de plusieurs pièces et moulé dans une résine époxy formant une coque rigide (FIG. 1.18).

L'un des avantages du Novacor repose sur le fait que l'ensemble de ses éléments actifs est implantable dans l'organisme. La valve d'entrée est connectée à la pointe du ventricule gauche du cœur par l'intermédiaire d'un tube de dacron et la valve de sortie est connectée à l'aorte ascendante.

Enfin, une ligne percutanée contenant l'alimentation électrique et transmettant les données informatiques de fonctionnement de la pompe permet le raccordement du dispositif à une console externe.

Le point faible de ce convertisseur électro-hydraulique est le pivot situé à



FIG. 1.18 – Photo de l'assistance ventriculaire gauche du Novacor [Her03]

l'extrémité des ressorts. En effet, l'usure de ce pivot est responsable de dysfonctionnement de la machine en moyenne après 3 à 4 ans d'utilisation voire parfois plus précocement. Dans la version 2 du Novacor, les électroaimants sont disposés directement au contact de la poche, permettant ainsi de supprimer les ressorts et leurs pivots.

Le Novacor 2, qui est la prochaine génération d'assistance circulatoire, présente aussi de nombreux avantages par rapport à son prédécesseur. Il est plus petit, il n'a pas de chambre de compliance pour compenser la variation de volume et de plus, il est entièrement implantable car il bénéficie du système TET pour le transfert d'énergie [Wor07].

Pour conclure, les systèmes Thoratec et Novacor ont été utilisés chez plus de 5000 patients, dans près de 170 services de chirurgie cardiaque à travers le monde [Loi03].

1.3.2.2 Les pompes rotatives

A la différence des pompes volumétriques, les pompes rotatives propulsent le sang, non plus avec un débit pulsatile, mais avec un débit continu. Ces pompes sont très largement utilisées en circulation extra-corporelle et présentent un regain d'intérêt dans le cadre de l'assistance circulatoire grâce à leur capacité de miniaturisation, due notamment à la suppression de la poche de sang.

Par rapport aux pompes volumétriques, les pompes rotatives présentent deux autres avantages : elles sont beaucoup plus silencieuses et ne nécessitent plus de valve unidirectionnelle. Par contre, elles ne peuvent assurer que des débits continus

voire légèrement modulés en jouant sur la vitesse de la turbine.

Deux grands types de pompes rotatives sont utilisés dans le domaine de l'assistance circulatoire : les pompes centrifuges ou radiales et les pompes axiales.

1.3.2.2.1 Les pompes centrifuges

Les pompes centrifuges sont souvent présentées sous forme d'un disque épais ou d'un cône tronqué, comme montré sur la Figure 1.20. Leur principe de fonctionnement est simple. Le sang arrive par l'orifice d'entrée situé au centre de la pompe et il est accéléré de manière centrifuge, par rotation de la turbine, vers la périphérie. Au niveau de la périphérie, la distance entre le corps de pompe et la turbine augmente progressivement vers l'orifice de sortie, situé tangentiellement au bord externe. Cet aspect de spirale permet d'engendrer une pression croissante vers l'orifice de sortie (FIG. 1.19).

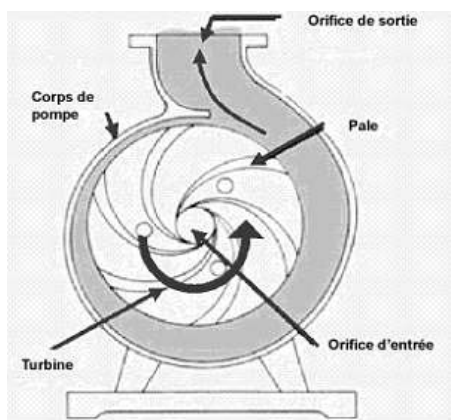


FIG. 1.19 – Schéma de principe d'une pompe centrifuge [Lep05]

FIG. 1.20 – Vue d'une pompe centrifuge [Lep05]

Les utilisations les plus courantes des pompes centrifuges sont généralement les circulations extracorporelles et les assistances circulatoires de courte durée. Les pompes centrifuges sont généralement constituées de deux parties, l'une à usage unique contenant la turbine, et l'autre réutilisable contenant le moteur. L'avantage de cette architecture est ainsi de disposer d'une pompe à faible coût.

1.3.2.2.2 Les pompes axiales

La Figure 1.21 montre que les pompes axiales se présentent sous la forme d'un cylindre allongé.

La turbine est orientée selon l'axe du flux sanguin. Pour éviter la formation de vortex, un redresseur est placé à l'entrée de la pompe pour aligner l'écoulement dans l'axe de la pompe. Ensuite, la rotation de la turbine accélère de manière non uniforme le fluide en direction de la sortie où un diffuseur transforme l'énergie cinétique acquise par le fluide en pression et limite les phénomènes de recirculation.

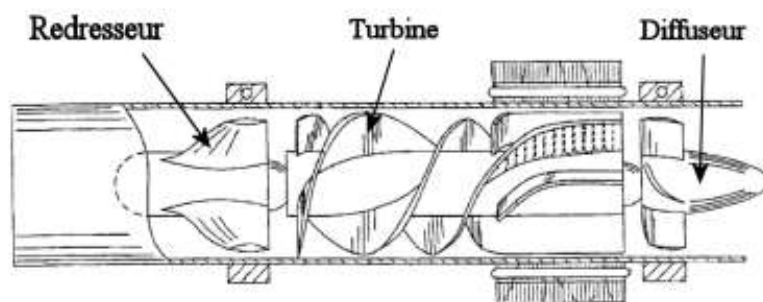


FIG. 1.21 – Schéma en coupe d'une pompe axiale [BJ97]

Le Jarvik 2000 est actuellement la plus petite pompe axiale utilisée [Jar07]. Elle mesure 5 cm de long pour 1,8 cm de diamètre (FIG. 1.22). Compte tenu de sa taille, le Jarvik 2000 fonctionne à une vitesse moyenne de l'ordre $17\,000\text{ Tr}\cdot\text{min}^{-1}$ pour assurer un débit suffisant. Son implantation se fait directement dans le ventricule gauche et un tube relie la sortie à l'aorte, comme illustré sur la Figure 1.23.



FIG. 1.22 – La pompe axiale Jarvik 2000 [Ass07]

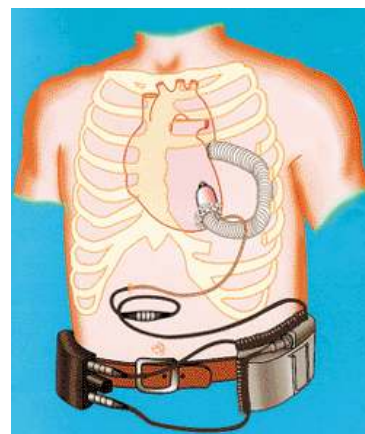


FIG. 1.23 – Implantation du Jarvik 2000 [Ass07]

Dans l'annexe A, les caractéristiques techniques des principales pompes rotatives utilisées actuellement sont détaillées.

Pour conclure, les coeurs artificiels totaux et assistances circulatoires utilisent essentiellement des technologies classiques (actionneurs électromagnétiques...) limitées face aux fonctions ciblées dans le domaine de la chirurgie cardiovasculaire. Les matériaux électroactifs permettent d'envisager de nouvelles fonctionnalités qui peuvent apporter des solutions technologiques. Afin d'appréhender cette problématique, une étude des principaux matériaux électroactifs est proposée dans la partie suivante.

1.4 Les matériaux électroactifs et leurs applications dans le domaine médical

Le terme « matériaux électroactifs » désigne une classe de matériaux particuliers possédant la propriété d'assurer un couplage électro-mécanique local opérant au sein même de la matière [Nog05].

Pour ces matériaux, il existe deux sortes de couplage :

- le couplage direct, par exemple le couplage électro- ou magnétoélastique, où l'énergie électrique est directement convertie en énergie mécanique et ce de manière réversible ;
- le couplage indirect, tel que le couplage électro-thermo-élastique, où une étape de conversion intermédiaire (ici thermique) est nécessaire pour obtenir une déformation mécanique (alliages à mémoire de forme). Dans le cas des fluides, le couplage peut être de type électro-visco-élastique (cas des fluides électro- ou magnétorhéologiques).

La conversion électromécanique de l'énergie s'opère au sein de ces matériaux avec des densités d'énergie élevées, offrant des possibilités d'intégration fonctionnelle inédites. Ainsi, ils permettent d'envisager des solutions techniques difficilement concevables avec des actionneurs électromagnétiques classiques.

L'objectif de cette partie est de présenter les principaux matériaux électroactifs et leurs applications dans le domaine médical.

1.4.1 Les céramiques piézoélectriques

Parmi les matériaux électroactifs les plus couramment utilisés, les céramiques piézoélectriques jouent un rôle prépondérant. Elles présentent la faculté de se déformer sous l'effet d'un champ électrique d'origine extérieure. Réciproquement, elles développent une polarisation électrique lorsqu'elles sont soumises à une contrainte mécanique.

1.4.1.1 Le phénomène piézoélectrique

L'effet piézoélectrique repose sur la capacité particulière de certains matériaux cristallins à produire des charges électriques proportionnellement aux contraintes mécaniques extérieures qui leur sont appliquées (effet piézoélectrique direct). Inversement, ces matériaux ont la faculté de se déformer sous l'action d'un champ électrique (effet piézoélectrique inverse) et ce de manière linéaire.

Dans certains matériaux comme le quartz, ces effets sont naturellement observables. Cependant, la réalisation d'actionneurs repose sur l'utilisation de céramiques ferroélectriques synthétiques polycristallines mises au point dans les années 1950. Les plus couramment employées de nos jours sont réalisées par frittage

d'oxyde de plomb, de zirconium, et de titane (PZT) [Nog01] [Vig05] [Cle99]. Dans ces composés, l'effet piézoélectrique apparaît après l'application d'un champ électrique intense qui introduit l'anisotropie nécessaire à l'existence du phénomène (polarisation du matériau). De ce fait, l'échantillon de céramique possède des axes électriques et mécaniques qu'il convient de repérer par rapport à la direction de polarisation, comme illustré sur la Figure 1.24.

1.4.1.2 Equations fondamentales

Le comportement des matériaux piézoélectriques peut-être décrit par le système d'équations linéaires suivant [Ike90] [Nog05] :

$$D_i = d_{i\lambda} \cdot T_\lambda + \varepsilon_{ij}^T \cdot E_j \quad (1.1)$$

$$S_\lambda = s_{\lambda\mu}^E \cdot T_\mu + d_{i\lambda} \cdot E_i \quad (1.2)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\lambda, \mu = 1, \dots, 6$$

Avec pour notations :

D_i : Déplacement électrique

S_λ : Déformation relative

T_λ : Contrainte mécanique

E_i : Champ électrique

ε_{ij}^T : Constantes de permittivité électrique à contrainte constante

$d_{i\lambda}$: Constantes piézoélectriques

$s_{\lambda\mu}^E$: Constantes de souplesse à champ électrique constant

Grâce à ces équations, nous pouvons mettre en évidence les trois modes de couplage électromécanique élémentaires de fonctionnement piézoélectrique. La Figure 1.24 illustre ces modes dans le cas d'un barreau parallélépipédique de céramique [Nog96].

La notation utilisée est la suivante : Pour un mode $(i\lambda)$, i correspond à l'axe d'orientation du champ électrique et λ à l'axe de déformation mécanique ($i \in \{1, 2, 3\}$, $\lambda \in \{1 \dots 6\}$). Par convention, l'axe de polarisation est dirigé suivant l'axe 3. Les trois modes élémentaires différentiables, par exemple dans le cas d'un barreau parallélépipédique et en considérant l'effet inverse sont :

- mode longitudinal (33) : ce mode se traduit par une variation de longueur suivant l'axe 3, lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant ce même axe. Comme le coefficient d_{33} est positif, le champ électrique et la déformation mécanique sont de même sens. (C'est le mode utilisé notamment dans les céramiques multicouches).

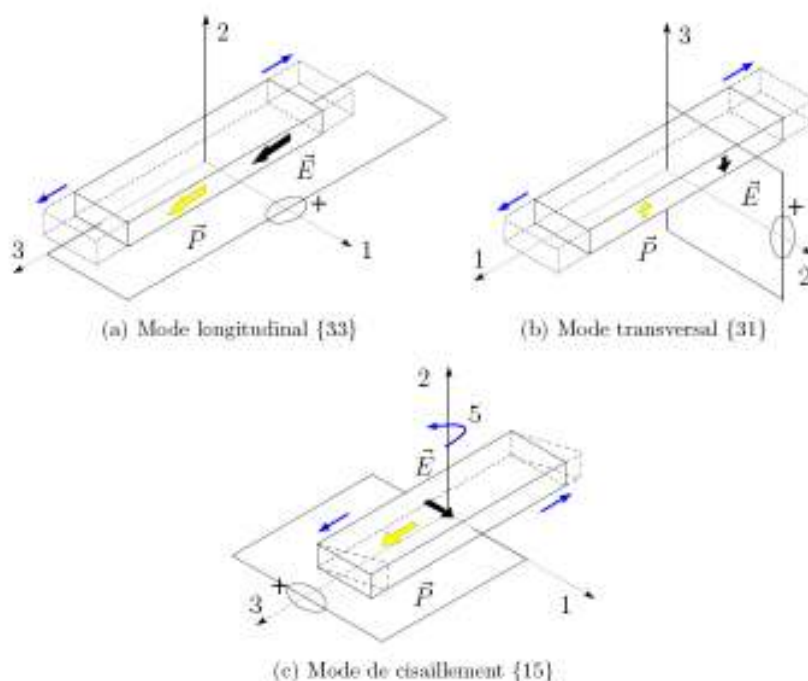


FIG. 1.24 – Modes de couplage électromécanique élémentaires dans les céramiques PZT [Vig05]

- mode transversal (31) : ce mode conduit à une variation de longueur suivant l'axe 1, lorsqu'un champ électrique est appliqué suivant l'axe 3. Ce couplage coexiste avec le mode (33), mais ce dernier est favorisé du fait des grandes dimensions de l'échantillon considéré selon l'axe de polarisation. Le mode (31) est utilisé dans le cas de matériaux de faible épaisseur suivant l'axe de polarisation comme dans le cas d'actionneurs de type bimorphe par exemple.
- mode de cisaillement (15) : l'application d'un champ électrique suivant l'axe 1 conduit à une déformation de cisaillement autour de l'axe 2 (Déformation repérée par l'indice 5).

La plupart des actionneurs piézoélectriques exploitent les modes de déformation correspondant aux modes longitudinal et transversal.

1.4.1.3 Propriétés électriques et mécaniques

Les céramiques PZT possèdent généralement des constantes de charge ($d_{i\lambda}$) assez élevées. Selon le mode de couplage considéré, celles-ci peuvent être comprises entre 200 et 600 pC/N, tandis que les permittivités relatives varient de 1000 à 3000. Les valeurs de champ électrique maximum sont de l'ordre de $2\text{MV}\cdot\text{m}^{-1}$. L'application d'un champ plus élevé entraînerait un claquage de la céramique [Sai07].

La température joue un rôle très important dans le comportement des céramiques. Au-delà de la température de Curie, on observe une dépolarisation de la céramique. Notons, cependant, que celle-ci intervient bien avant cette température caractéristique des milieux ferroélectriques. De ce fait, on a coutume de ne pas dépasser une température dite de sécurité, correspondant environ à la moitié de la température de Curie (de l'ordre de 80 à 110 °C).

D'un point de vue mécanique, les céramiques sont des matériaux "fragiles", dont le module de Young atteint classiquement 70 GPa. Les déformations mécaniques obtenues à vide sont comprises entre 200 et 800 ppm (parties par million).

En raison de leurs constantes de charge et de leurs coefficients de couplage élevés les céramiques piézoélectriques sont les matériaux électroactifs les plus utilisés. Elles se présentent sous la forme de céramiques massives (barreau parallélépipédique, cylindre creux, disque...) ou sous forme de céramiques multicouches (mises en série mécanique de plusieurs céramiques élémentaires électriquement connectées en parallèle) pour obtenir des déformations plus élevées sous des niveaux de tension moindre.

1.4.1.4 Quelques exemples dans le domaine médical

La principale utilisation des céramiques piézoélectriques dans le domaine médical est l'imagerie ultrasonore. Dans ces systèmes, la céramique fonctionne en tant qu'émetteur et récepteur d'ondes acoustiques [Sou01] [Gur98] [Wel99]. Il existe plusieurs types de sondes adaptées aux différents besoins d'analyse échographique.

Une autre application utilisant les céramiques piézoélectriques concerne la découpe des tissus afin de réaliser des opérations chirurgicales moins invasives, autour de la moelle épinière par exemple [MM07].

Dans le domaine de l'assistance circulatoire une application antérieure étudiée au laboratoire concerne la mise au point d'une fonction antithrombotique électroactive [Vig07] [Vig05]. Cette étude propose une nouvelle approche de la fonction anticoagulante par utilisation d'un procédé non chimique, utilisant des vibrations pariétales générées par un actionneur électroactif afin de prévenir la formation de caillot.

L'étude a porté sur un raccord en Y de circuit de circulation extracorporelle (CEC). L'avantage de ce raccord est que la coagulation sanguine y est reproductible, due à la présence d'une zone de recirculation du flux sanguin. A partir de ses dimensions et de simulations numériques, un actionneur "piston" a été dimensionné et expérimenté (Piezoactuator Inducing Vibrations To Eliminate the Risk of Thrombosis, PIVERT) (FIG. 1.25). Il est composé d'une céramique

piézoélectrique, de deux pièces en bronze favorisant la transmission des vibrations, d'une vis de précontrainte et d'un corps en acier.

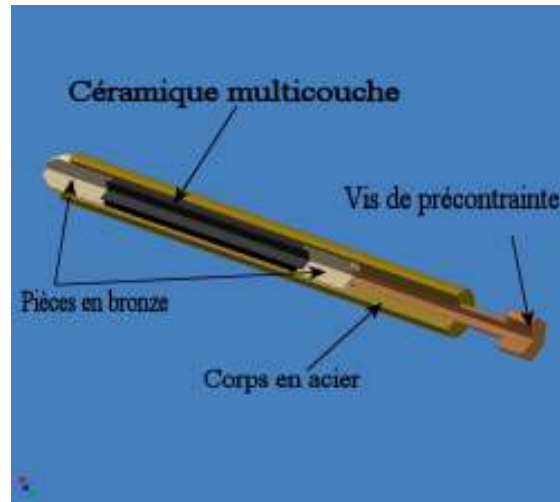


FIG. 1.25 – Détails de l'intégration mécanique de PIVERT [Vig07]

A partir de cet actionneur, plusieurs configurations ont été envisagées : les vibrations sont appliquées avant la divergence, (FIG. 1.26), au milieu de la zone de recirculation, (FIG. 1.27), ou encore en amont de la zone (FIG. 1.28).

Pour augmenter l'amplitude vibratoire, les céramiques piézoélectriques sont alimentées à la fréquence de résonance correspondant à un mode de flexion des mâts du bâti. Ainsi, des déplacements de l'ordre du dixième de millimètre sont obtenus pour une fréquence voisine de 650 Hz.

La Figure 1.29 présente les résultats obtenus avec la troisième configuration d'actionneur. Ces résultats sont les plus intéressants et significatifs obtenus à ce jour, car il est possible de constater sur plusieurs essais un retard sur le temps de coagulation variant de 25 à 90 minutes.

Cette étude a permis de montrer l'influence des vibrations mécaniques sur la coagulation sanguine.

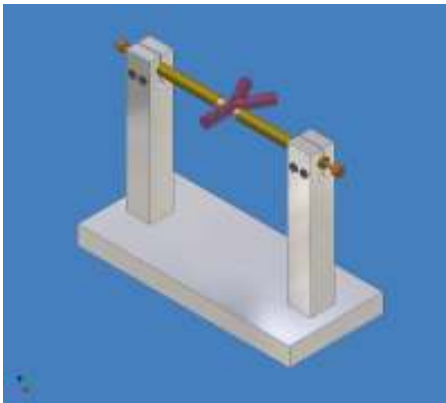


FIG. 1.26 – Actionneur configuration 1 [Vig07]



FIG. 1.27 – Actionneur configuration 2 [Vig07]

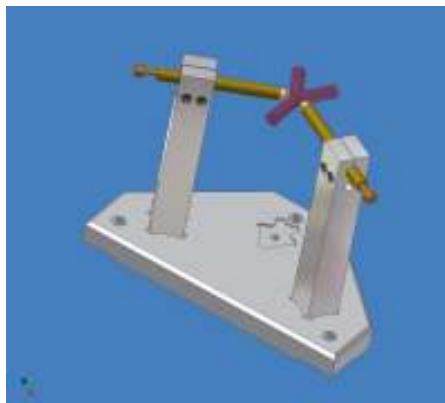


FIG. 1.28 – Actionneur configuration 3 [Vig07]

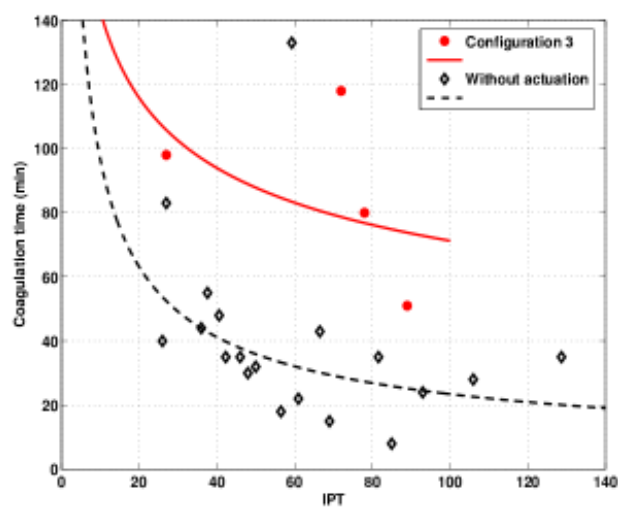


FIG. 1.29 – Temps de coagulation en fonction de l'indice du potentiel thrombodynamique avec et sans actionneur [Vig07]

1.4.2 Les polymères piézoélectriques

1.4.2.1 Définition et propriétés d'usage

Les polymères piézoélectriques sont des matériaux qui ont la capacité, comme les céramiques piézoélectriques, de se déformer sous l'action d'un champ électrique. Par contre, leurs caractéristiques sont très différentes, car ils sont généralement exploités sous forme de films souples et peuvent alors produire de très grandes déformées, mais avec des efforts relativement faibles.

Le matériau polymère généralement utilisé est le polyfluorure de vinidylène (PVDF ou PVF₂). C'est un thermoplastique semi-cristallin qui est souple, résistant, et peut être fabriqué sous forme de film d'épaisseur allant de 6 μm à 1 mm et de section utile variant de $25 \times 25 \text{ mm}^2$ jusqu'à $600 \times 600 \text{ mm}^2$.

La phase cristalline du PVDF présente deux structures ordonnées, une structure polaire (phase β) et une structure non polaire (phase α). C'est cette dernière qui est exploitée pour obtenir l'effet piézoélectrique. Au départ, le film PVDF est obtenu sous sa phase α qui ne possède pas de propriétés piézoélectriques. Ensuite, il est étiré mécaniquement puis soumis à un fort champ électrique qui aligne les moments dipolaires élémentaires, initialement orientés de manière aléatoire.

De par ce procédé, il existe deux états piézoélectriques possibles :

- si le film est étiré uniaxialement, les modes de couplage privilégiés sont les modes $\{33\}$ et $\{31\}$;
- si le film est étiré biaxialement, le mode de couplage $\{33\}$ est privilégié.

Le Tableau 1.1 présente les principales propriétés des PVDF en comparaison avec les céramiques piézoélectriques.

D'un point de vue électrique, les PVDF sont moins attractifs que les céramiques PZT, car ils présentent des constantes de charges moins élevées et des pertes diélectriques à haute fréquence accrues.

D'un point de vue mécanique, les PVDF ont l'avantage d'être moins denses et d'avoir un module de Young moins élevé, ce qui les rend flexibles et modulables. Ainsi, les PVDF sont généralement utilisés en tant que capteur et non comme actionneur.

Notons cependant que des copolymères du PVDF, tel que le polyvinylidène trifluoroéthylène (PVDF-TrFE), présentent des constantes diélectriques légèrement supérieures, mais surtout un coefficient de couplage électromécanique plus important et des pertes diélectriques basses.

	Polymères électroactifs	Céramiques piézoélectriques
Déformée relative	10 %	0.2 %
Constante de charge $pC.N^{-1}$	10 - 30	200 - 600
Pertes diélectriques ($\tan \delta$)	0.2	0.002 - 0.02
Champ électrique critique $MV.m^{-1}$	150	3
Contraintes (MPa)	0.1 - 3	50
Module de Young (GPa)	1 - 10	70
Constantes de temps	$\mu m - s$	$\mu m - s$
Densité ($Kg.m^{-3}$)	1000 - 2000	6000 - 8000

TAB. 1.1 – Comparaison des matériaux électroactifs : polymères et céramiques piézo-électriques

1.4.2.2 Quelques exemples d'application dans le domaine médical

A l'instar des céramiques, les polymères piézoélectriques commencent à être utilisés dans l'imagerie ultrasonore car ils présentent une impédance acoustique plus proche de celle de la peau que les céramiques massives [Rat92] [Jol94].

Ils sont aussi utilisés pour la conception de micro-pompes dédiées à la distribution et au dosage de médicaments. Ces micro-systèmes sont implantés directement sous la peau, dans une position adéquate. Ils présentent moins de risques d'infection que les dispositifs intraveineux qui sont implantés dans le corps. Leurs petites tailles et leurs facilités d'implantation confèrent un peu plus de confort aux patients. Ces micro-pompes ont pour principal avantage de pouvoir réguler les doses d'une substance en accord avec la thérapie et le rythme biologique du patient. Les problèmes à résoudre pour ces microsystèmes délivreurs de médicaments sont la biocompatibilité des matériaux, la fiabilité du dispositif et de la stabilité du médicament dans le réservoir.

Des études ont été menées sur des micro-pompes utilisant les céramiques massives piézoélectriques [Car95] [Acc00] ainsi que sur des micro-pompes à base de PVDF, car elles présentent l'avantage d'être plus petites.

Le prototype de micro-pompe, décrit dans [Xia06], est constitué d'un polymère piézoélectrique (poly(vinylidène fluoride-trifluoroéthylène)[P(VDF-TrFE)]) de $80 \mu m$ d'épaisseur et $2,2 \times 2,2 \text{ mm}^2$ de surface, d'une chambre de pompage de $83 \mu m$ de profondeur et de deux canaux de $2,3 \text{ mm}$ de long et en moyenne de $500 \mu m$ de large (FIG. 1.30). Le fonctionnement donnant le meilleur résultat a été

1. Etat de l'art des technologies utilisées pour l'assistance circulatoire et enjeu des matériaux électroactifs

obtenu avec une alimentation sinusoïdale et un champ électrique de 90 MV.m^{-1} , permettant ainsi une déflexion de $80 \mu\text{m}$ du polymère. Cette micro-pompe permet d'obtenir, avec du méthanol et à une fréquence d'alimentation de 63 Hz , des débits de l'ordre de $25 \mu\text{L.min}^{-1}$ pour des pressions de 350 Pa .

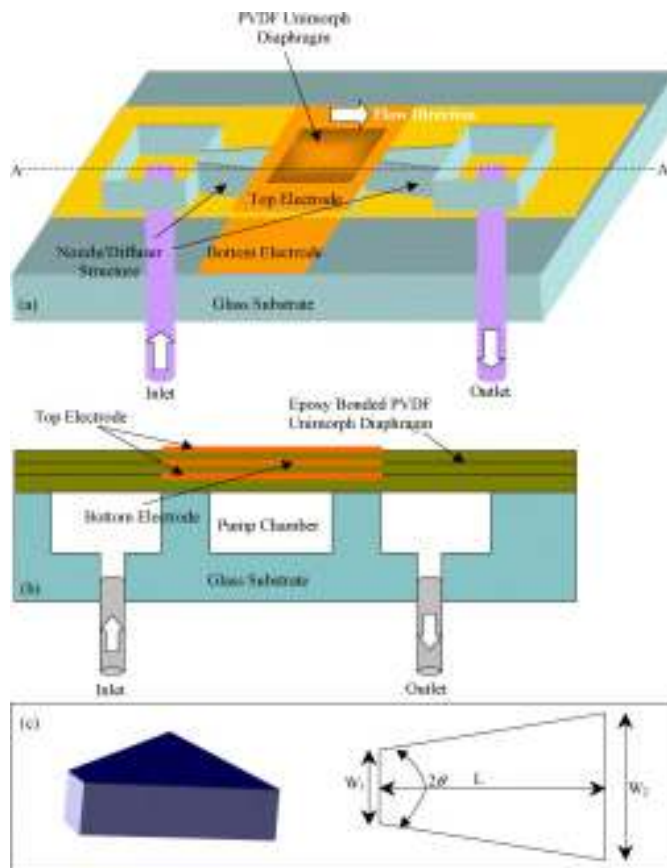


FIG. 1.30 – Principe de fonctionnement d'une micro-pompe utilisant les polymères piézoélectriques [Xia06]

Dans le domaine de l'assistance circulatoire, ces matériaux ne sont pas encore exploités. Pour mémoire, la pression systolique requise est de l'ordre de 120 mmHg (mm de mercure), soit $16\,000 \text{ Pa}$.

1.4.3 Les alliages à mémoire de forme

Les alliages à mémoire de forme sont des matériaux électroactifs, exploitant le couplage de type électro-thermo-élastique (AMF) ou magnéto-thermo-élastique (AMFM).

1.4.3.1 Propriétés des alliages à mémoire de forme

La dénomination d'alliage à "mémoire de forme" résulte de la capacité de certains matériaux, préalablement déformés à basse température, à retrouver par chauffage leur forme initiale [Hes99]. Cet effet se produit grâce à une transition cristalline solide-solide du matériau qui apparaît sur une certaine plage de température. En effet, le matériau est caractérisé par deux phases cristallines, l'une prédominante à haute température nommée "austénite", l'autre favorisée à basse température appelée "martensite". A l'origine, cette transformation est produite par une variation de température qui peut être due au passage d'un courant électrique dans le matériau (AMF), à l'application d'un champ magnétique (AMFM) ou à l'application d'une contrainte mécanique dans une gamme de température appropriée.

Le Figure 1.31 montre un cycle de transformations martensitiques - auténiques typiques. Celui-ci comporte plusieurs séquences qui peuvent être décrites de la manière suivante [Aba00] :

- Au départ, l'AMF est déformé à basse température (par le biais d'une masse suspendue à l'extrémité d'un fil par exemple).
- L'AMF est chauffé, par un courant électrique, et la température dépasse la température de début d'austénite, A_s . Il entre alors dans sa transformation austénite et commence à se contracter pour retrouver sa forme neutre.
- Une fois que la température atteint la valeur A_f (température de fin d'austénite), l'AMF a un allongement nul.
- Ensuite, si le courant électrique est coupé, l'AMF commence à se refroidir. Une fois la température de début de martensite M_s atteinte, il commence à s'allonger à nouveau (sous l'effet de la masse suspendue dans l'exemple considéré).
- Pour finir, l'AMF a atteint sa température de fin de martensite M_f , et retrouve alors sa position initiale avec un allongement maximum.

Dans certaines conditions les AMF peuvent être exploités en raison de leurs propriétés "superélastique" ou "pseudoélastique" [Gué96]. La Figure 1.32 illustre ces deux types de comportements.

La Figure 1.32(a) montre le comportement pseudoélastique. Dans ce cas, l'AMF est refroidi en dessous de sa température de martensite. Il est ici en position de repos sans allongement. Si l'échantillon est alors soumis à une contrainte mécanique, il subit une déformation importante dont une grande partie subsiste après suppression de la contrainte.

La Figure 1.32(b) explique le comportement superélastique. Ici l'AMF est à température constante au-dessus de la température de fin d'austénite A_f . Une

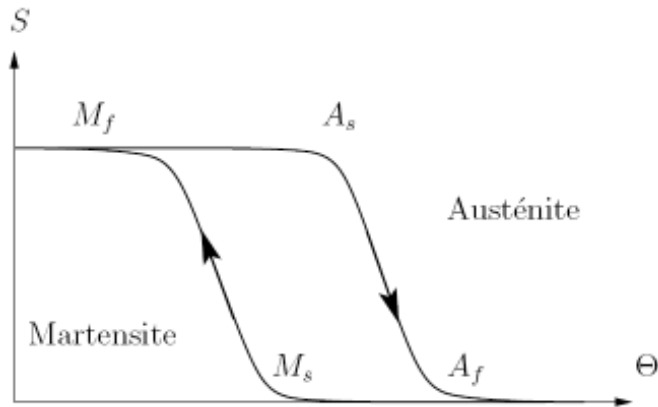


FIG. 1.31 – Evolution caractéristique de la déformation S en fonction de la température Θ d'un AMF précontraint.

contrainte croissante est appliquée et provoque une déformation élastique à l'austénite. Lorsque la contrainte dépasse une contrainte critique, il existe une déformation de transformation de phase (austénitique vers martensitique) due à l'apparition de martensite orientée auto-accommodante. Dans ce cas, la déformation devient plus importante dans le sens de la contrainte. Cette déformation disparaît lorsque la contrainte est supprimée. C'est l'effet superélastique.

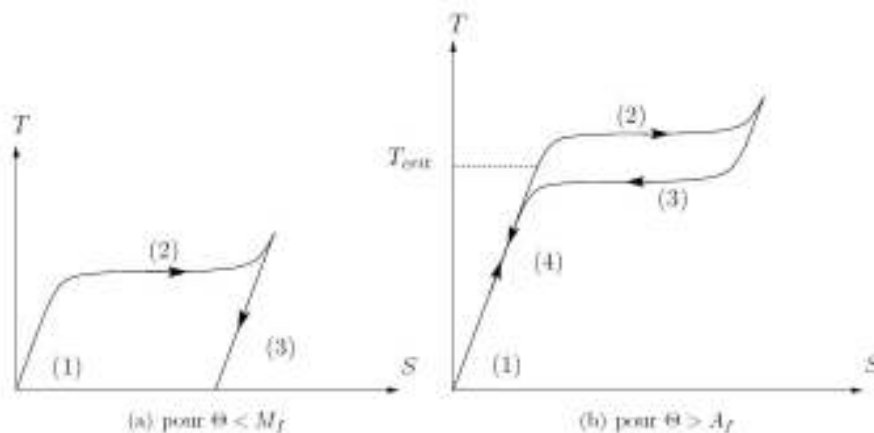


FIG. 1.32 – Courbe contrainte T /déformation S caractéristique du comportement pseudoélastique (a) et superélastique (b) [Vig05].

Actuellement, il existe de nombreux alliages à mémoire de forme. Les alliages de nickel-titane (proportion : 50%-50%) sont les plus utilisés. On trouve ensuite les alliages à base de cuivre et de fer, avec par exemple pour le cuivre $Cu Zn Al$ et pour le fer $Fe Mn Si (NiCr)$. Quelques éléments de comparaison entre les alliages nickel-titane et cuivre sont donnés dans le Tableau 1.2.

Les alliages à mémoires de forme existent sous différentes formes : rubans (section variant de $0,025 \times 0,05 \text{ mm}^2$ à $2 \times 10 \text{ mm}^2$), fils (diamètre variant entre

		<i>Ni Ti</i>	<i>Cu Zn Al</i>	<i>Cu Al Ni</i>
Masse volumique	kg/m^3	6500	7500	7500
Résistivité électrique	$10^{-8}\Omega.m$	60	8	12
Module d'élasticité en traction de l'austénite	GPa	90	70	70
Module d'élasticité en cisaillement de l'austénite	GPa	35	25	25
Limite de rupture	MPa	800 à 1000	300 à 600	400 à 700
Température maximale d'utilisation	$^{\circ}C$	300	130	250
Température de transformation M_s	$^{\circ}C$	-200 à 100	-200 à 80	60 à 200
Déformation maximale en traction	%	8	4 à 6	4 à 6
Conductivité thermique	$J/K.m.s$	10	120	75

TAB. 1.2 – Propriétés des principaux alliages à mémoire de forme [Vig05]

0,025 et 5 mm), des tubes et plus récemment des feuilles d'épaisseur 0,02 mm et de largeur 75-100 mm [Leb04].

Actuellement, l'une des applications les plus innovantes utilisant les alliages à mémoire de forme est le contrôle actif de voilure aéronautique, concept qui fait l'objet de recherches spécifiques au sein du groupe GREM3 [Duv05].

1.4.3.2 Quelques exemples dans le domaine médical

Les alliages à mémoire de forme sont très utilisés dans le domaine médical, aussi bien au niveau de l'instrumentation qu'au niveau des soins.

Dans l'instrumentation, ils servent, par exemple, à la conception de cathéter à un ou plusieurs degrés de liberté [Lee02] [Hag04], ou à la conception d'endoscope actif, comme par exemple en coloscopie [Rey99] [Iku88].

Dans la conception d'actionneur médical, ils ont permis la réalisation de valve artificielle pour l'urètre ou pour le remplacement d'un sphincter [Cho97] [Ama01].

Au niveau de l'assistance circulatoire, deux applications nous sont apparues très intéressantes.

La première est l'utilisation d'une armature AMF autour d'une valve aortique porcine, (FIG. 1.33). Ce système permet au chirurgien de plier la valve à basse température afin de la rendre la plus petite possible et ainsi l'introduire dans l'organisme par la voie fémorale pour l'amener jusqu'au coeur. Petit à petit, dans l'organisme la valve se réchauffe et retrouve sa forme initiale et peut ainsi jouer son rôle [Lam07].

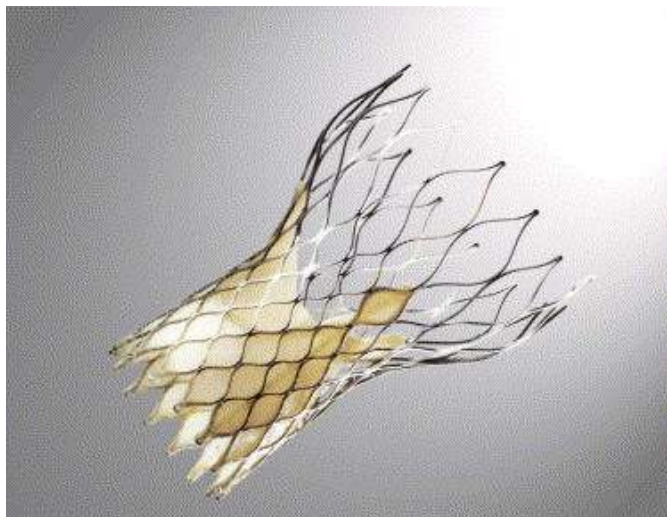


FIG. 1.33 – Valve porcine avec une structure en alliage à mémoire de forme [Leo06]

La deuxième application est l'utilisation des alliages à mémoire de forme pour créer un myocarde artificiel [Yam03b]. L'idée est d'associer à un ventricule un dispositif d'aide pour supporter la puissance de contraction d'un coeur. Les AMF présentent des performances très intéressantes pour cette application, mais le temps de réponse dans la phase de refroidissement reste trop long, pour être directement compatible avec le fonctionnement du coeur. Pour pallier cet inconvénient, les auteurs proposent d'associer les AMF avec des modules à effet Peltier.

Les éléments Peltier sont des semi-conducteurs qui, selon le sens du courant électrique qui les traverse, se réchauffent ou se refroidissent. Ainsi un ensemble AMF et éléments Peltier a été expérimenté pour actionner les ventricules d'un coeur. Un myocarde artificiel basé sur ce principe a été réalisé pour pallier une insuffisance ventriculaire droite.

Un modèle placé sur un coeur en plastique est illustré sur la Figure 1.34. Ce système a été testé sur une chèvre qui a survécu trois mois de plus à sa défaillance cardiaque.

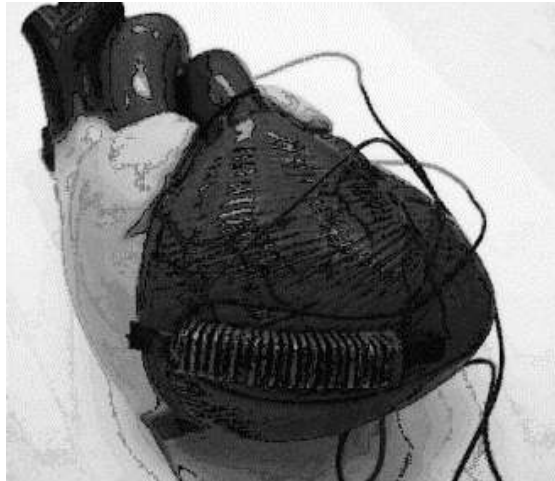


FIG. 1.34 – Myocarde artificiel utilisant les alliages à mémoire de forme et les éléments Peltier, posé sur une maquette de coeur en plastique [Yam03a]

1.4.4 Les fluides magnétorhéologiques

Les fluides magnétorhéologiques (MR) sont des matériaux électroactifs au sein desquels une transformation d'énergie s'opère par couplage magnéto-visco-élastique.

1.4.4.1 Propriétés des fluides magnétorhéologiques

Les fluides magnétorhéologiques ont été principalement développés et mis sur le marché par la compagnie Lord [Lor07].

Ils ont la possibilité de passer d'un état liquide à un état quasi-solide sous l'application d'un champ magnétique. Ils sont composés de particules ferromagnétiques ou ferrimagnétiques, de taille variant de 1 à 10 μm , en suspension dans un liquide aqueux ou organique. Le plus souvent, les particules utilisées sont des composites de céramique, de métal et d'alliage ferromagnétique qui possèdent des multidomaines magnétiques. La poudre de fer la plus couramment utilisée dans la préparation des fluides MR est obtenue par décomposition de pentacarbonyle de fer ($Fe(CO)_5$) [Gen02].

En l'absence de champ magnétique, les fluides MR possèdent une viscosité variant de 0.1 à 10 $Pa.s$ suivant le liquide utilisé et le pourcentage volumique de fer. Lors de l'application d'un champ magnétique, les particules de fer se magnétisent par petits domaines et se comportent comme de minuscules aimants. L'énergie magnétique d'interaction entre les particules est réduite lorsqu'elles s'alignent dans la direction du champ magnétique en minimisant l'entrefer, comme le montre la Figure 1.35. Dans ce cas, le fluide subit alors une augmentation considérable de sa résistance élastique statique. Plus le champ est intense, plus la résistance du fluide augmente.

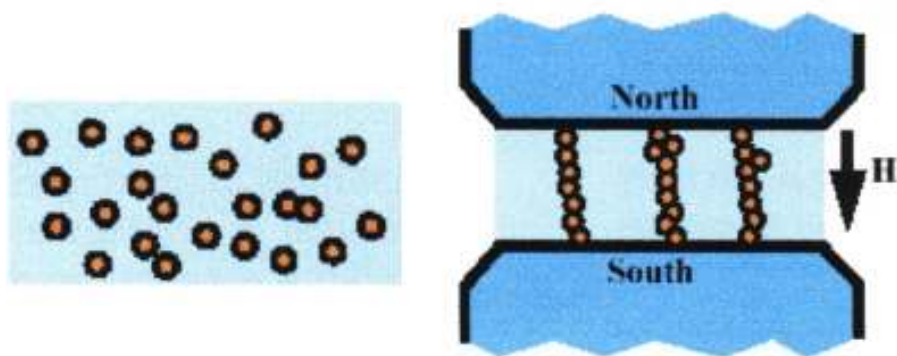


FIG. 1.35 – Schéma de principe d'un fluide magnétorhéologique sous l'action d'un champ magnétique

Les propriétés magnétiques et rhéologiques sont plus précisément étudiées dans le chapitre 2.

1.4.4.2 Quelques exemples dans le domaine médical

Les fluides magnétorhéologiques ont donné lieu à plusieurs applications telles que des systèmes de suspension active pour l'amortissement automobile [Yao02], ou encore des amortisseurs antisismiques [Ram99] [Jol99].

Ils sont aussi utilisés dans l'équipement de Fitness, en tant que frein, permettant ainsi à l'utilisateur de choisir la force de résistance qu'il désire [Won05].

Une application touchant directement au domaine médical est la prothèse inférieure de jambe, illustrée sur les Figures 1.36 à 1.38. Elle est constituée d'un amortisseur à base de fluide magnétorhéologique (FIG. 1.36). Grâce au FMR, cet amortisseur présente l'avantage d'avoir une dureté réglable en fonction des besoins [Car01].

Par rapport à un amortisseur hydraulique classique, l'huile est remplacée par un fluide magnétorhéologique et des bobines sont rajoutées au niveau du piston. Le réglage de la dureté de l'amortisseur se fait par réglage du courant circulant dans les bobinages. Plus le courant est important, plus le champ magnétique est intense et plus l'amortisseur est dur. Et inversement, s'il n'y a plus de courant, l'amortisseur fonctionne comme un amortisseur classique.

Pour adapter à chaque instant la prothèse au milieu extérieur, un microcontrôleur pilote la dureté de l'amortisseur grâce à des informations provenant de différents capteurs (force, angle, vitesse ...) comme illustré sur la Figure 1.37. Ainsi les personnes bénéficiant de cette prothèse peuvent facilement faire du vélo, monter des escaliers, porter des colis...

Sur le même principe que ces prothèses de jambe entière, des prothèses pour

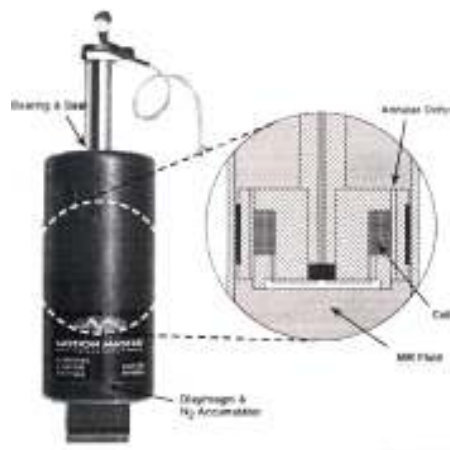


FIG. 1.36 – Amortisseur à base de fluide magnétorhéologique utilisé pour la prothèse entière de jambe [Car01].

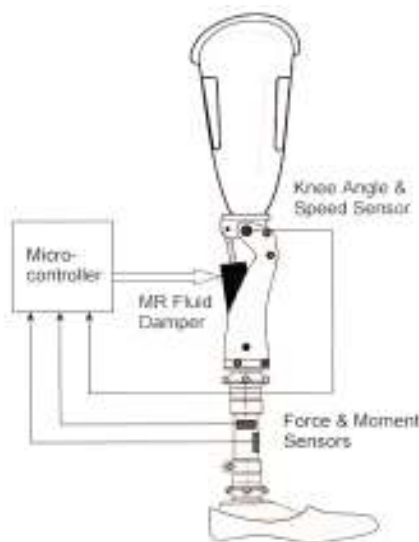


FIG. 1.37 – Schéma de fonctionnement de la prothèse [Car01]



FIG. 1.38 – Photo de la prothèse lors d'une descente d'escalier [Car01]

cheville ont été développées au Japon [Li06].

1.4.5 Les ferrofluides

1.4.5.1 Principe

Les ferrofluides sont des suspensions de particules ferromagnétiques d'une taille de l'ordre de 10 nm dans un liquide, en général un solvant ou de l'eau. Ils sont généralement composés de nanoparticules de magnétite ou d'hématite et comprennent souvent des ions Fer II (Fe^{2+}) ou Fer III (Fe^{3+}).

Pour éviter leur agglomération, engendrée par les forces magnétiques et les

forces de van der Waals, deux solutions sont possibles. La première est de recourir à des longues chaînes carbonées qui sont attachées aux petites particules métalliques, et évitent le contact entre elles (solvant organique : colloïdes surfactés). La deuxième solution est de fixer des charges autour des particules et ainsi elles se repoussent entre elles et évitent l'agglomération (solvant polaire : colloïdes ioniques) [Bou07].

Contrairement aux fluides magnétorhéologiques, les ferrofluides ne passent pas d'un état liquide à un état quasi-solide et sont caractérisés d'un point de vue rhéologique par une viscosité assez faible qui dépend essentiellement du solvant utilisé.

1.4.5.2 Applications dans le domaine médical

Actuellement les ferrofluides ne sont pas beaucoup exploités, ils sont généralement utilisés dans la conception de micro-pompes [Har04].

Dans le domaine médical, une équipe japonaise a décrit un concept original de mécanisme utilisant les propriétés des matériaux ferrofluides pour réaliser l'étanchéité de l'axe de rotation d'une pompe rotative [Mit96] [Mit00].

En effet, les systèmes mécaniques qui permettent de séparer le sang de l'axe de rotation, constituent un facteur limitant la durabilité et l'innocuité des pompes rotatives équipant les prothèses cardiaques. Plusieurs systèmes ont été proposés pour résoudre ce problème, comme par exemple l'injection de sérum physiologique dans la pompe axiale Impella [Nix01].

Ici, ce sont les ferrofluides qui ont été choisis pour réaliser l'étanchéité de l'axe de rotation, (FIG. 1.39).

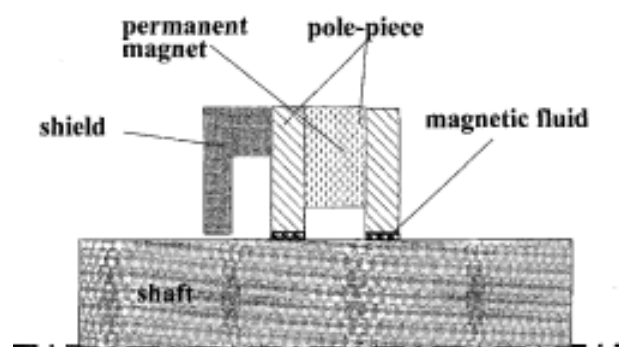


FIG. 1.39 – Schéma du système d'étanchéité par ferrofluide [Sek01]

Un aimant permanent placé entre deux pièces polaires permet de confiner le ferrofluide dans la zone souhaitée. Les aimants utilisés sont généralement de type terre rare avec une polarisation permanente de 1,2T et un champ coercitif de 935 kA.m⁻¹. Le ferrofluide est situé entre l'axe de rotation du moteur et les pièces

polaires. Afin d'éviter que le ferrofluide ne passe dans le sang, l'aimant est isolé par une protection qui délimite une cavité de 5 mm de diamètre et de 1 mm de profondeur. Cette cavité est remplie d'huile visqueuse.

Ainsi, même si une infime partie de ferrofluide s'échappe de l'entrefer, il se mélange à l'huile et ne rentre pas en contact avec le sang.

Ce type de système est utilisé dans une pompe axiale, « Valvo pump », implantée directement au niveau de la valve aortique [Mit99].

1.4.6 Les fluides électrorhéologiques

Dans le cas des fluides électrorhéologiques (ER), c'est le couplage électro-visco-élastique qui est exploité. En fait, un fluide électrorhéologique est une suspension colloïdale constituée de microsphères voire de nano-particules dispersées dans un liquide non conducteur. Sous l'action d'un champ électrique, il peut passer de l'état liquide à l'état solide en un temps très court (< 10 ms). Et inversement, en supprimant le champ, il retrouve son état initial [Bul99].

Lors de l'application du champ, celui-ci provoque la polarisation des particules qui s'attirent mutuellement et forment ainsi une chaîne dans l'axe du champ électrique (FIG. 1.40).

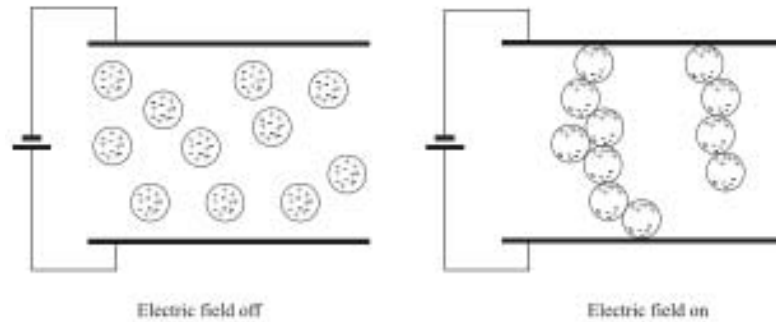


FIG. 1.40 – Schéma de principe d'un fluide électrorhéologique [Cho00]

Les forces s'exerçant entre les particules sont suffisamment intenses pour bloquer le liquide et ainsi le rendre "quasi-solide". Pour obtenir cet effet, la gamme de champ utilisée est de l'ordre de $0,5$ à 5 MV.m^{-1} .

Il existe plusieurs types de fluide ER, selon la nature du liquide isolant utilisé. Formé d'un seul liquide comme l'huile, un premier type correspond aux fluides ER homogènes, par opposition aux fluides ER hétérogènes auxquels a été rajouté un autre liquide, comme par exemple du polymère de cristal liquide.

Il existe aussi les fluides ER aqueux dans lesquels a été rajouté un peu d'eau, par opposition aux fluides anhydres où aucun résidu d'eau n'est détecté [Hao01].

En règle générale, les fluides ER sont formés de trois composants. Le premier est appelé matériau ER, il correspond aux fines particules solides ou liquides qui

composent le fluide. La fraction volumique de ces particules est comprise entre 0,05 et 0,5 pour des particules variant de $0,04 \mu m$ à $100 \mu m$ de diamètre.

Le second composant est le fluide support qui est généralement de l'huile. Il faut principalement un fluide non conducteur ayant une faible viscosité (inférieure à $10 Pa.s$), une grande tension de claquage (supérieure à $8 MV/m$) et une densité volumique relativement élevée (de l'ordre de $1100 Kg.m^{-3}$)

Le dernier composant est l'activateur polaire, le plus fréquemment utilisé étant l'eau. Mais celle-ci pose certains problèmes car, à haute température, elle s'évapore et modifie la composition du fluide et donc change ses propriétés. Après l'eau, on utilise également des acides, des agents alcalins, salins et tensioactifs. L'activateur polaire doit représenter entre 5 et 10 % de la masse du liquide support.

Dans le domaine médical, ces matériaux ne sont pas encore exploités.

1.5 Comparaison des différentes technologies en présence

Dans la section 1.4 nous avons vu la diversité des matériaux actifs disponibles. Cette diversité offre, à priori, une certaine liberté pour imaginer des systèmes innovants. Pour faciliter le choix d'un matériau actif, en vue de la conception d'un actionneur, il y a plusieurs critères à prendre en compte comme par exemple les caractéristiques mécaniques et électriques.

Le Tableau 1.3 présente une synthèse des propriétés des matériaux électroactifs. Il compare notamment les performances des matériaux actifs avec celles des muscles biologiques ou encore avec le coeur humain [Mad04] [Kor98] [Hun92].

Les caractéristiques à considérer sont les suivantes :

- Déformation : déplacement normalisé par rapport à la taille de l'actionneur dans la direction de l'actionnement.
- Contrainte : force par unité de surface développée par le matériau dans la direction de l'actionnement.
- Densité d'énergie : correspond au travail mécanique par unité de volume généré au cours d'un cycle de fonctionnement.
- Puissance massique : puissance fournie par unité de masse de l'actionneur.
- Vitesse de déformation : vitesse spécifique des déformations obtenues en régime harmonique.
- Module élastique : (module de Young) rigidité du matériau, lors d'une déformation réversible sous l'action d'une contrainte.
- Rendement : rapport du travail fourni à l'énergie consommée.
- Coefficient de couplage électromécanique : part de l'énergie consommée qui est effectivement convertie (en énergie électrique ou mécanique)

		Déformation	Effort	Densité d'énergie	Puissance massique	Vitesse de déformation	Module élastique	Rendement	Couplage électromécanique	Densité	Champ électrique
		%	MPa	kJ/m^3	W/kg	%/s	MPa	%	%	kg/m^3	MV/m
Muscle naturel	Squelette humain	20-40	0.35	40-80	50-200	500	10-60	40	-	1037	-
	Coeur humain	>40	0,1	40-80	>100	400	50	>35	-	1037	-
Polymères électroactifs	Elastomère diélectrique	100-200	1-7	34-100	750-3400	3000	0,1-10	60-90	54	960	125-412
	Conducteur ionique IPMC	0,5-3,3	0,9	3-6	$0,8 \cdot 10^{-3}$ - $4 \cdot 10^{-3}$	3,3	50-100	1,5-3	3	2100	0.05
	Polymère piézo-électrique :										
	PVDF	0,1	5	2,4	1,3	1000	450	60-90	<10	2000	150
	PVDF-TrFE	5	5-15	300	-	4000	400	60-90	<10	2000	150
Matériaux non polymères	Matériau piézo-électrique :										
	PZT	0,2	50-110	100	60000	500	100000	60-90	60-75	7700	1-5
	PZN-PT	1,7	130	1000	-	1000	10000	>90	80	7700	-
	Alliage à mémoire de forme (NiTi)	8	>200	1000-2000	50000	300	83000	<10	5	6500	-
	Matériau magnétostrictif Terfenol-D	0,24	28-70	25	76000	2000	35000	60-80	75	9200	2 ^(a)

^(a) excitation magnétique en kA/m

TAB. 1.3 – Comparaison des principaux types de matériaux actifs [Vig05]

1.6 Conclusion

Au cours de ce chapitre, une brève présentation des principaux coeurs artificiels totaux et assistances circulatoires a été proposée. Cette étude a permis de mettre en avant les avantages et les faiblesses des deux principales familles de pompes, volumétriques ou rotatives.

Les principales faiblesses des pompes volumétriques, notamment électriques, sont leur fiabilité souvent limitée du fait de certains éléments mécaniques (axes, pivots, roulements ...) et leur encombrement encore important.

Les pompes rotatives ont l'avantage d'être moins volumineuses, mais posent le problème du contact des éléments mécaniques avec le sang susceptible d'entraîner des problèmes majeurs de biocompatibilité. De plus, les conséquences physiologiques d'un débit continu sur de longues périodes restent encore à préciser dans le cadre d'études médicales spécifiques.

Pour pallier ces problèmes, une nouvelle voie d'investigation peut être l'utilisation des matériaux électroactifs pour donner lieu à de nouveaux concepts de prothèse.

L'état de l'art des matériaux disponibles à ce jour et l'analyse des applications dans le domaine médical ont permis de mettre en évidence leurs intérêts potentiels face à la problématique envisagée.

Les différents matériaux peuvent être classés selon le type d'énergie utilisée pour contrôler leur transformation, faisant apparaître ainsi trois filières technologiques distinctes.

Une première famille englobe ainsi tous les matériaux utilisant un champ électrique pour créer une déformation. Dans cette catégorie les céramiques piézo-électriques, les polymères et co-polymères électroactifs (PVDF, PVDF-TrFE) ont été détaillés. Si les céramiques PZT se caractérisent notamment par des performances attractives en termes de puissances spécifiques, les déplacements exploitables, d'amplitudes submillimétriques, sont incompatibles avec les taux de déformation requis par une fonction ventriculaire. Les progrès accomplis dans le domaine des polymères piézoélectriques ou électrostrictifs semblent quant à eux prometteurs, bien que les efforts disponibles soient encore relativement faibles.

Les matériaux thermo-actifs principalement décrits sont les alliages à mémoire de forme (AMF de type $NiTi$). Ils ont la capacité de se contracter à des températures élevées, puis de revenir à un état pré-déformé (sous l'action d'une contrainte) lors de leur refroidissement. L'avantage de ces matériaux est de générer des déformations et des efforts importants, mais à des vitesses de déformation relativement faibles.

Les matériaux magnéto-actifs et notamment les fluides magnétorhéologiques, possèdent la capacité de moduler leurs propriétés rhéologiques sous l'action d'un champ extérieur. Ces matériaux ont l'avantage d'être, par principe, très

déformables et surtout contrôlables à distance grâce à une source de champ magnétique disposée de manière appropriée.

Les nombreuses applications médicales de ces matériaux actifs opérationnels ou à l'étude laissent entrevoir les possibilités de renouveau qu'ils peuvent amener. Le domaine de l'assistance circulatoire, les dispositifs de coeurs artificiels totaux ou les systèmes de circulation extracorporelle utilisent des technologies classiques (actionneurs électromagnétiques ou pneumatiques). Ces technologies ont bénéficié de longues années de mise au point et d'optimisation, elles n'en demeurent pas moins limitées face aux fonctions ciblées dans le domaine cardiaque, notamment du point de vue de leur encombrement et de leur consommation énergétique. Aussi la mise au point de prothèses totalement implantables et véritablement exploitables sur le long terme, nécessite un effort d'innovation important face auquel les matériaux électroactifs, et notamment les fluides, constituent une voie d'investigation qu'il s'agit de creuser plus profondément.

Chapitre 2

Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

Sommaire

2.1	Introduction	49
2.2	Présentation du système proposé	49
2.2.1	Le concept PULSAMAG	49
2.2.2	Pré-dimensionnement de l'actionneur	52
2.3	Considérations sur les efforts développés au sein de la pompe	53
2.3.1	Rappel sur le Tenseur de Maxwell	53
2.3.1.1	Lignes de champ normales à l'élément de surface	54
2.3.1.2	Lignes de champ tangentielles à l'élément de surface	55
2.3.1.3	Lignes de champ obliques de 45° à l'élément de surface	56
2.3.2	Résultats de simulation	57
2.3.2.1	Caractéristiques des fluides magnétorhéologiques	57
2.3.2.2	Déplacement de la capsule	62
2.3.2.2.1	Capsule "occlusive"	62
2.3.2.2.2	Capsule "ouverte"	64
2.3.2.3	Déformation de la capsule	66
2.3.2.3.1	Allongement de la capsule	66
2.3.2.3.2	Retour à sa forme initiale	70
2.4	Etude d'un premier démonstrateur	73

2. *Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques*

2.4.1	Description du démonstrateur	74
2.4.2	Simulation	75
2.4.3	Réalisation du démonstrateur et résultats obtenus . . .	76
2.4.3.1	Résultats sans valve anti-retour	77
2.4.3.2	Résultats avec valve anti-retour	79
2.5	Conclusion	80

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, il a été vu qu’au cours de ces dernières décennies, de nombreux progrès ont été réalisés dans le domaine de l’assistance circulatoire. Malheureusement, les nouveaux systèmes se heurtent encore à de nombreuses difficultés : fiabilité, encombrement, éléments mécaniques en contact avec le sang, débit continu, efficacité insuffisante...

Aujourd’hui, l’idée directrice de la recherche entreprise dans ce domaine est de concevoir des pompes dont l’encombrement volumique est le plus petit possible, tout en respectant un débit pulsé compatible avec la physiologie humaine. Dans cette optique, une nouvelle structure de pompe basée notamment sur le “morphing” électroactif d’un corps déformable et exploitant les fluides magnétorhéologiques a été mise à l’étude au laboratoire. Les fluides magnétorhéologiques présentent des propriétés intéressantes car ils sont par principe, très déformables et contrôlables à distance grâce à un champ magnétique extérieur.

Au cours de ce chapitre, nous décrirons d’abord le type de système de pompe préconisé et les résultats de l’étude de faisabilité du concept proposé. Ensuite, nous détaillerons les simulations numériques par éléments finis qui ont permis d’aboutir à une première structure simplifiée de notre actionneur ainsi que sa caractérisation en termes de pression et de débit.

Les travaux présentés dans ce chapitre s’inscrivent dans une collaboration établie depuis plusieurs années, entre les chirurgiens du service de Chirurgie Cardio-Vasculaire et Thoracique de l’hôpital de la Pitié-Salpêtrière à Paris, et les chercheurs du Groupe de Recherche en Electrodynamique - GREM3 - du laboratoire LAPLACE.

2.2 Présentation du système proposé

2.2.1 Le concept PULSAMAG

Le but de notre recherche n’est pas d’améliorer un système de pompe existant mais d’élaborer un nouveau concept susceptible de concourir à l’élaboration de pratiques chirurgicales moins invasives. Le cahier des charges est de développer un actionneur capable d’assurer un débit pulsé physiologique dont le but à long terme est d’être implanté directement dans l’aorte. De plus, dans un souci de miniaturisation et afin de supprimer certains problèmes inhérents aux prothèses valvulaires, il est apparu souhaitable de chercher à intégrer la fonction «valve» à la fonction «pompe».

Dans cette optique, les fluides magnétorhéologiques (FMR), de plus en plus utilisés dans le domaine biomédical, sont intéressants car ils présentent deux avantages : ils sont par principe très déformables, et d’autre part contrôlables à

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

l'aide d'une source magnétique distante.

Aussi, le concept d'actionneur préconisé dans le cadre de notre étude peut-être défini comme un « conformateur - translateur » dont le principe de fonctionnement est schématisé sur la Figure 2.1.

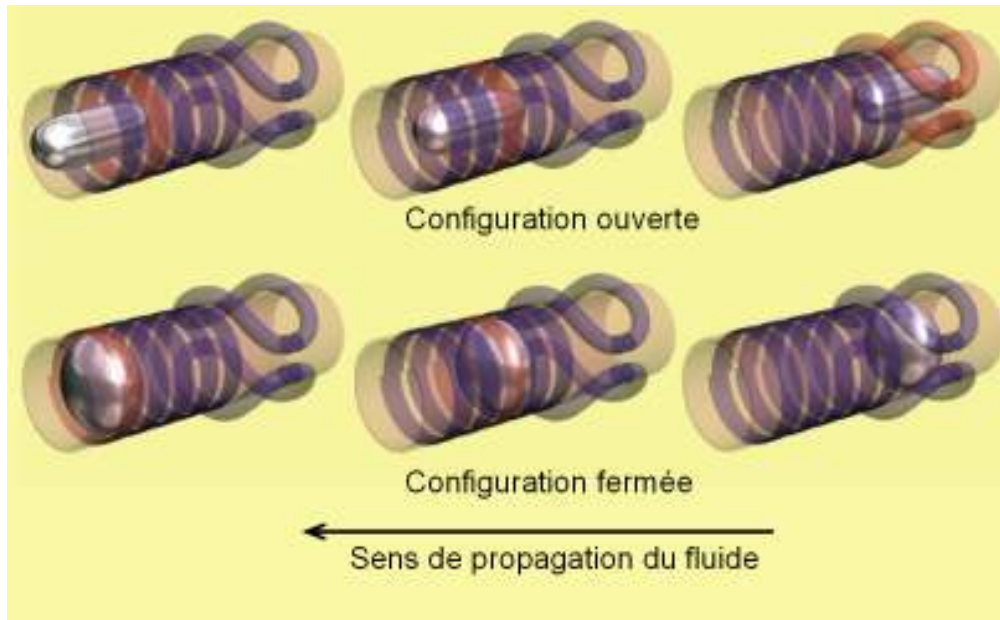


FIG. 2.1 – Principe de fonctionnement de la pompe

L'élément central de la pompe est une capsule souple, à base de silicone, remplie de fluide magnétorhéologique, dont la forme et la position sont contrôlables à distance grâce à des bobines extérieures.

Dans une première configuration, la capsule a la forme d'un disque qui obture toute la lumière du vaisseau. Elle peut, dans ce cas, être envisagée comme une valve en position fermée. Grâce à des bobines placées le long du parcours, un champ magnétique extérieur peut produire la translation de la valve, générant ainsi une pression sur le liquide, ici le sang, et aboutissant à sa mise en mouvement. Une fois que la capsule est arrivée à sa position finale, le champ magnétique est modifié afin de lui donner la forme d'un tube allongé.

Dans cette seconde configuration, la capsule oppose le moins de résistance possible au fluide. Elle peut être comparée à une valve en position ouverte. Dès lors à l'aide d'un champ magnétique extérieur, elle pourra être ramenée à sa position de départ en minimisant les interactions avec le sang. Le champ magnétique est alors modifié, pour redonner à la capsule la forme d'un disque, avant de recommencer un nouveau cycle.

Le grand avantage de ce système électromagnétique est de séparer la partie mobile de la partie fixe lors de l'assemblage final, de sorte que la valve active

puisse être implantée indépendamment du stator.

Comme cet élément mobile est déformable, il peut être conçu pour être implantable dans l'aorte par voie périphérique. Ceci présenterait le grand avantage que l'implantation n'exigerait plus l'utilisation d'un circuit de circulation extracorporelle et diminuerait ainsi les risques pour le patient.

Un autre aspect intéressant de ce système est qu'il n'y ait aucune pièce du dispositif où la stagnation du sang peut se produire. Ainsi, le risque de formation de caillot plaquettaire est considérablement réduit [Vig05].

Un système proche a été développé en 1961 par S.D Moulopoulos et Wilhelm Kolff [DeB97]. Le système développé est un dispositif de contre pulsation au moyen d'un ballon placé dans l'aorte. La Figure 2.2 montre le placement et l'utilisation du dispositif de pompage par ballon intra-aortique.

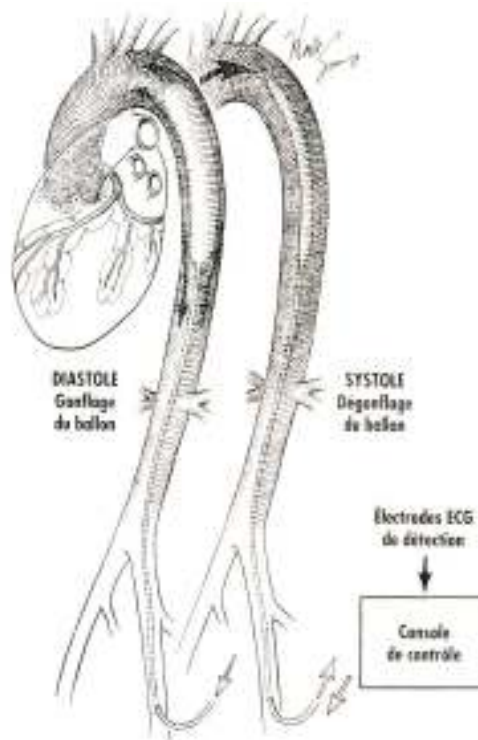


FIG. 2.2 – Utilisation de la pompe d'assistance cardiaque par ballon intra-aortique [DeB97].

Le ballon, placé dans l'aorte, est alternativement gonflé et dégonflé. La "contraction" du ballon s'opère pendant la systole et diminue la résistance contre laquelle le coeur doit lutter pour vider son contenu. Lors de la diastole le ballon est gonflé, ce qui produit un déplacement vers l'avant du sang expulsé du coeur pendant la systole. Le gonflage du ballon conduit en outre, à une augmentation de la pression diastolique dans le système circulatoire, notamment dans l'aorte

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

ascendante proximale, entraînant une augmentation du flux sanguin vers le cerveau, les artères coronaires et les reins. Ce dispositif a l'avantage de réduire la charge de travail ventriculaire et d'augmenter l'apport en oxygène au coeur. De plus, il est associé à une technique d'insertion relativement simple et qui comporte peu de risque pour le patient. L'utilisation de ce ballonnet ne sert que quelques jours ou au maximum quelques semaines. Par contre, l'un des inconvénients majeurs est qu'il n'augmente pas le débit cardiaque de façon spectaculaire.

Notre concept basé sur l'utilisation d'une capsule remplie de fluide magnétorhéologique apportera les mêmes avantages que ce système mais permettra grâce au déplacement du ballonnet une augmentation du débit cardiaque, ainsi qu'une utilisation plus prolongée.

2.2.2 Pré-dimensionnement de l'actionneur

Pour engendrer le moins d'incidents possibles au sein de l'organisme, nous voulons réaliser une pompe dont les caractéristiques sont proches de la physiologie humaine c'est à dire un débit pulsé de l'ordre de $4 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$ sous une pression moyenne de 100 mmHg ($13\,332 \text{ Pa}$).

Comme il est envisagé à long terme que la capsule soit implantable directement dans l'aorte par voie périphérique, elle doit être à priori capable d'évoluer au sein d'un conduit de 20 mm de diamètre (diamètre moyen aortique).

Au vu des dimensions du vaisseau, il paraît raisonnable d'envisager une capsule (en situation fermée) de 18 mm de diamètre extérieur et de 7 mm d'épaisseur. En prenant de telles dimensions, la force magnétique globale qui doit être appliquée sur la capsule, pour créer une pression de 100 mmHg peut être facilement calculée :

$$F = P.S = 3.4 \text{ N} \quad (2.1)$$

Avec :

P : Pression en Pa .

S : Section de la capsule en m^2 .

Cette valeur de force paraît raisonnable et envisageable dans la conception d'un actionneur implantable. Il reste cependant à déterminer la course de la capsule dans le conduit pour assurer un débit pulsé de $4 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$ à une fréquence proche de la fréquence cardiaque (3 Hz) :

$$L = \frac{Q}{S \cdot F} = 8,7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \quad (2.2)$$

Avec :

L : Course de la capsule dans le tuyau en m .

Q : Débit en $m^3.s^{-1}$.

S : Section de la capsule en m^2 .

F : Fréquence mécanique de la capsule Hz .

Une course de 8,7 cm semble acceptable d'un point de vue biologique si notre actionneur est implanté dans l'aorte descendante.

Après ce cours pré-dimensionnement, nous allons faire appel au tenseur de Maxwell pour appréhender qualitativement les liens entre l'orientation des lignes de champ magnétique autour d'un corps et les forces magnétiques qui s'y exercent.

2.3 Considérations sur les efforts développés au sein de la pompe

2.3.1 Rappel sur le Tenseur de Maxwell

L'idée de Maxwell est de décrire les forces transmises par un champ magnétique de la même façon que le seraient les forces développées dans un milieu continu. Ce qui revient à considérer le champ électromagnétique comme un objet matériel contenant de l'énergie et de la quantité de mouvement [Nog05]. De ce fait, les forces transmises par le champ magnétique peuvent être décrites par un tenseur analogue à celui utilisé en mécanique des milieux continus.

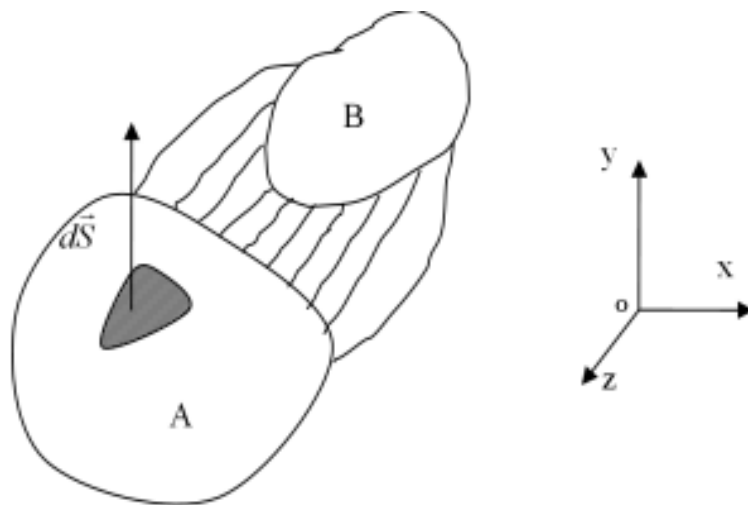


FIG. 2.3 – Schématisation des forces s'exerçant entre 2 corps magnétiques A et B à l'aide d'une surface entourant le corps A (d'éléments dS).

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

Le principe d'utilisation du tenseur de Maxwell pour calculer les forces exercées entre 2 corps magnétiques A et B à l'aide d'une surface enveloppant le corps A d'élément dS est illustré sur la Figure 2.3.

Considérons à titre d'exemple la force exercée sur un élément de surface dS (arbitrairement orienté selon Oy) pour différentes configurations du champ dans le cas de lignes :

- Normales à la surface (selon Y).
- Tangentielles à la surface (selon X).
- Obliques à 45° par rapport à la surface (dans le plan XY).
- Dans le cas général.

Avec le tenseur de Maxwell, exprimé en notation indicielle, la force élémentaire dF s'exerçant sur l'élément de surface dS est donnée par :

$$dF_i = T_{ik} \cdot dS_k \quad (\text{en N}) \quad (2.3)$$

Avec :

$$T_{ik} = \left[\frac{1}{\mu_0} \cdot B_i \cdot B_k - \frac{1}{2 \cdot \mu_0} \cdot \delta_{ik} \cdot B_0^2 \right] \quad \text{en N.m}^{-2} \quad (2.4)$$

Avec : δ_{ik} : symbole de Kronecker $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$ sinon $\delta_{ik} = 0$

2.3.1.1 Lignes de champ normales à l'élément de surface

Dans ce premier cas, les lignes de champ sont normales à l'élément de surface, c'est à dire que le champ B est orienté suivant Oy.

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Le tenseur T_{ik} est de la forme suivante :

$$\mathbf{T}_{ik} = \begin{pmatrix} -\frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La force élémentaire ainsi obtenue est donnée par :

$$\mathbf{dF} = \begin{pmatrix} T_{12}dS_2 = 0 \\ T_{22}dS_2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}dS \\ T_{32}dS_2 = 0 \end{pmatrix} = \frac{B_0^2 dS}{2\mu_0} e_y \quad \text{en } N \quad (2.7)$$

En conclusion, lorsque les lignes de champ sont normales à l'élément de surface, la force élémentaire obtenue est normale à l'élément de surface et dirigée dans le même sens que dS . La force est "attractive".

2.3.1.2 Lignes de champ tangentielles à l'élément de surface

Le champ est ici tangentiel à l'élément de surface, c'est à dire que \vec{B} est orienté selon Ox.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Le tenseur s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{T}_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La force élémentaire, ainsi obtenue, est donnée par :

$$\mathbf{dF} = \begin{pmatrix} T_{12}dS_2 = 0 \\ T_{22}dS_2 = -\frac{B_0^2}{2\mu_0}dS \\ T_{32}dS_2 = 0 \end{pmatrix} = -\frac{B_0^2 dS}{2\mu_0} e_y \quad \text{en } N \quad (2.10)$$

Avec des lignes de champ tangentielles à l'élément de surface, on obtient donc une force normale, comme dans le cas précédent, mais dirigée dans le sens opposé à dS . La force est dans ce cas "répulsive".

2.3.1.3 Lignes de champ obliques de 45° à l'élément de surface

Dans ce dernier cas, considérons un champ oblique faisant un angle de 45° avec l'élément de surface. Le champ \vec{B} se présente sous la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_0/\sqrt{2} \\ B_0/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Le tenseur s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{T}_{\mathbf{ik}} = \begin{pmatrix} \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} & \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 \\ \frac{B_0^2}{2\mu_0} & \frac{B_0^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

soit

$$\mathbf{T}_{\mathbf{ik}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 \\ \frac{B_0^2}{2\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La force élémentaire s'écrit alors :

$$\mathbf{dF} = \begin{pmatrix} T_{12}dS_2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0}dS \\ T_{22}dS_2 = 0 \\ T_{32}dS_2 = 0 \end{pmatrix} = \frac{B_0^2 dS}{2\mu_0} e_x \quad \text{en } N \quad (2.14)$$

En conclusion, avec des lignes de champ obliques à 45° par rapport à l'élément de surface, la force obtenue est tangentielle à l'élément et dirigée suivant Ox.

Le tenseur de Maxwell permet de définir l'intensité et l'orientation des forces générées par des lignes de champ magnétiques d'orientations différentes. La perméabilité qui intervient dans la formulation correspond à celle du milieu au sein duquel passe la surface entourant le corps (ici la perméabilité de l'air).

Cas général :

Dans le cas général et pour un milieu magnétique non saturé, les composantes tangentielles et normales sont données par [Dur68] [Nog05] :

$$F_t = B_n \cdot H_t \quad (2.15)$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left(\frac{B_n^2}{\mu_0} - \mu_0 H_t^2 \right) \quad (2.16)$$

Après ce court rappel sur le tenseur de Maxwell, la faisabilité du système proposé est analysée en réalisant des simulations numériques par éléments finis.

2.3.2 Résultats de simulation

Avant de réaliser les simulations, il s'agit de caractériser les fluides magnétorhéologiques, pour connaître notamment certains paramètres clés tels que la perméabilité relative, la densité, la viscosité et ainsi réaliser des calculs relativement précis.

Les simulations numériques par éléments finis ont été réalisées avec le logiciel ANSYS Multiphysics [Ans07].

L'actionneur exploite deux types de mouvements : la déformation de la capsule et sa translation dans le conduit, ces problèmes ont été traités séparément.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux forces mises en jeu lors du déplacement de la capsule dans le conduit.

Puis, dans un second temps, l'orientation des lignes de champ à obtenir, pour déformer correctement la capsule a fait l'objet d'une étude spécifique.

2.3.2.1 Caractéristiques des fluides magnétorhéologiques

Trois paramètres sont apparus intéressants à connaître : la perméabilité magnétique relative, la viscosité et la densité.

- **Perméabilité magnétique relative**

La caractéristique essentielle est la perméabilité magnétique du fluide magnétorhéologique. La théorie de Maxwell-Garnett [MG04] permet d'établir une relation entre la perméabilité du mélange (μ), celle d'une particule de fer (μ_p) et le pourcentage volumique de particules de fer dans le mélange. Pour des particules sphériques, cette théorie aboutit à la relation suivante :

$$\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} = \phi \frac{\mu_p - 1}{\mu_p + 2} \quad (2.17)$$

soit :

$$\mu_r = \frac{2\phi(\mu_p - 1) + \mu_p + 2}{-\phi(\mu_p - 1) + \mu_p + 2} \quad (2.18)$$

Avec :

μ_r : Perméabilité relative du milieu (huile + particule de fer)

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

μ_p : Perméabilité relative d'une particule

ϕ : Pourcentage volumique des particules de fer dans le mélange.

Des mesures ont été réalisées au laboratoire ([Del02], [Ben03]), à l'aide d'un hystérésigraphe Walker Scientific (AMH20) [Wal07], avec des échantillons toriques de fluide magnétorhéologique contenant une concentration croissante de fer .

Le Tableau 2.1 montre l'évolution de la perméabilité magnétique relative calculée avec la relation de Maxwell-Garnett et les mesures réalisées avec l'hystérésigraphe en fonction du pourcentage volumique de fer.

Solution de fluide magnétorhéologique (% volumique de particules de fer)	10 %	20 %	30 %	40 %
Perméabilité magnétique relative calculée avec Maxwell-Garnett	1.33	1.75	2.28	2.99
Perméabilité magnétique relative mesurée	1.9	2.7	3.4	4.25

TAB. 2.1 – Comparaison des perméabilités magnétiques relatives calculées par la loi de Maxwell-Garnett et mesurées à l'hystérésigraphe

On vérifie que la théorie utilisée conduit à des valeurs relativement proches de celles obtenues de manière expérimentale.

La Figure 2.4 représente l'évolution de la perméabilité relative du fluide qui est assimilable à une droite d'équation $\mu = k.C + 1$ où k est la pente de la droite et vaut 0.59, C désignant la concentration volumique de fer. Ces résultats restent identiques quel que soit le temps d'exposition au champ magnétique. Le temps nécessaire aux particules pour s'aligner est très court, inférieur à 50 ms. De plus, à champ constant, si la solution n'est pas agitée entre 2 mesures, les particules de fer ne sont plus réparties de manière homogène et la perméabilité relevée à la mesure suivante est plus élevée.

Par la suite, toutes les simulations ont été réalisées avec un fluide magnétorhéologique contenant 20% de particules de fer. La perméabilité relative correspondante à cette solution est de 2,7.

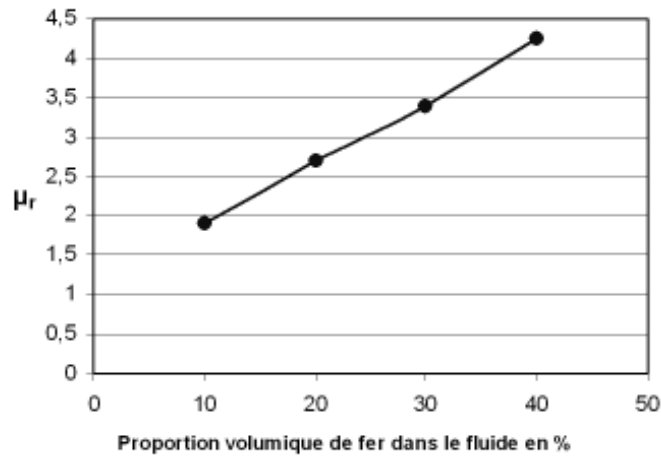


FIG. 2.4 – Evolution de la perméabilité magnétique relative du fluide magnétorhéologique en fonction de la proportion volumique de fer mesurée à l’hystérésigraphe.

- **Viscosité :**

Lors de l’application d’un champ magnétique, les particules du fluide magnétorhéologique s’organisent en chaînes. Cette organisation induit une augmentation de la viscosité relative du fluide.

Cette augmentation de la viscosité relative du fluide le fait passer d’un état liquide à un état solide ou quasi-solide, selon l’intensité du champ. Toutefois, une contrainte de cisaillement perpendiculaire au champ magnétique H peut détruire l’agencement spatial du fluide et le ramener à un état liquide. Pour ce faire, la contrainte de cisaillement doit être supérieure à une contrainte seuil τ_c .

En l’absence de champ magnétique, le fluide a un comportement newtonien, c’est à dire que sa viscosité est indépendante de la contrainte appliquée, comme illustrée sur la Figure 2.5. En présence d’un champ magnétique, le comportement du fluide peut-être décrit selon la loi de Bingham [Jol99] :

$$\tau = \tau_c + \eta \cdot \dot{\gamma} \quad \text{pour } \tau > \tau_c \quad (2.19)$$

$$\tau = 0 \quad \text{pour } \tau < \tau_c \quad (2.20)$$

Avec :

τ : Contrainte de cisaillement.

$\dot{\gamma}$: Vitesse de cisaillement.

Mais en fonction du fluide porteur considéré, d’autres lois de comportement peuvent être observées [Vol98] [Amo03] :

Lois de Casson :

$$\tau^{1/2} = \tau_c^{1/2} + (\eta_\infty \cdot \dot{\gamma})^{1/2} \quad (2.21)$$

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

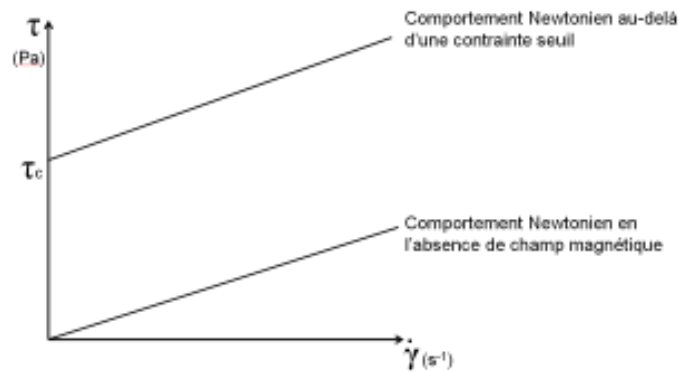


FIG. 2.5 – Rhéogramme théorique d'un fluide magnétorhéologique

Loi de Herschel-Bulkley :

$$\tau = \tau_c + K \cdot \dot{\gamma}^\alpha \quad (2.22)$$

où :

τ_c : représente la contrainte seuil.

η_∞ : désigne la viscosité à taux de cisaillement infini.

k : caractérise la consistance de la structure.

α : paramètre sans dimension compris entre 0 et 1 et pouvant être considéré comme un indice de structure.

$\dot{\gamma}$: Vitesse de cisaillement.

La Figure 2.6 montre le rhéogramme classiquement considéré pour caractériser le comportement d'un fluide magnétorhéologique réel.

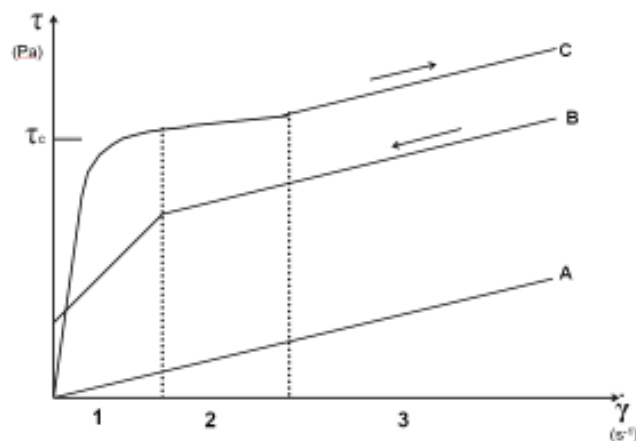


FIG. 2.6 – Rhéogramme expérimental d'un fluide magnétorhéologique réel

En l'absence de champ, le comportement du liquide est newtonien (courbe A).

En présence d'un champ, il y a deux courbes, une pour la montée en charge (courbe C) et une pour la décharge (courbe B).

Dans la montée en charge, trois phases doivent être distinguées :

- vitesse quasi nulle correspondant à une réponse élastique ;
- à partir d'une contrainte seuil élastique τ_c , le squelette se déchire progressivement (phase pseudo-élastique) ;
- le fluide retrouve enfin un comportement quasi newtonien.

Pour la décharge, il n'existe pas de phase intermédiaire pseudo élastique et la contrainte seuil dynamique τ_d est plus faible que la contrainte seuil statique.

Les simulations réalisées se font au changement d'état de la capsule, donc au moment où le champ magnétique est faible et augmente vers sa valeur finale. A ce moment là, la viscosité du fluide est proche de celle de l'huile car les réseaux de fibrilles des particules de fer ne sont pas encore formés. La viscosité de l'huile seule étant de 0,1 Pa.s, nous avons effectué nos simulations avec une viscosité de l'ordre de 1 Pa.s.

• **Densité :**

Pour effectuer des simulations avec les fluides, il est nécessaire de connaître leur densité. Celle-ci varie avec la proportion de particules de fer contenues dans la solution.

Le Tableau 2.2 montre la variation de densité en fonction de la concentration volumique des particules de fer dans la solution :

Solution de fluide magnétorheologique (% volumique des particules de fer)	10 %	20 %	30 %	40 %
Densité ($Kg.m^{-3}$)	1579	2278	2977	3676

TAB. 2.2 – Evolution de la densité du fluide magnétorhéologique en fonction du pourcentage volumique de fer.

Les simulations ont été réalisées avec une concentration de 20% (soit une densité de 2 278 $Kg.m^{-3}$), en considérant une répartition homogène des particules dans l'huile. Cette hypothèse est à priori justifiée, car le fluide considéré dans les simulations est en mouvement.

2.3.2.2 Déplacement de la capsule

Pour valider le fonctionnement de la pompe et connaître ses performances, des simulations par éléments finis ont été réalisées à l'aide du logiciel ANSYS Multiphysics.

Dans un premier temps, seules les forces mises en jeu lors du déplacement de la capsule pour obtenir une pression de l'ordre de 100 mmHg ont été considérées.

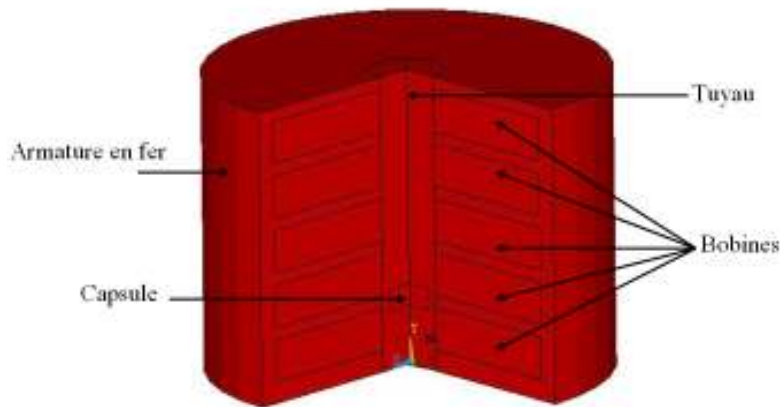


FIG. 2.7 – Structure de l'actionneur

Pour effectuer ces simulations, la structure du stator représentée sur la Figure 2.7, a été exploitée. Des bobines, de 80 mm de diamètre extérieur et de 5 mm de haut sont placées en série autour d'un tube de 20 mm de diamètre, à l'intérieur duquel se déplace la capsule remplie de fluide magnétorhéologique. Le tout est enfermé dans une culasse en fer de 5 mm d'épaisseur. Pour refermer le circuit magnétique, toutes les bobines sont séparées par une épaisseur de fer de 5 mm.

Pour étudier le déplacement de la capsule, des simulations numériques ont été réalisées en tenant compte des deux configurations spatiales possibles de la valve : ouverte ou occlusive.

2.3.2.2.1 Capsule "occlusive"

Dans ce cas, la capsule est sous sa forme pleine, c'est à dire obturant la lumière du tuyau. Elle mesure 18 mm de diamètre et 7 mm de haut pour un volume total de $1,78 \cdot 10^{-6} m^3$.

Pour calculer la pression créée sur le fluide, la capsule est mise à une extrémité du tuyau et les deux bobines supérieures sont alimentées avec une densité de courant de l'ordre $6 \cdot 10^6 A \cdot m^{-2}$, comme illustré sur la Figure 2.8.

Dans cette configuration, la capsule est soumise à une force globale de 3,3 N dans l'axe des Y (FIG. 2.8).

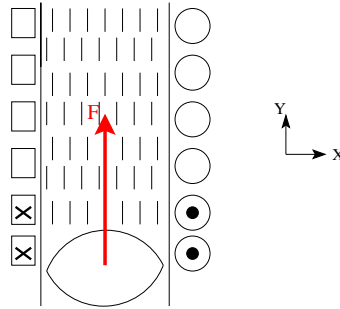


FIG. 2.8 – Schéma de l'actionneur lors du déplacement de la capsule en configuration fermée

Avec une telle force, la capsule avance dans le tuyau en créant une pression de l'ordre de :

$$P = \frac{F}{S} = 14\,538 \text{ Pa} \quad \text{soit } 109 \text{ mmHg} \quad (2.23)$$

Avec :

P : Pression en Pa.

F : Force en N.

S : Surface de la capsule en m^2 .

En conclusion, dans cette configuration, il est possible de faire translater la capsule dans le tuyau qui créera une pression de 109 mmHg dans le fluide, aboutissant ainsi à sa mise en mouvement.

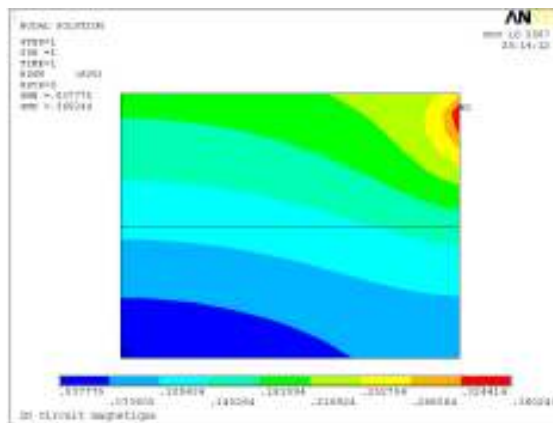


FIG. 2.9 – Allure du champ dans la capsule en configuration fermée.

La Figure 2.9 montre le niveau de champ magnétique au sein de la capsule. Avec un champ de 0,2 T, le FMR est assez visqueux pour entraîner le fluide dans le tuyau. La Figure 2.10 montre l'allure du champ magnétique dans l'actionneur. Avec une valeur maximale de 0,65 T, le matériau ne sature pas, le champ reste

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

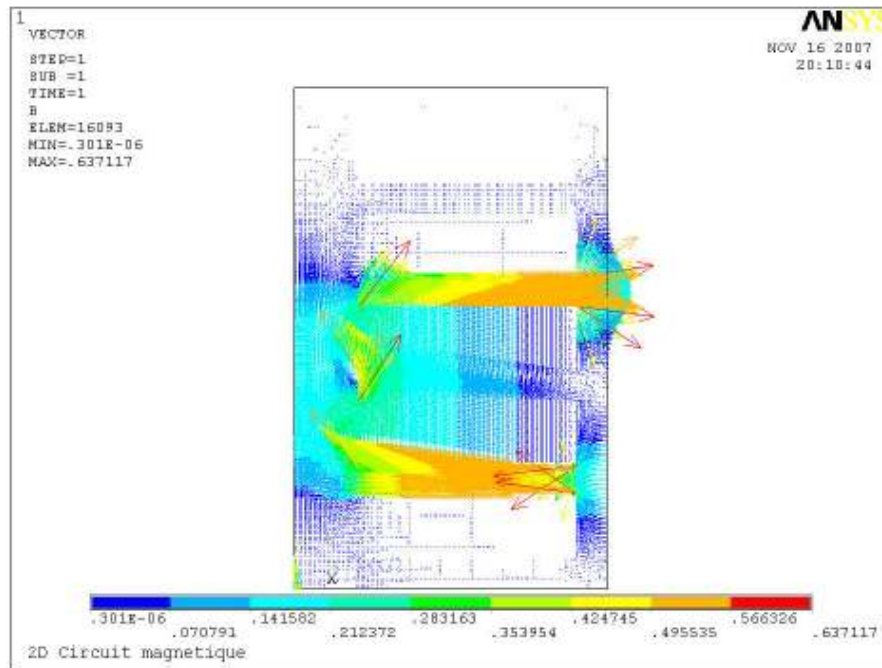


FIG. 2.10 – Allure du champ magnétique dans la structure avec la capsule en configuration occlusive.

bien canalisé dans la culasse.

Notons que l'intensité du champ magnétique ainsi généré demeure relativement faible, ce qui semble tout à fait acceptable d'un point de vue biologique pour le sang constituant à terme le fluide pompé.

2.3.2.2 Capsule "ouverte"

Dans cette partie, la capsule est simulée sous sa forme allongée, c'est-à-dire opposant le moins de résistance possible au fluide. La définition de cette configuration revient, en première approche, à admettre une variation de surface de la capsule en contact avec le fluide, de l'ordre de 33%. Cette hypothèse sera par la suite vérifiée lors des simulations numériques de la déformation de la capsule.

Travaillant à volume constant, les dimensions de la capsule en configuration ouverte correspondent à un diamètre de 6 mm avec une hauteur 15,75 mm, pour un volume égal à $1,78 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

Comme précédemment, la valve est placée à une extrémité du tuyau et les deux bobines inférieures sont alimentées avec une densité de courant de l'ordre de $6 \cdot 10^{+6} \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ (FIG. 2.11).

Dans cette configuration, la capsule est soumise à une force globale de l'ordre de 2,75 N suivant l'axe des Y.

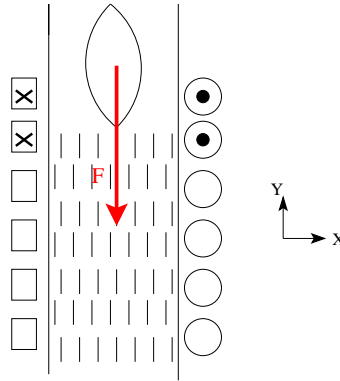


FIG. 2.11 – Configuration de l'actionneur lors du déplacement de la capsule

Lorsque la capsule est sous sa forme allongée, la force requise est moindre car la surface s'opposant à l'écoulement du fluide est beaucoup plus petite. Dans ce cas, nous pouvons ramener la capsule à sa position initiale contre une pression de :

$$P = \frac{F}{S} = 24\,315 \text{ Pa} \quad \text{soit } 182 \text{ mmHg} \quad (2.24)$$

Avec :

P : Pression en Pa.

F : Force en N.

S : Surface de la capsule en m^2 .

La Figure 2.12 montre l'allure du champ magnétique dans la capsule lorsqu'elle est en position ouverte.

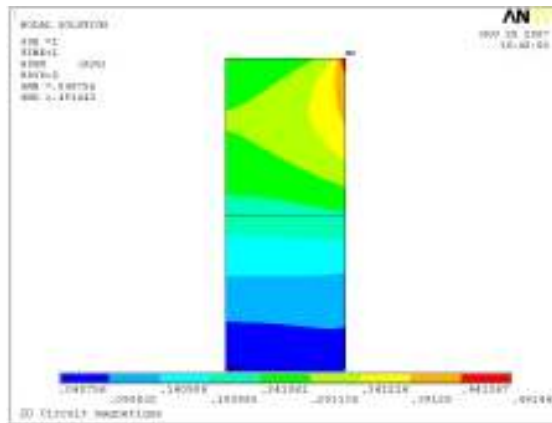


FIG. 2.12 – Allure du champ magnétique dans la capsule en configuration ouverte.

Un champ de 0.2 T en moyenne est observé dans la capsule, ce qui suffit pour rendre le liquide suffisamment visqueux, rigidifier la capsule et permettre son retour dans sa position initiale.

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

La Figure 2.13 présente l'allure du champ magnétique dans la structure lorsque la capsule est en configuration ouverte. Avec une valeur maximale de 0,63 T, le champ reste bien canalisé à l'intérieur de l'actionneur.

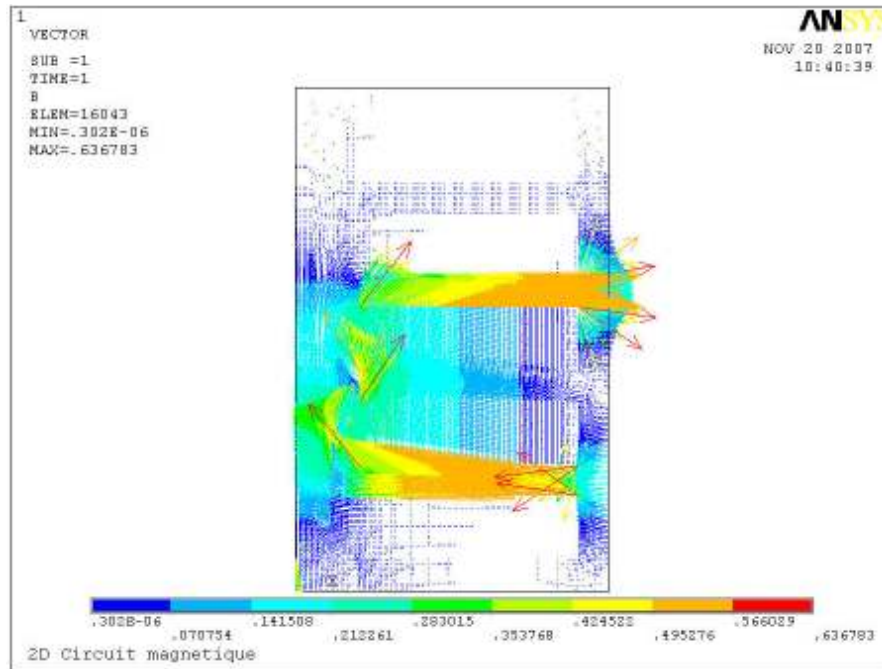


FIG. 2.13 – Allure du champ magnétique dans toute la structure avec la capsule en configuration ouverte.

2.3.2.3 Déformation de la capsule

Dans la partie précédente, les possibilités de la pompe en termes de pression ont pu être étudiées. Maintenant, une attention plus particulière est portée sur la déformation de la capsule.

Dans un premier temps, c'est le passage de la forme pleine à la forme allongée qui sera considéré.

Puis dans un deuxième temps, les moyens mis en oeuvre pour lui redonner sa forme pleine seront examinés.

2.3.2.3.1 Allongement de la capsule

Dans le cas de l'allongement de la capsule, les simulations se sont déroulées en deux étapes successives.

Dans un premier temps, des simulations numériques par éléments finis ont été effectuées pour observer les forces mises en jeu lors de la déformation.

Puis dans un deuxième temps, des simulations sur une capsule remplie de fluide magnétorhéologique ont été réalisées pour observer l'amplitude de sa déformation

lors de l'application des forces.

- **Forces mises en jeu lors de la déformation de la capsule :**

Pour commencer, il s'agit simplement de passer d'une capsule de forme pleine (configuration occlusive), à une capsule allongée (configuration ouverte). Pour cela, il faut étirer la capsule, c'est à dire des forces dirigées vers l'extérieur sur les segments [AB] et [CD] et des forces dirigées vers l'intérieur sur les segments [AD] et [BC] (FIG. 2.14).

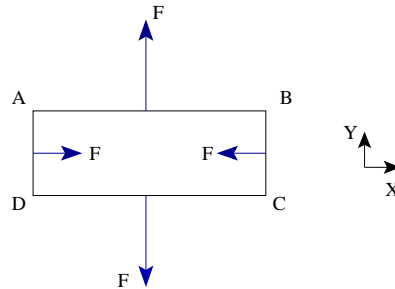


FIG. 2.14 – Forces requises sur la capsule pour lui donner sa configuration ouverte

Il a été vu, dans le paragraphe sur le tenseur de Maxwell, que pour créer de telles forces, il faut des lignes de champ normales à la surface de la capsule sur les segments [AB] et [CD], et des lignes de champ tangentielles à la surface de la capsule sur les segments [AD] et [BC].

La capsule doit donc être traversée par un champ dont les lignes sont dirigées selon l'axe Oy.

Pour cela, la capsule est située à une extrémité du conduit entre bobines coaxiales, conformément à la configuration bien connue des bobines de Helmholtz.

Les simulations ont été réalisées avec une densité de courant de l'ordre de 5.10^6 A.m^{-2} .

Le Tableau 2.3 donne les résultats obtenus suivant deux types de méthodes, la méthode des Travaux Virtuels et la méthode du tenseur de Maxwell.

	Méthode du Tenseur de Maxwell	Méthode des Travaux Virtuels
Force inférieure (N))	- 4.12	-4.13
Force supérieure (N)	4.04	4.05
Force globale (N)	-0.0854	-0.0849

TAB. 2.3 – Résultats des forces calculées sur la capsule par la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode des Travaux Virtuels.

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

Deux forces diamétralement opposées de l'ordre de 4 N sont obtenues selon l'axe Oy. Elles sont suffisantes a priori pour étirer la capsule.

Les forces obtenues suivant l'axe Ox sont très faibles et donc négligeables. Par contre, il est intéressant de noter que la force globale exercée sur la capsule est très faible (-0.085 N) ce qui signifie que la capsule ne se déplace pas pendant sa déformation.

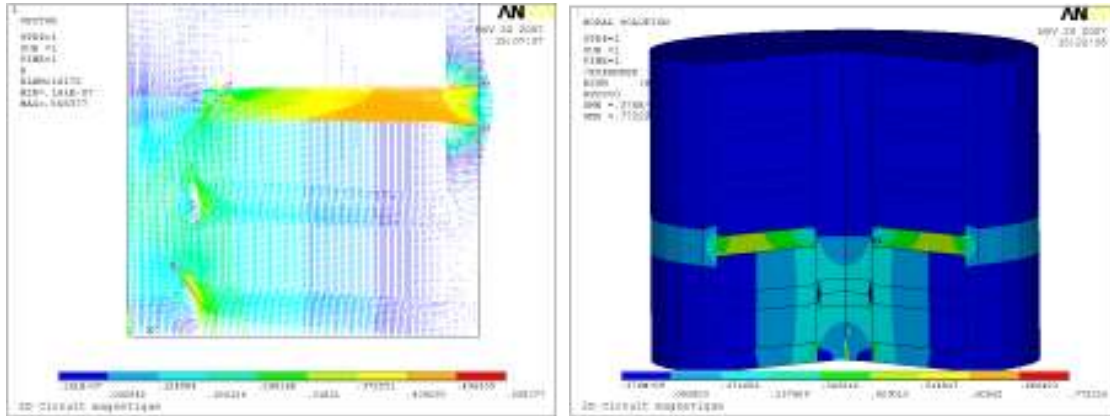


FIG. 2.15 – Allure du champ magnétique dans l'actionneur lors de la déformation de la capsule

La Figure 2.15 montre l'allure du champ magnétique dans la structure. Le champ est bien confiné dans la culasse entourant la bobine, montrant ainsi l'absence de phénomène de saturation.

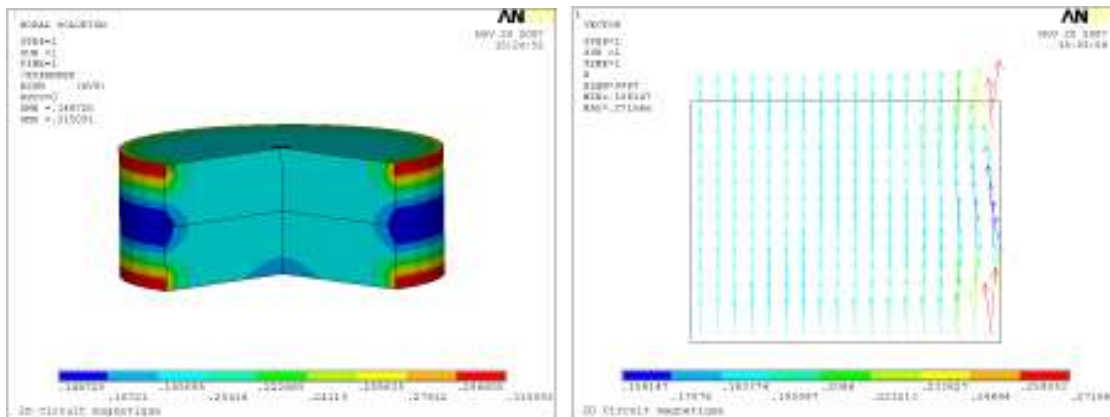


FIG. 2.16 – Champ magnétique dans la capsule

La Figure 2.16 montre la répartition du champ dans la capsule. Les lignes de champ sont orientées selon l'axe OY, ce qui crée des forces sortantes par rapport à la surface de la capsule et confirme nos résultats.

- **Amplitude de la déformation :**

Dans le paragraphe précédent, des forces de 4 N permettant d'étirer la capsule ont été obtenues. Afin de savoir si ces forces sont suffisantes, des simulations en considérant la membrane de la capsule comme un élastomère avec un module de Young de l'ordre de 500 MPa ont été réalisées. Ces simulations impliquent la prise en compte dans le logiciel d'un couplage fluide/structure. Les fluides ont été pris en compte car il s'agit d'étudier un changement de configuration. Le champ étant nul dans la structure, le fluide peut influencer le temps de réponse de la capsule à cette sollicitation.

Au début de la simulation une vitesse nulle au sein du fluide magnétorhéologique a été imposée, ainsi qu'une vitesse nulle au niveau des parois. Ensuite, la densité de force est appliquée sur un des segments, par exemple [AB], de l'autre côté un déplacement nul étant imposé.

A $t=0$, lors de l'application de la densité de force, la déformation de la structure est calculée, ainsi que la répartition de pression obtenue sur la paroi de l'élastomère. Dans une deuxième temps cette répartition de pression est appliquée au sein du fluide. Sa réponse peut être ainsi déterminée.

La répartition de pression que le fluide exerce sur l'élastomère est reportée sur l'élastomère, et ainsi de suite à chaque pas de calcul jusqu'à ce que la structure se stabilise.

La Figure 2.17 montre le résultat de la déformation de la capsule. L'allongement obtenu pour la capsule est de 1,12 cm (capsule de 1.8 cm de diamètre et 0.7 cm de haut).

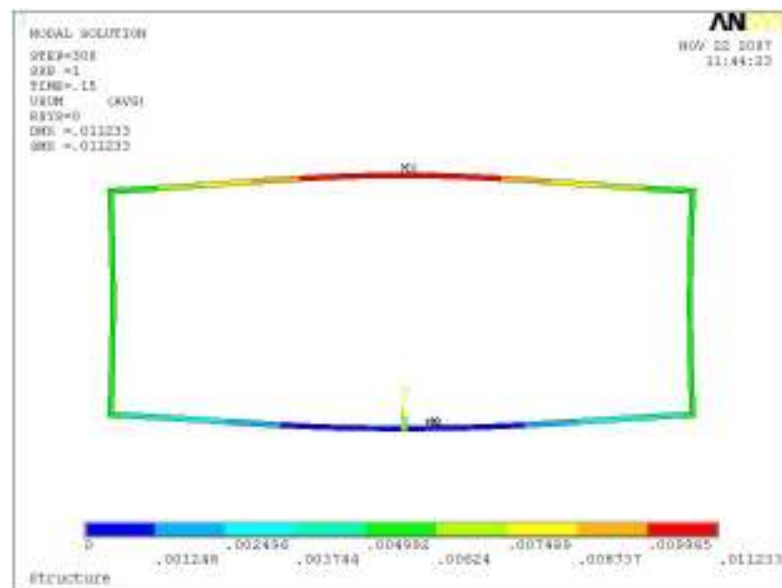


FIG. 2.17 – Simulation de la déformation de la capsule

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

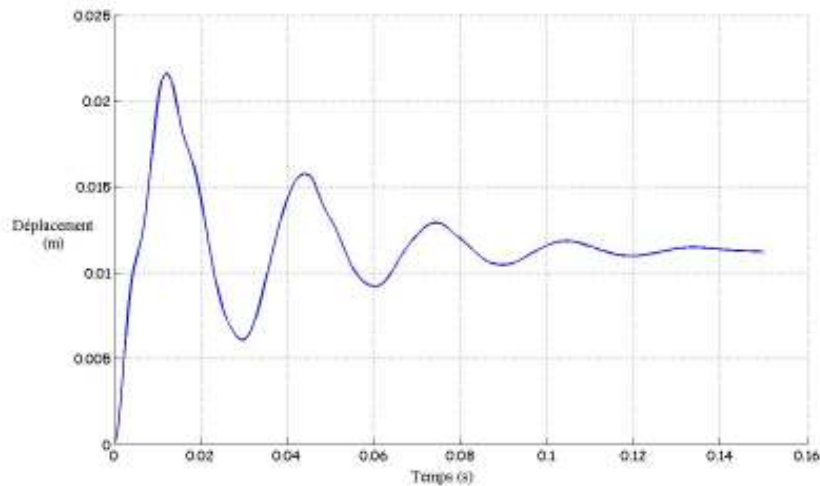


FIG. 2.18 – Déformation de la capsule en fonction du temps

Grâce aux propriétés élastiques de la membrane, un état stable de la structure est obtenu au bout de 120 ms, à l'issue d'un régime amorti comme le montre sur la Figure 2.18.

Une longueur de capsule de 1,12 cm ainsi obtenue valide l'hypothèse initiale relative à la variation de surface de la capsule prise au départ égale à 33 %.

Soulignons toutefois que ces résultats ne sont qu'une première approximation puisque l'allongement de la capsule est supérieur à la taille du maillage réalisé lors du calcul des forces magnétiques (taille de l'élément : 1 mm). Un allongement aussi important change la structure du circuit magnétique et donc la valeur des forces magnétiques. Pour être plus rigoureux, il faut relancer les calculs magnétiques avec la nouvelle forme de la capsule et refaire une étude de déformée pour avoir les nouvelles valeurs de l'allongement, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une structure stable.

2.3.2.3.2 Retour à sa forme initiale

Dans cette partie, il s'agit d'étudier le retour de la capsule à sa forme initiale, c'est à dire la forme d'un disque capable d'occulter toute la section du conduit. A cette fin, des forces radiales à la surface de la capsule sont requises pour l'étirer dans toutes les directions, comme montrées sur la Figure 2.19.

D'après les considérations précédentes sur le tenseur de Maxwell pour obtenir ces forces radiales dirigées vers l'extérieur de la surface, il faut un champ normal à la surface. Pour le créer dans toutes les directions, des bobines en forme de selle de cheval disposées sur le conduit ont été considérées, comme illustrées sur la Figure 2.20.

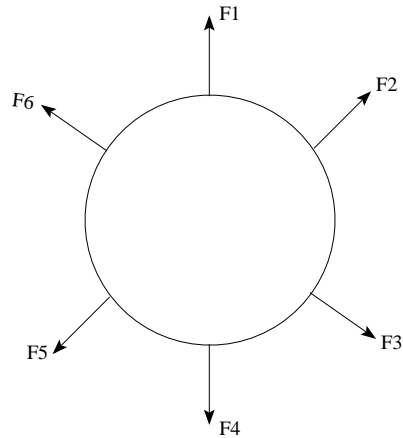


FIG. 2.19 – Forces requises pour obtenir la configuration "occlusive" de la capsule

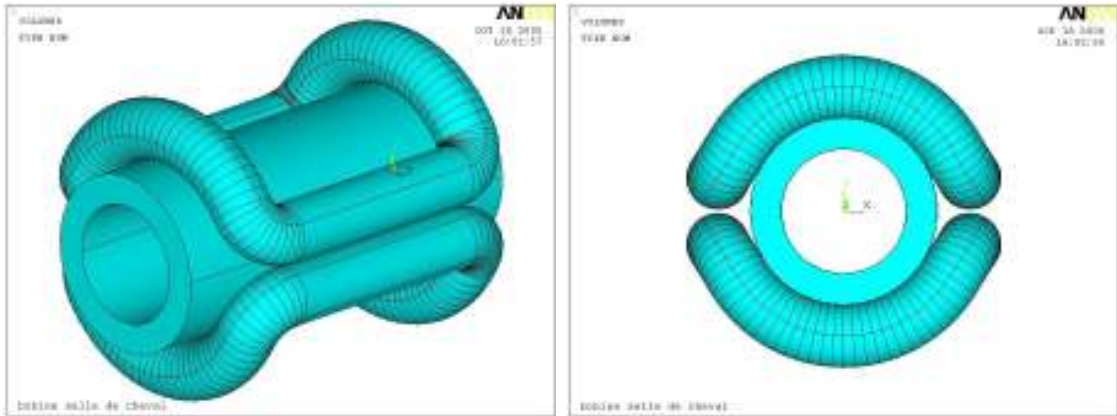


FIG. 2.20 – Disposition des bobines en forme de selle de cheval sur le tube

A l'aide de ces bobines un champ radial à la surface peut être obtenu. Les sections en arc de cercle créent le champ radial sur les parties supérieures et inférieures de la capsule engendrant les forces F1 et F4. Les sections horizontales permettent de créer un champ radial sur les côtés de la capsule permettant ainsi d'obtenir les forces F2, F3, F5, et F6 (FIG. 2.21).

La Figure 2.22 montre l'orientation des forces obtenues sur la capsule, avec le logiciel de simulation ANSYS, en alimentant les bobines avec une densité de courant égale à $6.10^6 A.m^{-2}$.

Les forces normales à la surface sont bien obtenues tout autour de la capsule pour l'étirer. A noter cependant que les valeurs données sur la Figure 2.22, doivent être considérées avec précaution, le logiciel ANSYS ne donnant pas la valeur de la force directement mais la pression exercée sur la surface de l'élément. Pour avoir la valeur de la force, il faut multiplier la valeur par la surface de l'élément qui est situé à l'interface entre la capsule et l'air. Dans notre cas le maillage est irrégulier au ni-

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

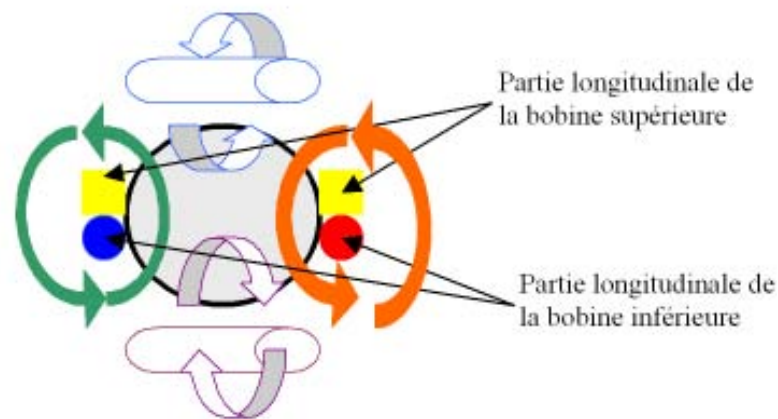


FIG. 2.21 – Allure du champ magnétique créé par les bobines en forme de selle de cheval

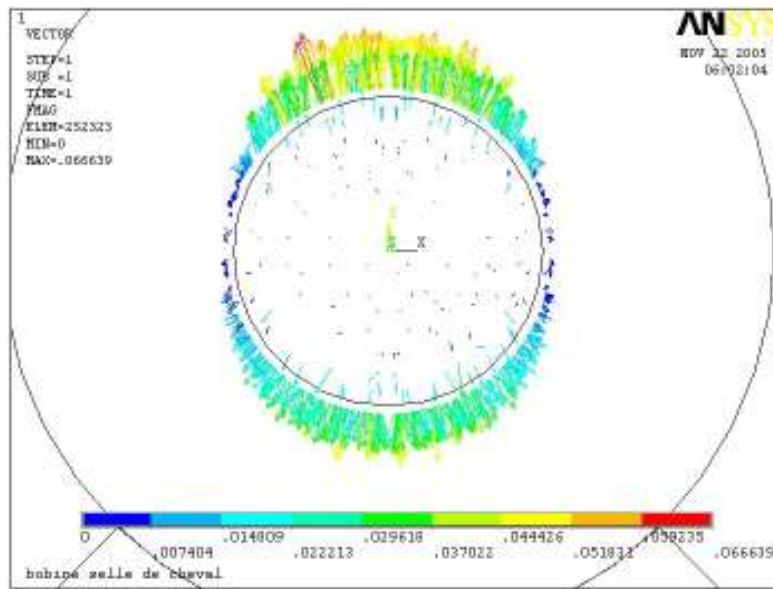


FIG. 2.22 – Répartition des forces sur la capsule avec les bobines en selle de cheval

veau de la capsule, si bien que les valeurs indiquées changent d'une région à l'autre.

Les Tableaux 2.4 et 2.5 montrent les résultats des calculs de forces exercées sur la capsule en tenant compte de la surface des éléments.

Des forces de l'ordre de 3 N sont obtenues pour étirer la capsule vers le haut et vers le bas tandis que des efforts créés sur les côtés droit et gauche équivalent à des forces de 2 N. Comme aucune force n'est créée selon l'axe Z, la déformation de la capsule est engendrée sans qu'aucune résultante globale ne soit exercée sur celle-ci. Ainsi la capsule ne se déplace pas lors de sa déformation.

Forces calculées par la méthode du tenseur de Maxwell en N			
	Selon X	Selon Y	Selon Z
Force Bas	$-1.125,36 \times 10^{-01}$	$-0.319,25 \times 10^{+01}$	$0.124,78 \times 10^{-01}$
Force Haut	$1.257,94 \times 10^{-01}$	$0.321,45 \times 10^{+01}$	$0.381,05 \times 10^{-01}$
Force Droit	$0.235,62 \times 10^{+01}$	$1.197,65 \times 10^{-01}$	$0.311,28 \times 10^{-01}$
Force Gauche	$-0.234,25 \times 10^{+01}$	$0.856,94 \times 10^{-01}$	$0.518,56 \times 10^{-01}$
Force Total	$0.562,78 \times 10^{-02}$	$0.354,88 \times 10^{-01}$	$0.553,12 \times 10^{-01}$

TAB. 2.4 – Récapitulatif des forces exercées sur la capsule avec la méthode du tenseur de Maxwell.

Forces calculées par la méthode des travaux virtuels en N			
	Selon X	Selon Y	Selon Z
Force Bas	$-1.355,84 \times 10^{-01}$	$-0.305,24 \times 10^{+01}$	$0.584,78 \times 10^{-01}$
Force Haut	$0.653,94 \times 10^{-01}$	$0.301,23 \times 10^{+01}$	$1.985,47 \times 10^{-01}$
Force Droit	$2.012,56 \times 10^{+01}$	$1.026,74 \times 10^{-01}$	$1.457,81 \times 10^{-01}$
Force Gauche	$-2.041,57 \times 10^{+01}$	$2.345,75 \times 10^{-01}$	$1.854,72 \times 10^{-01}$
Force Total	$0.125,63 \times 10^{-01}$	$0.214,58 \times 10^{-01}$	$1.023,64 \times 10^{-01}$

TAB. 2.5 – Récapitulatif des forces exercées sur la capsule avec la méthode des travaux virtuels.

En conclusion, l'étude numérique, confirme l'efficacité des bobines en forme de selle de cheval, pour redonner à la capsule sa forme pleine, susceptible d'occulter toute la lumière du vaisseau.

2.4 Etude d'un premier démonstrateur

Comme il a été montré dans les simulations précédentes, il est théoriquement possible de déplacer la capsule remplie de fluide magnétorhéologique en créant une pression de l'ordre de 110 mmHg dans le conduit, tout en la déformant selon les deux configurations possibles : ouverte ou occlusive.

Sur les bases de ces simulations relativement prometteuses, un premier démonstrateur a été élaboré pour valider les fonctions électromécaniques principales.

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

Dans la conception du prototype, différentes étapes ont été considérées, comme dans la partie simulation. Un premier démonstrateur a été consacré à la validation du principe de pompe de type conformateur-translateur mais en simplifiant sensiblement le concept, la capsule remplie de fluide magnétorhéologique laissant la place à une valve mécanique.

2.4.1 Description du démonstrateur

Ce démonstrateur doit valider en termes de débit et de pression le principe de pompe proposé. La capsule remplie de fluide magnétorhéologique est remplacée par une valve aortique mécanique montée au centre d'un cylindre ferromagnétique.

La Figure 2.23 montre la valve aortique utilisée pour la réalisation du démonstrateur. C'est une valve mécanique unidirectionnelle fabriquée par St Jude Medical, constituée de 2 ailettes qui laissent passer le fluide dans une direction et le retiennent dans l'autre. Elle mesure 22 mm de diamètre extérieur [ST 07] [Aro89].



FIG. 2.23 – Valve aortique de type St Jude de 22 mm de diamètre

La valve est bloquée dans le cylindre ferromagnétique par l'intermédiaire de vis de pression radiale.

Au niveau du stator de l'actionneur seulement deux bobines ont été conservées en vue de simplifier la mise en oeuvre et la commande du système.

L'alimentation séquentielle des bobines crée un champ magnétique qui glisse alternativement de l'une vers l'autre en imprimant au cylindre ferromagnétique des mouvements d'aller-retour. Lors de la translation du cylindre dans un sens, la prothèse valvulaire se ferme et exerce ainsi une pression sur le liquide ce qui permet son entraînement. Lors de la translation dans le sens inverse, la prothèse valvulaire s'ouvre afin de limiter son effet sur le fluide.

Le Figure 2.24 présente une vue en coupe de ce démonstrateur.

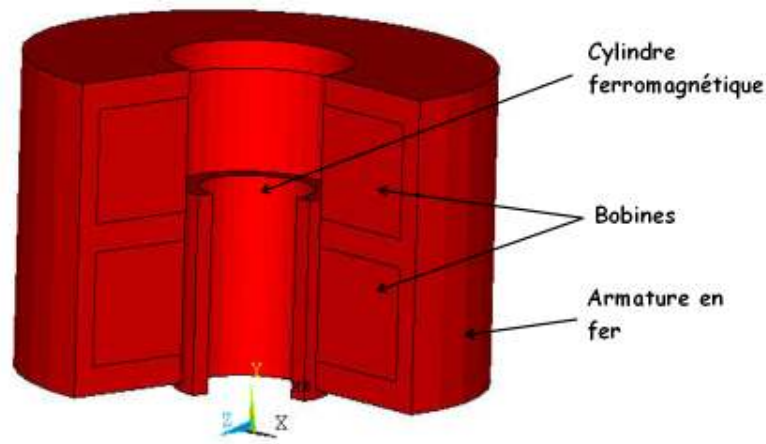


FIG. 2.24 – Structure du démonstrateur

2.4.2 Simulation

Pour dimensionner l'actionneur, le logiciel de simulation par éléments finis ANSYS Multiphysics a été utilisé. Pour obtenir une pression requise de l'ordre de 110 mmHg avec une valve de 22 mm de diamètre il faut engendrer sur le cylindre ferromagnétique la force résultante donnée par :

$$F = P \cdot S = 6 \text{ N} \quad (2.25)$$

Avec :

P : Pression en Pa.

F : Force en N.

S : Surface de la valve en m^2 .

Le cylindre ferromagnétique muni de la valve se déplace au sein d'un conduit cylindrique de 34 mm de diamètre intérieur et de 40 mm de diamètre extérieur. Une force globale de 11 N est exercée dans ces conditions sur le cylindre ferromagnétique avec des bobines de 90 mm de diamètre extérieur et 20 mm de haut, et une densité de courant de l'ordre de $5 \times 10^6 \text{ A.m}^{-2}$ (FIG. 2.25).

Pour le dimensionnement de la structure, une force légèrement supérieure est considérée car au diamètre de la valve doit être rajouté l'épaisseur du cylindre ferromagnétique. Une force de 11.1 N est obtenue avec une épaisseur de cylindre de 5 mm.

Cette valeur est atteinte lorsque le cylindre est à une extrémité du conduit et que la bobine posée est alimentée pour assurer son retour.

Lors du dimensionnement des bobines une attention particulière a été portée au rapport de la valeur de la force maximale sur la valeur de la force initiale. Si

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

ce rapport est trop élevé le cylindre peut sortir de la zone d'influence des bobines à chaque fin de course. Dans notre cas, ce rapport est de 3.8, ce qui semble acceptable compte tenu de l'inertie du cylindre ferromagnétique utilisé.

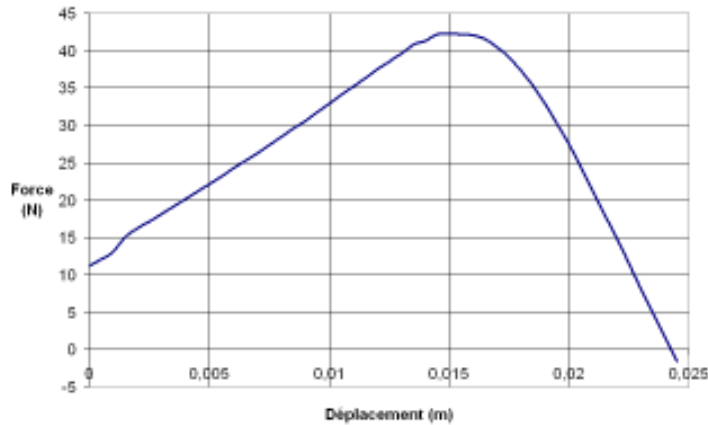


FIG. 2.25 – Force développée au cours de l'avancement de la valve

La Figure 2.26 montre l'allure du champ magnétique dans la structure lorsque le cylindre ferromagnétique est au point initial.

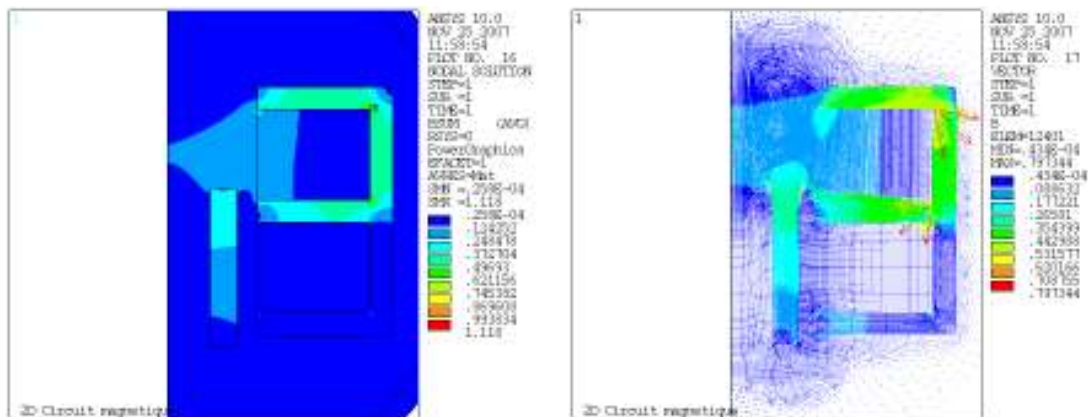


FIG. 2.26 – Allure du champ dans le démonstrateur lors du déplacement du cylindre

2.4.3 Réalisation du démonstrateur et résultats obtenus

Le démonstrateur réalisé mesure 100 mm de diamètre extérieur et 55 mm de haut. Le diamètre extérieur de chaque bobine est de 90 mm pour une hauteur de 20 mm. Le tout est enfermé dans une culasse en acier de 5 mm d'épaisseur. Pour refermer le circuit magnétique, les bobines sont séparées par une épaisseur de fer de 5 mm (FIG. 2.27).

2. Un nouveau concept de pompe électromagnétique pour l'assistance circulatoire utilisant les fluides magnétorhéologiques

Un débit pulsé a bien été constaté, mais avec des valeurs de pressions inférieures aux besoins physiologiques.

Pour des fréquences d'alimentation allant de 1 à 1,8 Hz, le débit est faible, de l'ordre de $1.5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$ mais il est maintenu pour des pressions supérieures à 70 mmHg.

Pour des fréquences allant de 2 à 2,8 Hz, le débit est plus important dans les basses pressions, il atteint $2.5 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$. Par contre, dans les hautes pressions, le débit chute jusqu'à devenir presque nul à 70 mmHg.

Pour des fréquences allant de 3 à 3,6 Hz, on observe une limitation en fréquence à faible pression, car même si la fréquence est augmentée, le débit reste constant à $2,75 \text{ L}\cdot\text{min}^{-1}$. A 70 mmHg, le débit n'est plus assuré.

Ces résultats sont encourageants mais restent encore en deçà des besoins physiologiques requis.

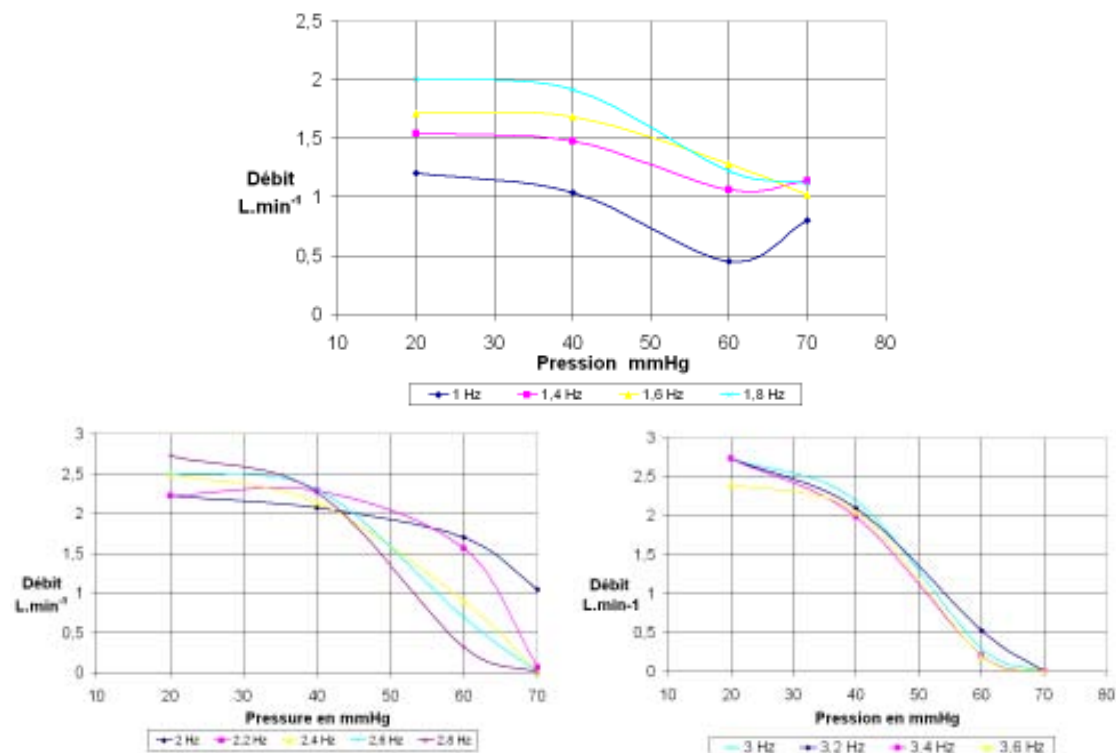


FIG. 2.29 – Caractéristiques débits/pressions en fonction de la fréquence

Pendant les tests, il a été observé, lors du retour du mobile à sa position initiale un reflux non négligeable du fluide qui limite le débit de la pompe. Une valve anti-retour pourrait limiter cet effet et augmenter sensiblement les débits et les pressions obtenus.

2.4.3.2 Résultats avec valve anti-retour

Pour améliorer les performances de la pompe, une valve anti-retour est placée à l'entrée du conduit d'aspiration. Elle permettra au cylindre ferromagnétique de revenir à sa position initiale sans engendrer le phénomène de reflux précédemment observé.

La valve utilisée est une valve porcine qui est couramment employée en chirurgie cardiaque pour remplacer la valve aortique. Elle mesure 25 mm de diamètre et est constituée de trois feuillets, comme illustré sur la Figure 2.30.



FIG. 2.30 – Valve de cochon implantée à l'entrée du conduit d'aspiration

De plus, il apparaît d'un point de vue médical que cette disposition peut-être naturellement obtenue si les éléments actifs de la pompe sont directement disposés dans l'aorte descendante. En effet, dans ce cas, la valve aortique native assure la fonction d'anti-reflux recherchée.

Avec cette valve, les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 2.31. Les essais ont été réalisés avec un mélange d'eau et de glycérol à 15 %, pour être plus proche de la viscosité du sang.

Lors de la réalisation de ces essais, on a pu noter que l'occlusion de la valve n'était pas parfaite : un léger retour du fluide étant à nouveau observé. Néanmoins, les résultats obtenus sont très encourageants puisqu'un débit de $4.5 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$, sous une pression de 110 mmHg a pu être relevé.

Si ces résultats se révèlent encourageants et prometteurs pour la suite des investigations les bobines de commande nécessitent cependant un effort de minia-

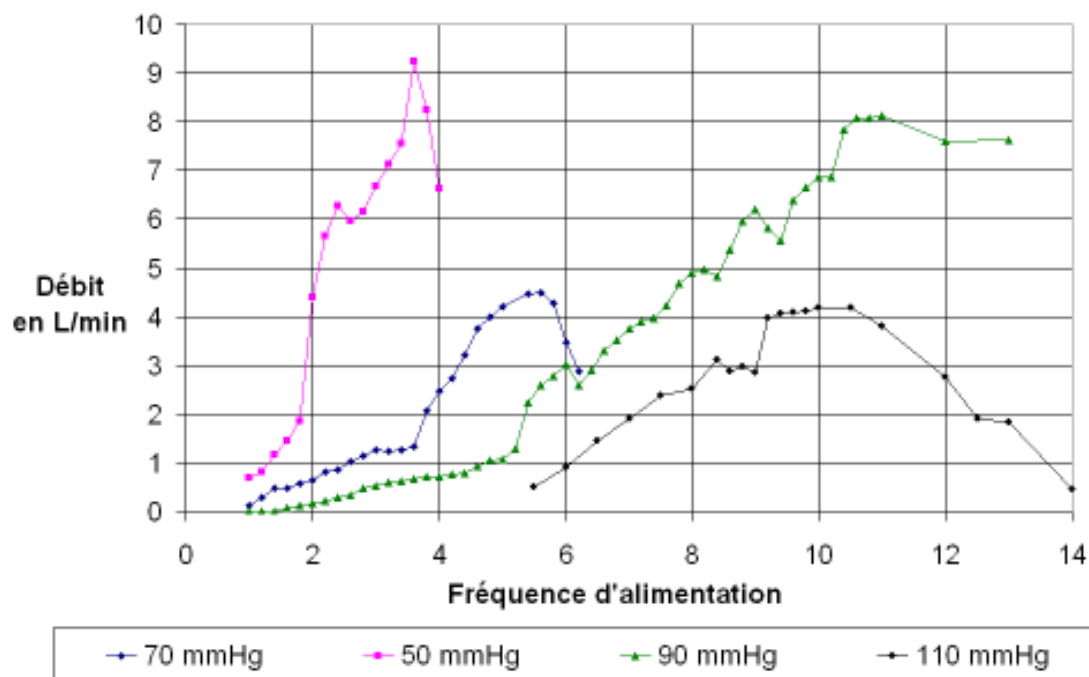


FIG. 2.31 – Caractéristiques débits/pressions avec l'ajout de la valve antireflux

turisation. Plusieurs paramètres peuvent être améliorés comme par exemple l'allongement de la course du cylindre ferromagnétique (actuellement 2,5 cm) en vue d'augmenter le débit.

Jusqu'à présent le démonstrateur a été alimenté avec des signaux carrés déphasés de 180°, avec un rapport cyclique de 50 %. La valve passe ainsi autant de temps à pousser le fluide qu'à revenir à sa position initiale. Or, les forces mises en jeu lors de ces parcours sont totalement différentes. Pour limiter le reflux du fluide ces temps peuvent être modifiés afin, par exemple, d'augmenter la durée de la séquence active par rapport à la durée du retour à la position initiale. C'est d'ailleurs ainsi que travaille le cœur biologique, avec des temps de systole et de diastole sensiblement différents.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, un nouveau concept de pompe électroactive pour l'assistance circulatoire a été introduit. Les éléments du cahier des charges visant à terme à implanter la partie mobile de la pompe directement à l'intérieur de l'aorte d'une part et à assurer un débit pulsé d'autre part, il était souhaitable que le système proposé soit constitué d'un corps déformable. C'est pour ces raisons que les fluides magnétorhéologiques ont été utilisés, car ils sont par principe très déformables et contrôlables à distance grâce à un champ magnétique extérieur.

Après avoir précisé les principales caractéristiques des fluides magnétorhéologiques exploitables, les simulations numériques ont permis de montrer qu'il était possible de déformer une enveloppe remplie de fluide afin de lui donner les deux configurations souhaitées, l'une "occlusive " et l'autre "ouverte".

Sur les bases de ces simulations prometteuses un premier démonstrateur a été réalisé pour valider le concept mis en oeuvre selon une première variante sensiblement simplifiée. Les résultats expérimentaux, réalisés avec une valve aortique mécanique unidirectionnelle, ont permis de montrer la faisabilité du système et confirment l'intérêt du concept préconisé.

S'agissant de la structure à capsule déformable, il faut toutefois avoir à l'esprit que les simulations numériques réalisées sous ANSYS, en vue de rendre compte de la déformation de la capsule, sont à considérer comme une première approche. En effet, la détermination précise de la déformation de la capsule nécessite de connaître finement la distribution des forces magnétiques à la surface de l'objet. Or, les méthodes de calcul de répartition des forces magnétiques continuent de faire l'objet de recherches voire de controverses ces dernières années. Plusieurs auteurs ont signalé notamment que l'utilisation de la formulation faible dans les codes de calcul par éléments finis a une influence sur le résultat. C'est ce point que nous allons tenter d'éclaircir et de quantifier dans le chapitre suivant.

Deuxième partie

Formulation faible, formulation forte et méthodes de calcul numérique du champ magnétique

Chapitre 3

Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques

Sommaire

3.1	Introduction	87
3.2	Forme faible des équations du champ	88
3.2.1	Problème physique considéré	88
3.2.2	Formulation en potentiel vecteur	89
3.2.3	Intégrations par parties	90
3.2.4	Principe de moindre action	92
3.2.5	La méthode des résidus pondérés	94
3.2.6	Bilan sur les différentes approches utilisées	97
3.3	Structure d'illustration	99
3.4	Méthodes de calcul de forces utilisées	100
3.5	Calcul avec les valeurs élémentales des composantes du champ	101
3.5.1	En utilisant la formulation potentiel vecteur	101
3.5.2	En utilisant la formulation potentiel scalaire	101
3.5.3	En utilisant la formulation imbriquée	103
3.5.4	Calcul des densités de force	105
3.6	Calcul avec les valeurs nodales des composantes du champ	107
3.6.1	En utilisant la formulation potentiel vecteur	107
3.6.2	En utilisant la formulation potentiel scalaire	108
3.6.3	En utilisant la formulation imbriquée	108
3.6.4	Calcul des densités de force	110
3.7	Etude en fonction du maillage	112

3. *Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques*

3.7.1	Calcul avec des éléments linéaires	113
3.7.2	Calcul avec des éléments quadratiques	116
3.8	Calcul de la force résultante	118
3.9	Conclusion	119

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, un nouveau concept de pompe électromagnétique basé sur le morphing électroactif d'un corps déformable a pu être étudié. L'étude de faisabilité a montré les possibilités de ce nouveau concept, en termes de pression et de débit. Maintenant il reste à calculer de manière précise la déformation de la capsule sous l'action d'un champ magnétique. Pour cela, il est très important de connaître très précisément la distribution des forces magnétiques sur la capsule pour ensuite calculer sa déformation mécanique.

Les méthodes de calcul de répartition de forces magnétiques continuent de faire l'objet de plusieurs recherches ces dernières années [Van01] [Jia06] [Bar06]. Plusieurs auteurs ont signalé que l'utilisation d'une forme faible des équations du champ dans les codes de calcul par éléments finis a une influence sur les résultats [Tar88] [Rei92]. Mais la majorité l'a étudié sur un exemple simple et a conclu que la solution pouvait être améliorée en affinant le maillage [Sad92]. Cependant, dans un processus de conception innovante où plusieurs configurations de structures doivent être analysées, il n'est pas toujours simple de mener des calculs avec un maillage très fin.

C'est pour cette raison que nous nous intéressons à ce problème. Nous nous plaçons ici d'un point de vue utilisateur de logiciel de simulation, nous n'avons donc pas accès aux matrices élémentaires. Ainsi, pour le calcul de la force, la dérivée de la jacobienne locale ne peut pas être utilisée pour appliquer la méthode des travaux virtuels [Cou83] [Cou84] [Ren94]. Ceci est important, car dans de nombreux logiciels, le calcul des densités de force n'est pas implanté. Certains de ces logiciels offrent cependant la possibilité à l'utilisateur de programmer lui-même le calcul des densités de force en utilisant les composantes du champ. Or, lorsqu'on n'a pas accès aux matrices élémentaires, dans le cas relativement simple des milieux linéaires, les seules méthodes de calcul de force disponibles sont celles où la densité de force surfacique s'exprime en fonction de la composante normale B_n du champ et la composante tangentielle H_t du champ d'excitation [Car59] [Cou83] [Ren94].

En général, dans un code par éléments finis, le champ magnétique est calculé à l'aide d'une formulation faible. La conséquence est qu'à l'interface de deux milieux magnétiques de perméabilité différente une seule des deux conditions de passage est respectée naturellement. L'autre condition est respectée faiblement, c'est-à-dire garantie uniquement quand le nombre de noeuds tend vers l'infini [Tar88] [Rei92].

Dans ce chapitre, après une présentation de la forme faible utilisée en éléments finis 2D, une étude montrant son influence sur le calcul des distributions de forces sera proposée. Pour cela, le champ magnétique sera calculé en utilisant successivement les deux formulations classiques : la formulation en potentiel vecteur et la formulation en potentiel scalaire.

Les résultats de calculs de la densité de force surfacique effectués avec deux méthodes différentes seront analysés. Il ne s'agit pas ici de comparer ces méthodes de calcul dans le cadre de ces deux formulations, comme l'étude effectuée dans [Ren94], mais d'analyser dans quelle mesure l'utilisation de la forme faible des équations du champ affecte le calcul numérique des densités de force en fonction du maillage. Cette étude tiendra compte de la manière dont les composantes du champ sont calculées : soit dans les éléments, i.e. les valeurs élémentales des composantes du champ, soit aux noeuds, i.e. les valeurs nodales des composantes du champ. Un code de calcul a été spécifiquement développé pour faire cette étude.

Dans une dernière partie, certains résultats obtenus sont comparés avec ceux calculés par le logiciel de simulation par éléments finis, ANSYS Multiphysics [Ans07].

3.2 Forme faible des équations du champ

Pour discrétiser les équations du champ, la méthode des éléments finis utilise une forme intégrale de ces équations. Cette forme est appelée forme faible car elle ne contient que des dérivées premières. Pour obtenir cette forme intégrale, il existe principalement deux stratégies, soit la méthode basée sur le principe de moindre action, soit la méthode des résidus pondérés [Dha81] [Sad00] [Jin02].

Ces deux stratégies sont très connues, mais cette présentation va analyser plus particulièrement la manière dont sont prises en compte les conditions de passage dans ces deux approches.

3.2.1 Problème physique considéré

Pour simplifier la présentation, un domaine d'étude contenant deux milieux magnétiques de perméabilités différentes et séparé par une interface, est considéré. De plus, le système est supposé invariant par translation. La Figure 3.1 montre le domaine d'étude considéré.

Dans chaque milieu S_i l'équation constitutive des milieux est représentée par :

$$\vec{B}_i = \mu_i \vec{H}_i \quad (3.1)$$

Sur le contour Γ du domaine d'étude, les conditions aux limites prises en compte sont :

$$\begin{aligned} B_n &= 0 && \text{sur une partie } \Gamma_D \text{ de } \Gamma \\ H_t &= 0 && \text{sur une partie } \Gamma_N \text{ de } \Gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$

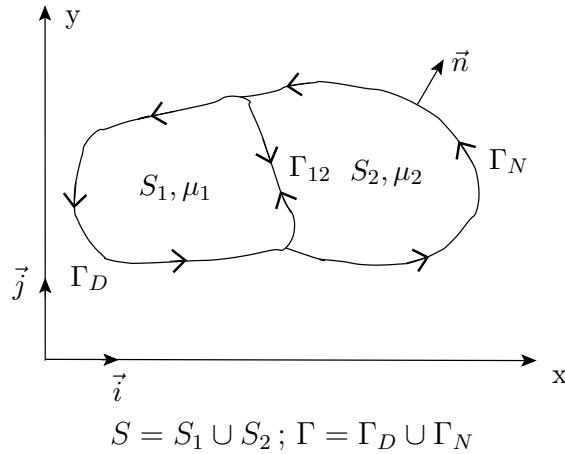


FIG. 3.1 – Domaine étudié ayant une forte variation de perméabilité magnétique au niveau de l'interface Γ_{12} .

De plus, au niveau de l'interface Γ_{12} , il faut prendre en compte les conditions de passage :

$$\begin{cases} B_{n_1} = B_{n_2} \\ H_{t_1} = H_{t_2} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.2 Formulation en potentiel vecteur

Du fait de la loi de conservation du flux magnétique, le potentiel vecteur magnétique est introduit :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un système invariant par translation, les équations dans chaque domaine d'étude peuvent se réduire à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_k} \frac{\partial A_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_k} \frac{\partial A_k}{\partial y} \right) = -f_k(x, y) \quad (3.5)$$

où A_k est la composante A_z du potentiel vecteur suivant l'axe d'invariance, dans le milieu S_k de perméabilité μ_k et avec une source de champ magnétique représentée par f_k . Pour garantir la continuité de la composante normale du champ magnétique B_n , il suffit d'imposer la continuité du potentiel vecteur A à l'interface des

milieux magnétiques. Nous avons donc une équation aux dérivées partielles avec une fonction inconnue $A(x, y)$ sur tout le domaine d'étude.

La continuité de la composante H_t sur l'interface Γ_{12} se traduit par :

$$\frac{1}{\mu_2} \overrightarrow{\text{grad}} A \cdot \vec{n}_2 = - \frac{1}{\mu_1} \overrightarrow{\text{grad}} A \cdot \vec{n}_1$$

ou

$$\frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 = - \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 \tag{3.6}$$

Avec :

μ_1 : Perméabilité magnétique du sous domaine S_1 .

μ_2 : Perméabilité magnétique du sous domaine S_2 .

\vec{n}_1 : Vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de S_1 .

\vec{n}_2 : Vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de S_2 .

Sur la partie Γ_D , de la frontière Γ du domaine où le champ est tangentiel ($B_n = 0$), le potentiel vecteur A est constant. Pour simplifier, cette constante peut être prise nulle (Conditions de Dirichlet homogène) :

$$A = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \tag{3.7}$$

Sur la partie Γ_N , de la frontière Γ du domaine, le champ est normal ($H_t = 0$). Dans ce cas, la dérivée normale de A est nulle (conditions de Neumann homogène) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} A \cdot \vec{n} = \frac{\partial A}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \tag{3.8}$$

3.2.3 Intégrations par parties

Les méthodes de formulation intégrale du champ, variationnelles ou résidus pondérés, utilisent la technique d'intégration par partie. Cette dernière donne des formes intégrales dites faibles. L'une des propriétés intéressantes est que l'ordre maximum des dérivées apparaissant dans la forme intégrale diminue. Les conditions de dérivabilité de la fonction étudiée sont donc moins importantes [Dha81].

Maintenant, la technique d'intégration par partie va être appliquée à l'équation de Poisson pour obtenir la forme intégrale des équations du champ.

L'équation 3.5 peut s'écrire sous la forme :

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) = -f_k \quad (3.9)$$

Pour une fonction ψ , évaluons l'intégral $I(\psi)$ sur le milieu S_k :

$$I(\psi) = \iint_{S_k} \psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS \quad (3.10)$$

L'identité,

$$\operatorname{div}\left(\frac{\psi}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) = \frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} A + \psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) \quad (3.11)$$

appliquée à l'équation 3.10 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} \operatorname{div}\left(\frac{\psi}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS &= \iint_{S_k} \frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} A dS \\ &+ \iint_{S_k} \psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ou d'après le théorème d'Ostrogradski :

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} \operatorname{div}\left(\frac{\psi}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS &= \oint_{\Gamma_k} \frac{\psi}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \cdot \overrightarrow{n_k} d\Gamma \\ &= \oint_{\Gamma_k} \frac{\psi}{\mu_k} \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.13)$$

Soit,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_k} \frac{\psi}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \cdot \overrightarrow{n_k} d\Gamma &= \iint_{S_k} \frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} A dS \\ &+ \iint_{S_k} \psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS \end{aligned} \quad (3.14)$$

Ou :

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} \psi \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) dS &= - \iint_{S_k} \frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} A dS \\ &+ \oint_{\Gamma_k} \frac{\psi}{\mu_k} \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.15)$$

Remarque : L'équation 3.15 est l'expression de l'intégration par partie utilisée couramment dans les problèmes 2D. Dans le premier membre apparaissent des dérivées du second ordre de A qui sont remplacées, par des dérivées du premier ordre de ψ et A , dans le second membre.

3.2.4 Principe de moindre action

Le principe de moindre action ou principe variationnel est un principe général en physique. L'évolution d'un système physique est obtenue en cherchant à minimiser l'action S entre deux instants t_1 et t_2 .

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (3.16)$$

L représente le Lagrangien du système. Pour un système physique où les phénomènes dissipatifs peuvent être négligés, le Lagrangien s'exprime par :

$$L = T - V \quad (3.17)$$

Où T est l'énergie cinétique totale du système et V l'énergie potentielle totale du système.

Pour un système statique l'énergie cinétique est nulle et le problème revient donc à trouver une fonction qui minimise l'énergie potentielle totale.

Pour un système magnétique, l'énergie potentielle totale est égale à l'énergie magnétique du système moins l'énergie potentielle des sources imposées. Dans le cas d'un système décrit par l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \right) = -f \quad (3.18)$$

l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$V(A) = \iint_S \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \overrightarrow{\operatorname{grad}} A - fA \right) dS \quad (3.19)$$

Problème continu :

Soit A un extrémum de V avec $A = 0$ sur Γ_D .

La variation de V autour de A est donnée par :

$$\delta V(A) = V(A + \delta A) - V(A) \quad (3.20)$$

où δA est une fonction dont l'énergie potentielle de totale est infiniment petite devant celle de A et où $\delta A = 0$ sur Γ_D . En négligeant l'énergie potentielle de δA , on a :

$$\delta V(A) = \iint_S \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \delta A - f \delta A \right) dS \quad (3.21)$$

En tenant compte du nombre de milieux de perméabilités magnétiques différentes (n_m), l'expression s'écrit comme suit :

$$\delta V(A) = \sum_{k=1}^{n_m} \iint_{S_k} \left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\text{grad}} A \overrightarrow{\text{grad}} \delta A - f \delta A \right) dS \quad (3.22)$$

En utilisant l'expression de l'intégration par partie (Equation 3.15) et en remplaçant ψ par δA , l'équation suivante est obtenue :

$$\delta V(A) = \sum_{k=1}^{n_m} \oint_{\Gamma_k} \frac{\delta A}{\mu_k} \overrightarrow{\text{grad}} A \cdot \overrightarrow{n_k} d\Gamma - \iint_{S_k} \delta A \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) dS \quad (3.23)$$

Pour simplifier, le principe de moindre action est appliqué à l'exemple illustré sur la Figure 3.1, où seulement deux milieux de perméabilités magnétiques différentes sont considérés ($n_m=2$). L'expression devient alors :

$$\begin{aligned} \delta V(A) = & \oint_{\Gamma} \frac{\delta A}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \cdot \overrightarrow{n} d\Gamma + \iint_{S_1} \delta A \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_1} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) dS \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left[\frac{\delta A}{\mu_1} \left(\overrightarrow{\text{grad}} A \right)_1 \cdot \overrightarrow{n} - \frac{\delta A}{\mu_2} \left(\overrightarrow{\text{grad}} A \right)_2 \cdot \overrightarrow{n} \right] d\Gamma_{12} \\ & + \iint_{S_2} \delta A \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_2} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) dS \end{aligned} \quad (3.24)$$

Comme $\delta A = 0$ sur Γ_D , l'expression s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta V(A) = & \int_{\Gamma_N} \frac{\delta A}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{12}} \delta A (H_{t_1} - H_{t_2}) d\Gamma \\ & - \iint_S \delta A \left[\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) + f \right] dS \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comme A est un extremum de V , il faut que $\delta V(A) = 0$ quelque soit la fonction δA . Soit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial A}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ H_{t_1} = H_{t_2} & \text{sur } \Gamma_{12} \\ \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) = -f & \text{sur } S \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Autrement dit, pour un problème continu l'extrémum de $V(A)$ avec $A = 0$ sur Γ_D est la solution de l'équation de Poisson avec les conditions aux limites

homogènes. Il vérifie aussi la condition de passage H_t , la composante tangentielle du champ. Celle de la composante normale étant garantie par le fait que A est le potentiel vecteur.

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(A \vec{k}) \quad (3.27)$$

Problème discret :

Lorsqu'on discrétise le domaine d'étude par la méthode des éléments finis, l'énergie potentielle totale du système discrétisé vaut :

$$\tilde{V}(\{A\}) = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} - \{A\}^T \{f\} \quad (3.28)$$

Avec :

$\{A\}^T = \{A_1, \dots, A_{no}\}$: Vecteur des valeurs de A aux noeuds du domaine discrétisé.

K : La matrice des perméabilités.

$\tilde{V}\{A\}$ n'est pas exactement égal à $V(A)$. \tilde{V} tend vers V lorsque le nombre de noeuds tend vers l'infini.

Autrement dit, la solution du problème discrétisé ($[K]\{A\} = \{f\}$) qui minimise la fonctionnelle $\tilde{V}(\{A\})$ n'est que la solution approchée de l'équation de Poisson et les trois égalités (Expressions 3.29) qui découlent du fait que la fonction A est l'extremum de la fonctionnelle continue V , ne sont garanties que lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini. **Ces conditions ne sont donc garanties que faiblement :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_N \\ H_{t_1} &= H_{t_2} && \text{sur } \Gamma_{12} \\ \text{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \right) &= -f && \text{sur } \delta \end{aligned} \quad (3.29)$$

La condition de passage concernant la composante normale est par contre garantie du fait que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}(A \vec{k})$ et que la solution approchée \tilde{A} est continue à l'interface de deux éléments.

3.2.5 La méthode des résidus pondérés

La méthode des résidus pondérés consiste à chercher une fonction g qui annule le produit scalaire magnétique du résidu $Res(g)$ du système d'équations aux dérivées partielles et d'une fonction ψ quelconque. Les fonctions g et ψ appartiennent alors à un même espace de fonctions \mathcal{F} convenablement choisi.

$$res(g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \psi \in \mathcal{F} \quad \langle res(g), \psi \rangle = 0 \quad (3.30)$$

Soit $g(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions définies sur S , évaluons l'intégrale :

$$I_\psi = \iint_S \psi \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) + \psi f \, dS \quad (3.31)$$

en faisant une intégration par partie :

$$I_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS + \int_\Gamma \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma \quad (3.32)$$

Comme sur le contour $\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N$, l'équation devient :

$$\begin{aligned} I_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS \\ + \int_{\Gamma_D} \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.33)$$

Si ψ s'annule sur Γ_D , l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$I_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS + \int_{\Gamma_N} \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma \quad (3.34)$$

Si g est la solution de l'équation de Poisson les conditions aux limites homogènes, l'équation 3.31 permet d'écrire :

$$I_\psi = 0 \quad (3.35)$$

Alors, l'équation 3.34, pour tout ψ s'annulant sur Γ_D , peut se mettre sous la forme, :

$$I_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} A \right) dS = 0 \quad (3.36)$$

Soit maintenant une autre fonction g tel que :

$$J_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS \quad (3.37)$$

En appliquant la technique d'intégration par partie, l'expression devient :

$$J_\psi = \iint_S \psi f + \psi \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS - \int_\Gamma \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} \, d\Gamma \quad (3.38)$$

3. Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques

Soit, pour un nombre de milieux (n_m) de perméabilités magnétiques différentes :

$$J_\psi = \sum_{k=1}^{n_m} \iint_{S_k} \psi f_k + \psi \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_k} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g_k \right) dS - \int_{\Gamma_k} \frac{\psi}{\mu_k} \frac{\partial g_k}{\partial n} d\Gamma \quad (3.39)$$

En l'appliquant à l'exemple illustré sur la Figure 3.1, on prend n_m égale à 2. L'équation s'écrit alors :

$$J_\psi = \iint_{S_1} \psi f_1 + \psi \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_1} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g_1 \right) dS + \iint_{S_2} \psi f_2 + \psi \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g_2 \right) dS - \int_{\Gamma} \frac{\psi}{\mu} \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_{12}} \psi \left[\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial g}{\partial n} \right)_1 - \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial g}{\partial n} \right)_2 \right] d\Gamma \quad (3.40)$$

Si quelque soit ψ , s'annulant sur Γ_D , $J_\psi = 0$, alors :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) = -f & \text{sur } S \\ \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial g}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial g}{\partial n} \right)_2 & \text{sur } \Gamma_{12} \\ \frac{\partial g}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (3.41)$$

Pour que g vérifie l'équation de Poisson il suffit donc que :

$$\forall \psi / \psi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \quad J_\psi = 0 \quad \text{et} \quad g = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D$$

Pour un problème continu, l'équivalence suivante est obtenue :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) = -f & \text{sur } S \\ \frac{\partial g}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial g}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial g}{\partial n} \right)_2 & \text{sur } \Gamma_{12} \end{cases} \iff \begin{cases} \forall \psi / \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \right) dS = 0 \\ \text{et} \\ g = 0 & \text{sur } \Gamma_D \end{cases} \quad (3.42) \quad (3.43)$$

Quand le milieu S est discrétisé par la méthode des éléments finis, l'intégrale J_ψ devient :

$$\tilde{J}\{\psi\} = \{\psi\}^T([K]\{g\} - \{f\}) \quad (3.44)$$

Comme $\forall \{\psi\}, \tilde{J}\{\psi\} = 0$, l'équation se simplifie et donne :

$$[K]\{g\} = \{f\} \quad (3.45)$$

Cette équation est identique à celle retrouvée avec le principe de moindre action. $\{g\}$ est une solution approchée de l'équation algébrique 3.45, et $\tilde{J}(\{\psi\})$ tend vers J_ψ lorsque le nombre de noeuds tend vers l'infini.

L'équivalence n'est donc pas exactement vérifiée pour $\{g\}$. Autrement dit, les relations 3.46 ne sont vérifiées que faiblement.

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} g\right) = -f & \text{sur } \delta \\ \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial g}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial g}{\partial n}\right)_2 & \text{sur } \Gamma_{12} \\ \frac{\partial A}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_M \end{cases} \quad (3.46)$$

La condition $g = 0$ sur Γ_D et la continuité de g sur Γ_{12} sont garanties. Et comme :

$$\overrightarrow{B} = \operatorname{rot}(g \overrightarrow{k}) \quad (3.47)$$

La continuité de la composante B_n à l'interface est garantie pour le problème discret.

3.2.6 Bilan sur les différentes approches utilisées

Les Tableaux 3.1 et 3.2 résument les résultats obtenus précédemment dans le cas d'un problème continu et d'un problème discret, avec les deux stratégies utilisées (Principe variationnel, la méthode des résidus pondérés).

Le Tableau 3.3 rappelle les conditions garanties faiblement et fortement. La méthode des éléments finis, qu'elle utilise le principe variationnel ou la méthode des résidus pondérés, n'assure fortement qu'une des deux conditions de passage, entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes.

3. Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques

Forme faible (Principe de moindre action)	Forme faible (Méthodes des résidus pondérés)
<ul style="list-style-type: none"> Extremum de : $V(A) = \iint_S \left(-f A + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} A \overrightarrow{\text{grad}} A \right) dS$ <ul style="list-style-type: none"> Avec : $A = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D$	<ul style="list-style-type: none"> $\forall \psi$ tel que $\psi = 0$ sur Γ_D $J_\psi = \iint_S \left(\psi f - \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{grad}} \psi \overrightarrow{\text{grad}} A \right) dS = 0$ <ul style="list-style-type: none"> Et : $A = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D$

TAB. 3.1 – Problème continu : Forme forte et formes faibles équivalentes

Principe variationnel	Méthodes des résidus pondérés	Equations algébriques
<ul style="list-style-type: none"> Extremum de : $\tilde{V}(\{A\}) = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\} - \{A\}^T \{f\}$ <ul style="list-style-type: none"> $A_i = 0$ si le noeud i se trouve sur Γ_D 	<ul style="list-style-type: none"> $\forall \{\psi\}$ $\{\psi\}^T [K] \{A\} - \{\psi\}^T \{A\} = 0$ <ul style="list-style-type: none"> Avec $A_i = 0$ si le noeud i se trouve sur Γ_D 	<ul style="list-style-type: none"> $[K] \{A\} = 0$ Avec $A_i = 0$ si le noeud i se trouve sur Γ_D

TAB. 3.2 – Problème discret

En potentiel vecteur, c'est la continuité de la composante B_n qui est assurée fortement, la continuité de la composante H_t n'étant garantie que lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini.

Avec le potentiel scalaire magnétique, à l'interface entre deux milieux, c'est la continuité de la composante H_t qui est assurée fortement, la continuité de la composante B_n n'étant obtenue que lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini.

Dans la suite de ce chapitre, une étude est réalisée pour connaître l'influence que peut avoir une forme faible des équations du champ sur un calcul de force surfacique.

Egalités garanties faiblement	Egalités garanties fortement
<ul style="list-style-type: none"> • $\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\operatorname{grad}} A\right) = -f$ sur S • $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ sur Γ_N • $H_{t_1} = H_{t_2}$ sur Γ_{12} 	<ul style="list-style-type: none"> • $A = 0$ sur Γ_D et Continuité de A sur Γ_{12} Donc continuité de B_n

TAB. 3.3 – Formes faibles : les égalités garanties faiblement et fortement

3.3 Structure d'illustration

Pour effectuer les calculs, l'exemple étudié est constitué d'un aimant permanent (de 2 cm de haut, et 4 cm de large) ayant une polarisation magnétique de 1T parallèle à l'axe vertical (Oy), placé à 1 cm d'une pièce ferromagnétique carrée de 4 cm de côté et de perméabilité relative de 1000. Le domaine d'étude est composé d'un bloc d'air de 80 cm de côté entourant ces deux objets, comme illustré sur la Figure 3.2. Ce bloc d'air a été choisi suffisamment grand pour que les conditions limites n'influent pas sur les résultats.

La pièce ferromagnétique, l'aimant permanent et leur voisinage immédiat sont maillés avec des éléments quadrangulaires bilinéaires de 2 mm de côté. La répartition des forces magnétiques a été calculée sur la pièce ferromagnétique et notamment le long de l'interface [ab] (FIG. 3.2).

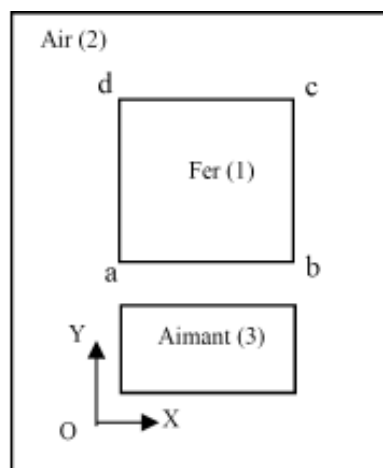


FIG. 3.2 – Structure servant d'illustration à l'étude proposée.

3.4 Méthodes de calcul de forces utilisées

Un concepteur d'actionneur a actuellement le choix des codes de calcul par éléments finis. En tant qu'utilisateur, un code de calcul par éléments finis fournit les valeurs des composantes du champ partout dans le domaine d'étude. Pour calculer une répartition de force dans un milieu magnétique, il faut donc utiliser les méthodes qui donnent une expression de la densité en fonction de ces composantes.

Dans cette étude, l'influence de l'utilisation de la forme faible des équations du champ sur le résultat du calcul avec ce type de méthode sera analysée. Pour cela, deux méthodes ont été choisies :

- La première méthode est la méthode du tenseur de Maxwell. Pour un milieu magnétique non saturé, la densité de force volumique est nulle. Les composantes tangentielle et normale de la densité surfacique de force sont données dans [Bar06] [Mül90] [Sad92] :

$$F_t = B_n \cdot H_t \quad (3.48)$$

$$F_n = \frac{1}{2} \left(\frac{B_n^2}{\mu_0} - \mu_0 H_t^2 \right) \quad (3.49)$$

- La deuxième méthode est la méthode des travaux virtuels. Dans un milieu magnétique non saturé, cette force donne aussi une densité de force surfacique dont la composante tangentielle est nulle et la composante normale est donnée par [Bar06] [Mül90] [Sad92] :

$$F_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{B_n^2}{\mu_0} + (\mu_r - 1) \mu_0 H_t^2 \right) \quad (3.50)$$

Dans ces expressions, B_n représente la composante normale du champ et H_t la composante tangentielle de l'excitation magnétique à l'interface du milieu magnétique avec l'air ambiant. Dans le cas d'une forme faible, il est important de préciser que ces deux composantes sont calculées dans l'air [Bar06] [Sad92] [Ren94].

En 2D, deux formulations sont possibles pour calculer le champ dû à l'aimant : la formulation en potentiel vecteur et la formulation en potentiel scalaire. Les propriétés de ces deux formulations sont connues. A l'interface entre deux régions de perméabilités différentes, la formulation en potentiel vecteur respecte naturellement la continuité de la composante normale du champ magnétique B_n et la formulation en potentiel scalaire celle de la composante tangentielle H_t du champ magnétique. Comme ces deux formulations sont disponibles dans le même code de calcul, une troisième possibilité est offerte pour le calcul des forces : nous utilisons la formulation en potentiel vecteur pour calculer B_n et celle du potentiel scalaire pour calculer la composante H_t le long de l'interface fer-air [Ren94]. Nous allons

analyser les résultats obtenus avec ces deux méthodes de calcul de forces en utilisant les trois formulations et en fonction de la manière dont ces composantes sont calculées.

3.5 Calcul avec les valeurs élémentales des composantes du champ

Dans un premier temps, les composantes du champ sont calculées dans les éléments. Ce cas est important car la plupart des codes de calcul fournissent ces valeurs élémentales. La valeur élémentale est la valeur moyenne dans l'élément. Dans notre exemple (FIG. 3.2), il y a 20 éléments quadrangulaires et linéaires de même taille de part et d'autre de l'interface. Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus avec notre code de calcul par éléments finis.

3.5.1 En utilisant la formulation potentiel vecteur

En potentiel vecteur, les répartitions dans l'air et dans le fer de la valeur élémentale de H_t le long de l'interface air-fer (a,b) sont calculées. Les résultats sont reportés sur les Figures 3.3 et 3.4, en fonction du numéro, de 1 à 20, de l'élément le long de (a,b). En principe, les deux distributions doivent être les mêmes. Les résultats montrent, cependant, que même avec un maillage relativement fin (20 éléments sur l'interface de 4 cm de largeur) les deux distributions sont extrêmement différentes. En excluant les éléments 1 et 20 sur les coins a et b, la valeur maximale dans l'air est de $20\,000\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$, comme montré sur la Figure 3.3, tandis que celle dans le fer n'atteint pas $150\text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$, comme illustrée sur la Figure 3.4.

3.5.2 En utilisant la formulation potentiel scalaire

En potentiel scalaire, les répartitions dans l'air et dans le fer de la valeur élémentale de B_n le long de l'interface (a,b) sont calculées. Les résultats sont reportés sur la Figure 3.5, en fonction du numéro de 1 à 20 de l'élément le long de l'interface (a,b). En principe, les deux distributions doivent être les mêmes.

Or, nous constatons ici, que les répartitions de B_n dans le fer et dans l'air présentent une différence. Il est intéressant de noter cependant que celle-ci est nettement moins importante que dans le cas de la répartition de H_t calculée avec le potentiel vecteur, comme le prouve la Figure 3.3.

Au maximum, des différences de 10 % entre les répartitions de B_n dans le fer et dans l'air ont pu être constatées, en potentiel scalaire. Tandis qu'en potentiel vecteur les différences observées entre les répartitions de H_t dans l'air et dans le fer atteignent un rapport de 130.

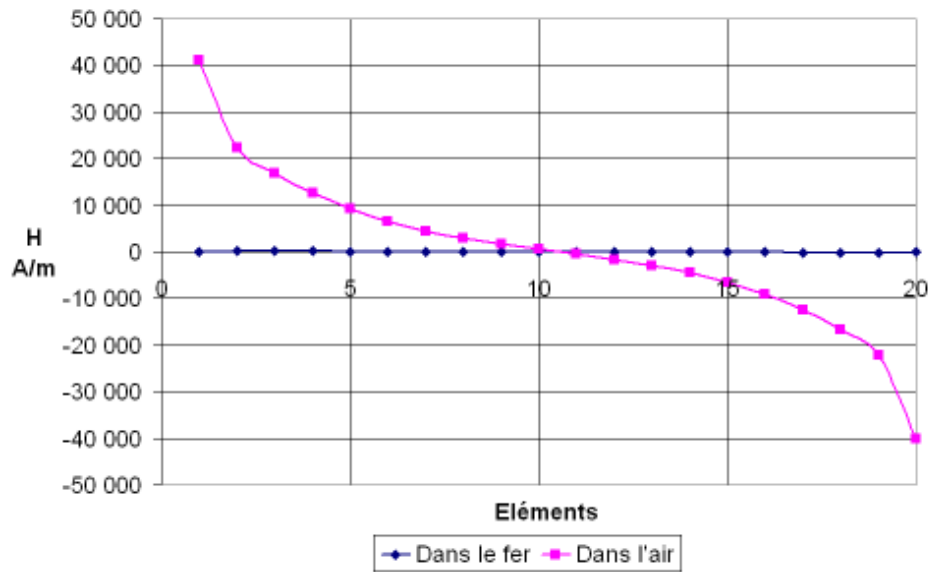


FIG. 3.3 – Répartition de la valeur élémentaire de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b), calculée avec la formulation en potentiel vecteur, et en utilisant 20 éléments sur l'interface.

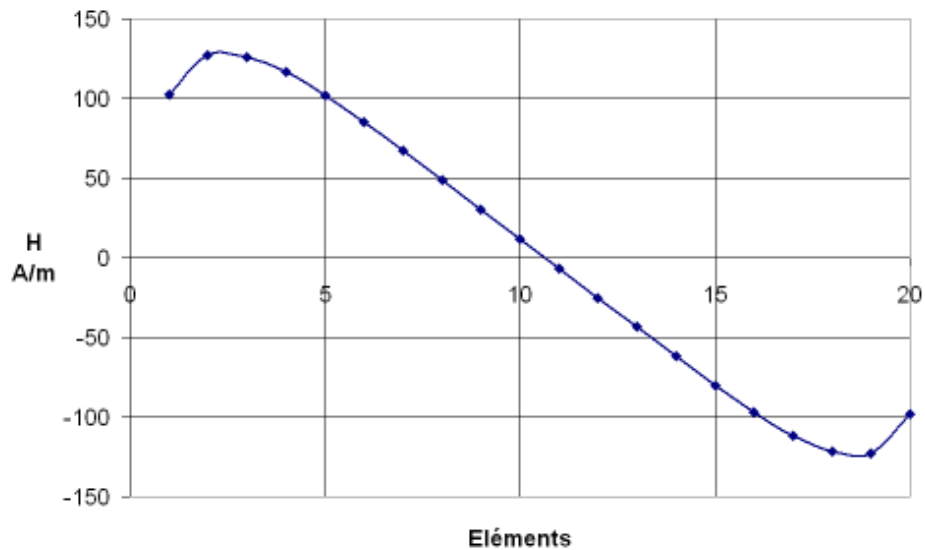


FIG. 3.4 – Répartition de la valeur élémentaire de composante tangentielle H_t dans le fer uniquement le long de l'interface (a,b), calculée avec la formulation en potentiel vecteur, et en utilisant 20 éléments sur l'interface.

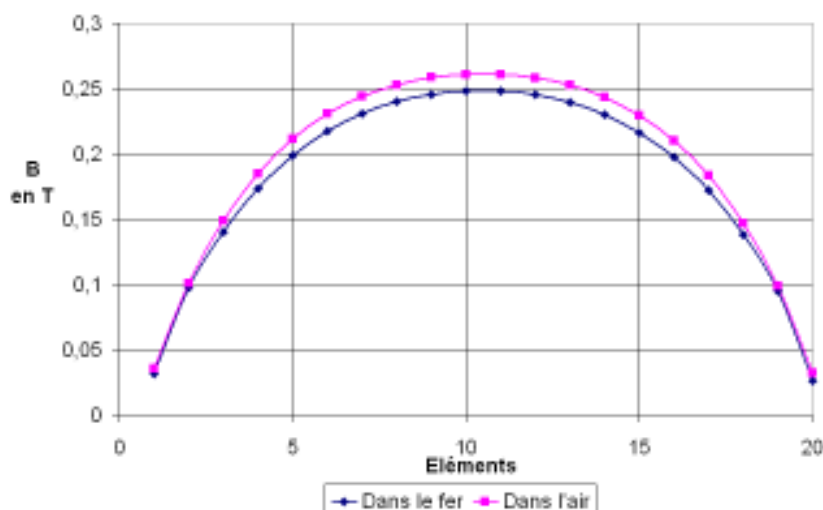


FIG. 3.5 – Répartition de la valeur élémentale de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.

3.5.3 En utilisant la formulation imbriquée

Dans cette étude, pour la même structure, les résultats des calculs effectués précédemment avec la formulation en potentiel vecteur et la formulation en potentiel scalaire sont ré-utilisés : la composante B_n est celle calculée en potentiel vecteur, comme montrée sur la Figure 3.6, et la composante H_t celle calculée en potentiel scalaire, comme illustrée sur la Figure 3.7. En principe, la continuité de B_n est assurée de manière naturelle en potentiel vecteur et de même celle de H_t en potentiel scalaire. Les résultats, illustrés sur les Figures 3.6 et 3.7, montrent que ce n'est pas le cas pour les valeurs élémentales.

La discontinuité des valeurs élémentales de H_t reste importante même en potentiel scalaire, comme le prouve la Figure 3.7. Des rapports de 130 entre les deux méthodes sont toujours constatés. La continuité du champ B_n au niveau des éléments n'est toujours pas assurée en potentiel vecteur, une différence de 10 % est toujours constatée entre les deux répartitions, dans le fer et dans l'air. Cette discontinuité reste toujours moins importante que la discontinuité de H_t en potentiel scalaire.

Ces discontinuités peuvent s'expliquer par le fait que ces valeurs sont des valeurs moyennes sur l'élément et tiennent donc compte des valeurs du potentiel aux noeuds de l'élément et en particulier ceux qui ne sont pas sur l'interface.

A la section suivante, en calculant les valeurs nodales, il sera montré que la continuité de H_t est naturellement assurée en potentiel scalaire, de même pour celle de B_n en potentiel vecteur.

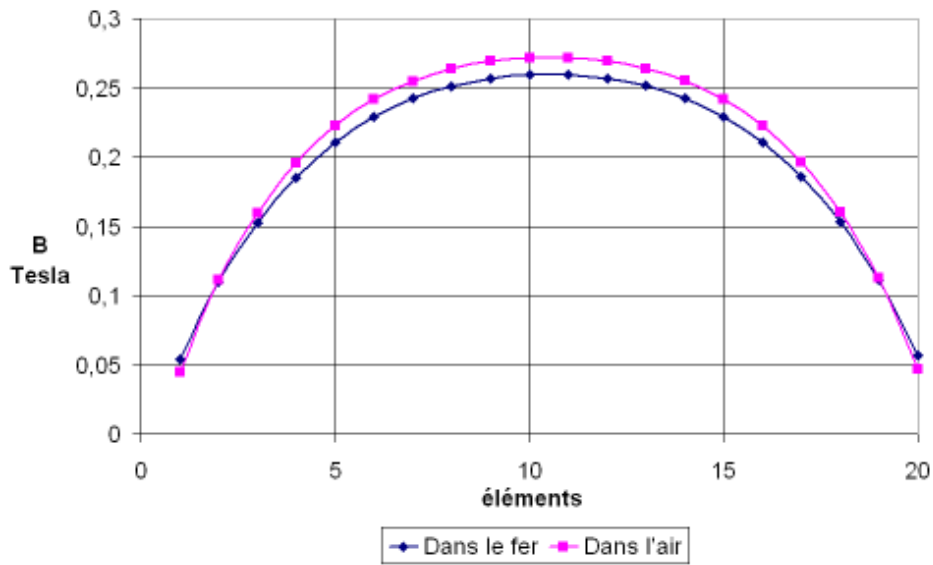


FIG. 3.6 – Répartition de la valeur élémentaire de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.

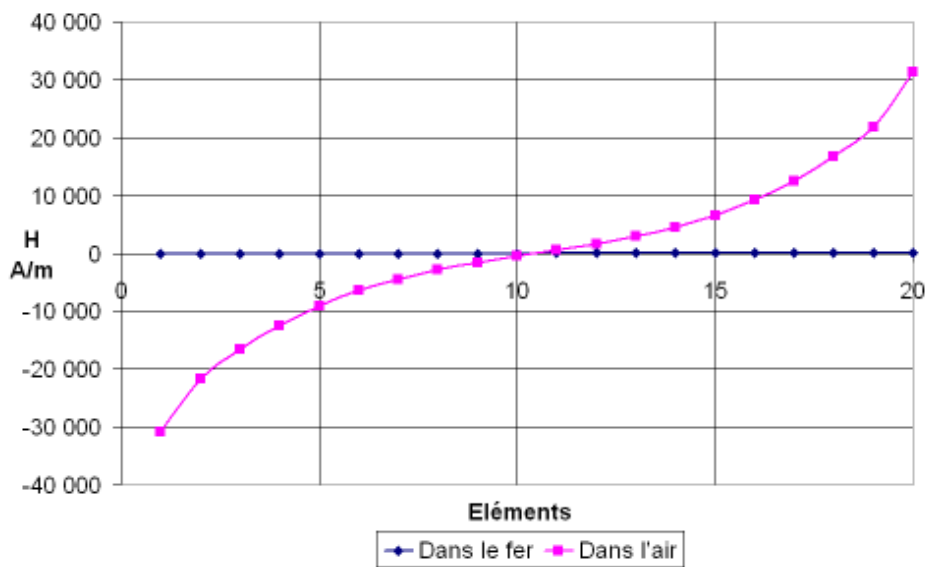


FIG. 3.7 – Répartition de la valeur élémentaire de la composante normale H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.

3.5.4 Calcul des densités de force

Les répartitions de densité de force obtenues sont reportées sur les Figures 3.8 et 3.9. Elles montrent que, quelque soit la méthode de calcul de force exploitée, la formulation utilisée influe peu. Dans un premier temps nous pouvons remarquer que les densités de force obtenues sont négatives et donc dirigées vers l'aimant selon l'axe Y mais dans le sens opposé. Ces densités de force tentent bien de refermer l'entrefer.

La Figure 3.8 montre les différentes répartitions de la densité de force calculée avec la méthode du tenseur de Maxwell avec les trois formulations possibles de calcul de champ. Les formulations en potentiel scalaire, vecteur et imbriquées donnent des résultats conformes à ceux attendus intuitivement : la densité de force est plus grande au centre et diminue sur les bords.

Nous obtenons au maximum des différences de 10 % au centre de l'interface entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire et de même entre la formulation imbriquée et le potentiel scalaire. L'utilisation de la formulation imbriquée permet de réduire les différences au niveau des bords de l'interface (a,b) entre la formulation en potentiel vecteur et celle en potentiel scalaire. Une différence de 26 % entre la formulation imbriquée et le potentiel scalaire peut être observée, tandis qu'entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, la différence passe de 26 à 43 %.

La Figure 3.9 montre les différentes répartitions de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie avec les trois possibilités de calcul de champ. Les résultats obtenus ne sont pas conformes à ceux attendus intuitivement : la densité de force vers les bords est très élevée par rapport à la densité au centre. Bien qu'il ne s'agisse pas ici de comparer les deux méthodes de calcul, la valeur maximale de la densité de force obtenue par la méthode de la dérivée de l'énergie est relativement très élevée.

Nous remarquons que les valeurs de force avec la formulation de la dérivée de l'énergie située au centre de la pièce sont proches de celles obtenues avec le tenseur de Maxwell. Mais plus on se rapproche des bords plus la valeur de la force augmente atteignant des valeurs excessivement élevées de l'ordre de $400\,000\text{ N.m}^{-2}$.

Cette différence peut s'expliquer assez facilement.

Pour le calcul de la densité de force, les valeurs de champ utilisées (H_t et B_n) sont celles de l'air. Avec la formulation de la dérivée de l'énergie, la composante tangentielle du champ d'excitation est multipliée par $(\mu_r - 1)$ soit ici par 999. Les erreurs de discontinuité sont donc multipliées par 999 et au vu des valeurs très élevées de H_t dans l'air, il est compréhensible que nous obtenions des valeurs de densité de force aussi excessives sur les bords de l'interface ab.

3. Forme faible des équations du champ et densités de forces magnétiques

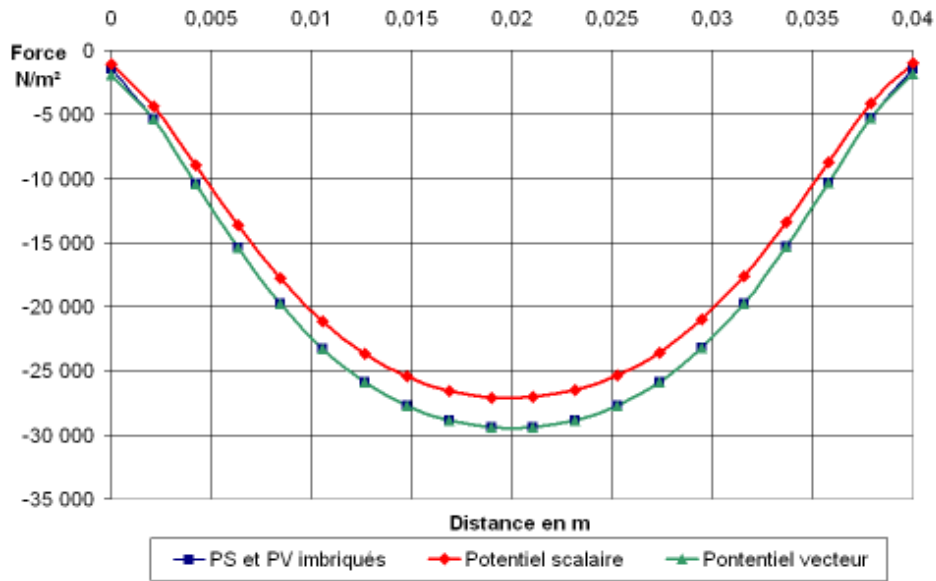


FIG. 3.8 – Répartition de la densité de force calculée avec la méthode du tenseur de Maxwell suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs élémentaires de H_t et B_n .

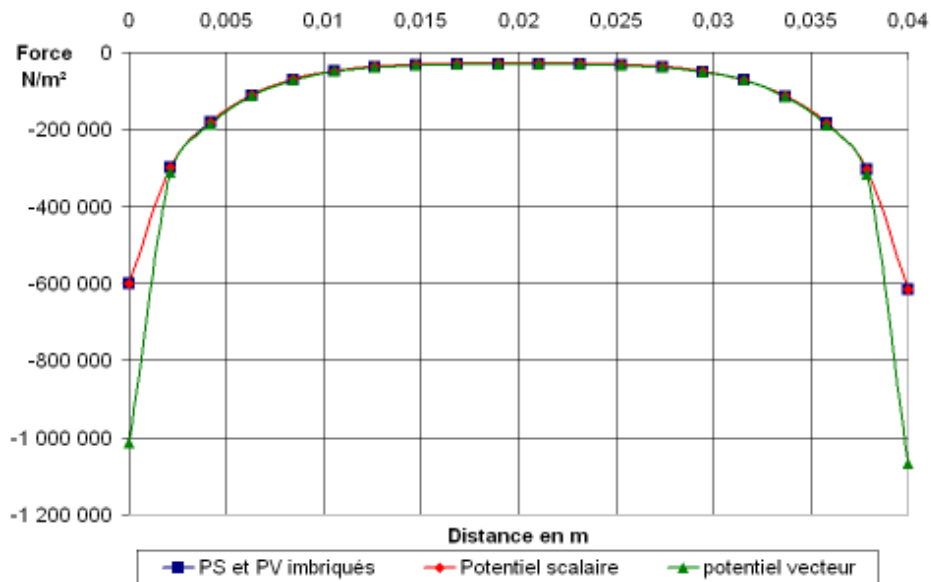


FIG. 3.9 – Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs élémentaires de H_t et B_n .

3.6 Calcul avec les valeurs nodales des composantes du champ

Dans cette partie, les composantes du champ sont calculées au niveau de l'interface (a,b).

Nous savons que dans un élément quadratique bilinéaire, le champ magnétique n'est pas constant. Il est alors possible de calculer les composantes du champ juste au niveau de l'interface.

Ceci peut se faire par l'intermédiaire des coordonnées locales (u, v) de l'élément de référence. En fixant les valeurs de ces coordonnées locales à 1 ou à -1, nous pouvons calculer les valeurs nodales des composantes du champ.

Pour calculer la répartition de la valeur nodale dans le fer, par exemple, il faut d'abord sélectionner les éléments dans le fer au niveau de l'interface. Sur chacun de ces éléments, les valeurs de la composante sur les noeuds à l'interface sont évaluées. Si un noeud de l'interface appartient à deux éléments adjacents, c'est la valeur moyenne des valeurs nodales calculées sur ces éléments qui lui est affectée.

Avec notre code de calcul, les résultats obtenus sont présentés ci-dessous.

3.6.1 En utilisant la formulation potentiel vecteur

La Figure 3.10 montre les résultats obtenus en potentiel vecteur. Les répartitions des valeurs nodales de H_t dans le fer ou dans l'air sont quasiment les mêmes que celles des valeurs élémentales respectives montrées sur les Figures 3.3 et 3.4.

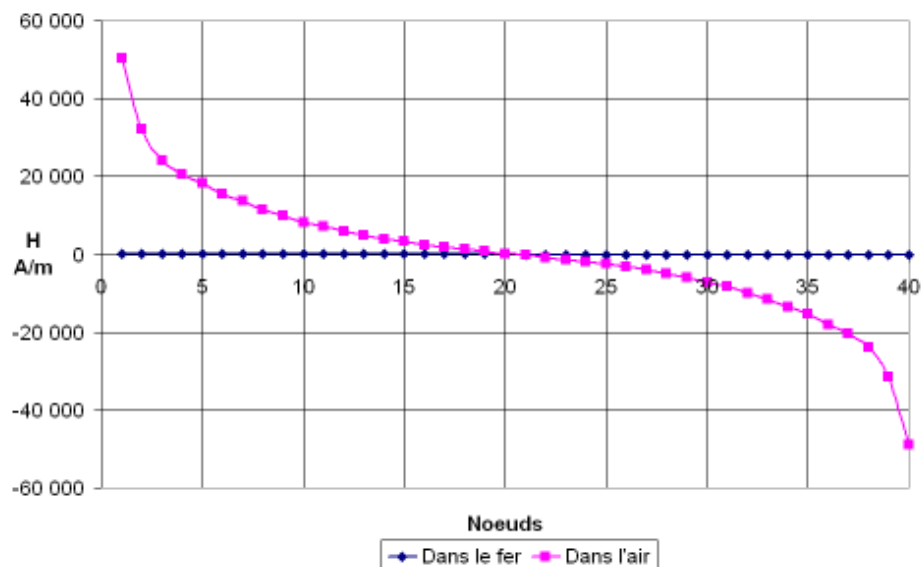


FIG. 3.10 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.

Le fait de calculer la composante H_t juste à l'interface ne diminue pas la discontinuité de H_t qui reste relativement importante. Un rapport de 130 est toujours observé entre les deux répartitions de H_t .

3.6.2 En utilisant la formulation potentiel scalaire

En potentiel scalaire, la Figure 3.11 montre que les répartitions des valeurs nodales de B_n dans le fer et dans l'air ne diffèrent pas énormément de celles des valeurs élémentales respectives montrées sur la Figure 3.5.

La répartition des valeurs nodales de B_n dans le fer montre une certaine dissymétrie. Même sur les noeuds de l'interface et en dehors des angles, nous pouvons constater que la continuité de B_n n'est pas respectée. De plus, des écarts de l'ordre de 10 % entre la répartition de B_n dans le fer et dans l'air sont toujours observables.

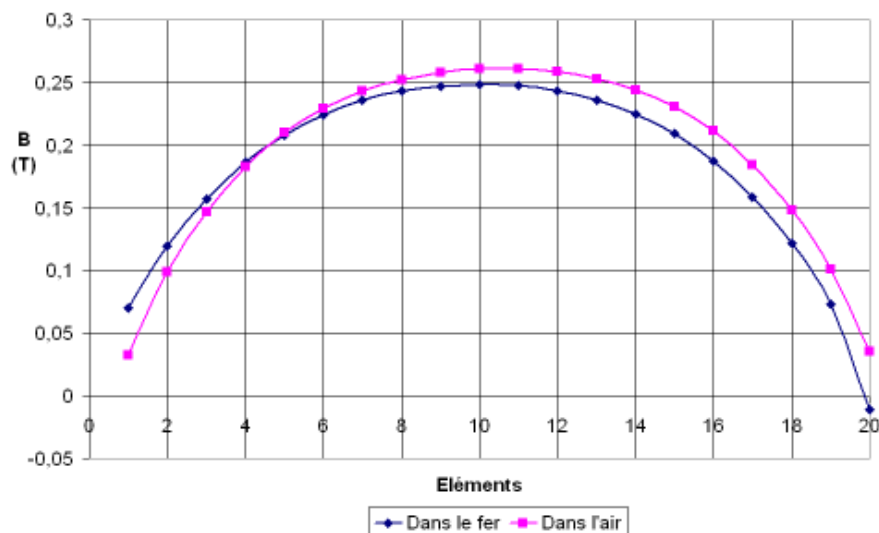


FIG. 3.11 – Répartition de la valeur nodale de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation en potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.

3.6.3 En utilisant la formulation imbriquée

Comme avec les valeurs élémentales, les résultats obtenus avec la formulation en potentiel vecteur et la formulation en potentiel scalaire ont été ré-utilisés : la composante B_n est celle calculée en potentiel vecteur, comme montré sur la Figure 3.12, et la composante H_t , celle calculée en potentiel scalaire, comme illustré sur la Figure 3.13.

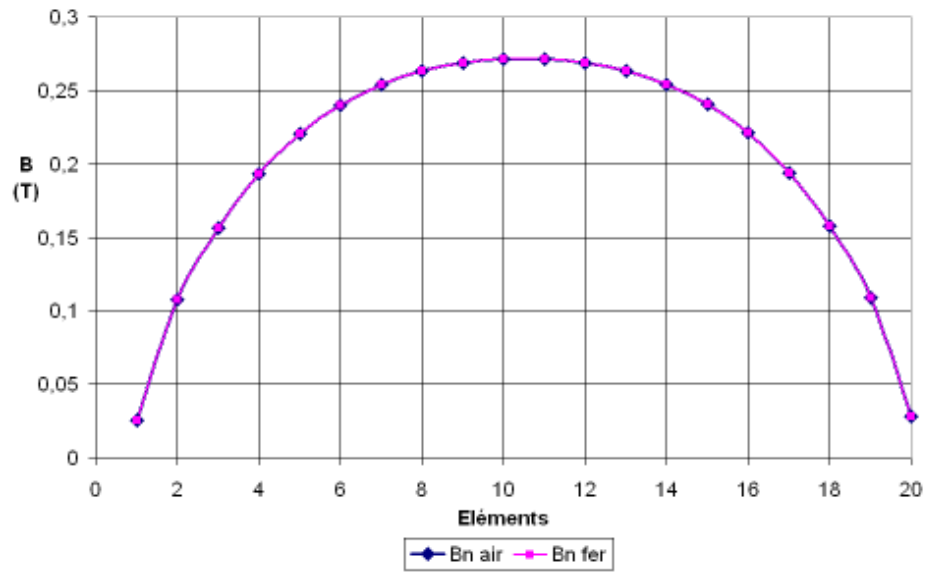


FIG. 3.12 – Répartition de la valeur nodale de la composante normale B_n dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec le potentiel vecteur - 20 éléments sur l'interface.

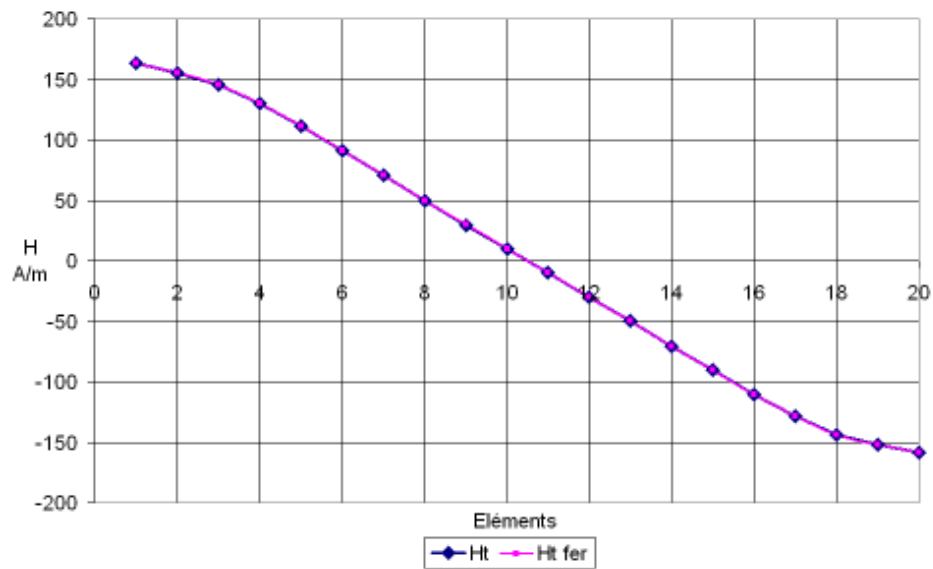


FIG. 3.13 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer et dans l'air, le long de l'interface (a,b) calculée avec le potentiel scalaire - 20 éléments sur l'interface.

Cette fois-ci, leurs continuités à travers l'interface fer et air sont parfaitement assurées, ce qui est conforme à la théorie.

Avec la formulation imbriquée nous devrions avoir des densités de force semblables entre la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode de la dérivée de l'énergie étant donné que la continuité de H_t est cette fois respectée.

3.6.4 Calcul des densités de force

Ce paragraphe présente l'influence de la discontinuité de B_n en potentiel scalaire et de H_t en potentiel vecteur sur le calcul de la densité de force magnétique en utilisant le tenseur de Maxwell ou la méthode de la dérivée de l'énergie.

La Figure 3.14 montre les résultats du calcul de la densité de force avec le tenseur de Maxwell et avec les trois formulations de champ utilisées. Les résultats sont quasiment identiques à ceux de la Figure 3.8 calculés à partir des valeurs élémentales du champ.

Nous retrouvons une valeur maximale de $29\,419\text{ N.m}^{-2}$ avec des différences de 10 % au centre de l'interface entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, et de même entre la formulation imbriquée et le potentiel scalaire. L'utilisation de la formulation imbriquée permet de réduire les différences au niveau des bords entre le potentiel vecteur et le potentiel scalaire. Une différence de 26 % entre la formulation imbriquée et le potentiel scalaire est constatée, tandis qu'entre le potentiel scalaire et le potentiel vecteur, la différence est de 43 %.

La Figure 3.15 montre le calcul de la densité de force avec la méthode de la dérivée de l'énergie avec les trois possibilités de calcul de champ. Le résultat en potentiel vecteur est identique à celui obtenu avec les valeurs élémentales du champ, montré sur la Figure 3.9. Ce résultat est cohérent car en potentiel vecteur et avec les valeurs nodales nous avons toujours une discontinuité très importante de H_t , et surtout dans un même ordre de grandeur avec un rapport de 130 entre la répartition de H_t dans l'air et dans le fer. C'est pour ces raisons que nous obtenons toujours des densités de forces excessivement élevées ($400\,000\text{ N.m}^{-2}$).

Par contre, les résultats obtenus avec la formulation imbriquée et avec le potentiel scalaire sont très différents de ceux avec les valeurs élémentales, comme le montre la Figure 3.16. Ils sont, en valeur numérique, proches de ceux obtenus avec le tenseur de Maxwell. De plus, la forme obtenue est plus cohérente avec celle attendue intuitivement. Nous obtenons comme valeur maximale une densité de force de l'ordre de $29\,728\text{ N.m}^{-2}$. Ce résultat est compréhensible car en potentiel scalaire et en imbriqué la continuité de H_t est assurée, et la discontinuité de B_n a moins

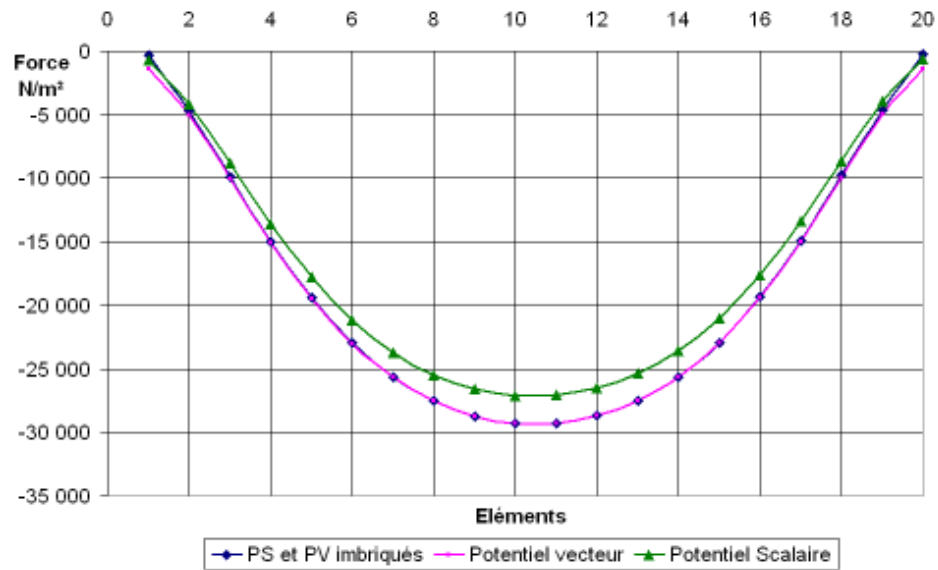


FIG. 3.14 – Répartition de la densité de force calculée avec la méthode du tenseur de Maxwell suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t .

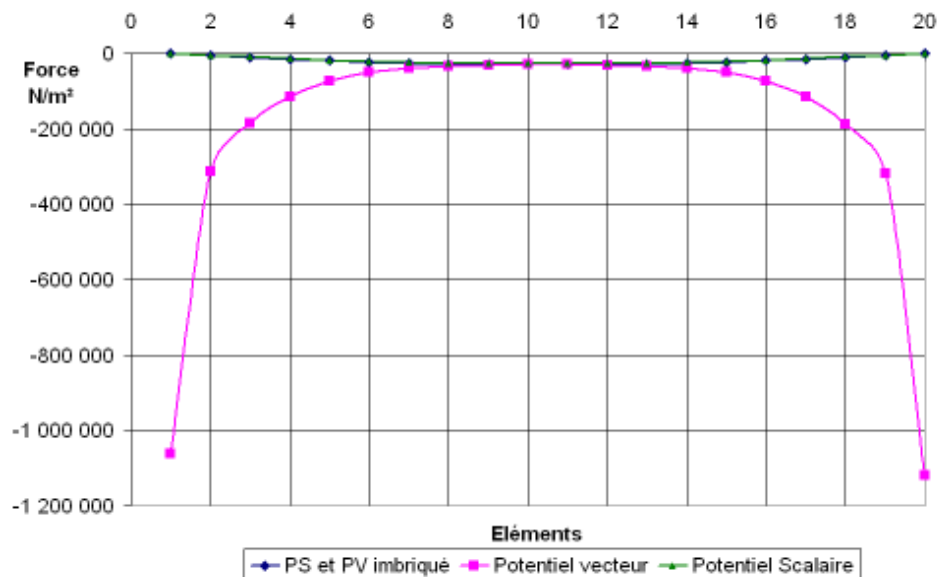


FIG. 3.15 – Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie suivant les trois possibilités de calcul du champ et avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t .

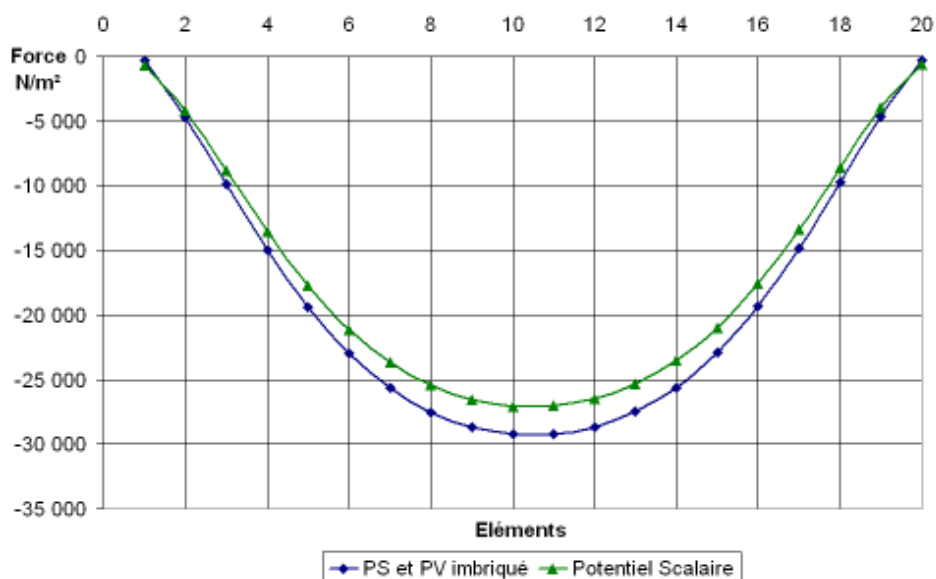


FIG. 3.16 – Répartition de la densité de force calculée avec la méthode de la dérivée de l'énergie calculée avec les valeurs nodales des composantes B_n et H_t en formulation imbriquée et en potentiel scalaire.

d'influence, vu qu'il y a, à peine 10% d'écart entre la répartition de B_n dans le fer et celle de l'air.

3.7 Etude en fonction du maillage

Pour confirmer les résultats obtenus avec le code de calcul développé par nos soins, une étude, réalisée avec le logiciel de simulation ANSYS multiphysics, sur la répartition des composantes du champ calculées dans le fer et dans l'air le long de l'interface (a,b) a été effectuée.

Cette étude s'est faite en fonction du maillage utilisé, c'est à dire en fonction du type et du nombre d'éléments imposés sur l'interface. Pour cela, deux types d'éléments ont été considérés : des éléments quadrangulaires linéaires et des éléments quadrangulaires quadratiques.

Comme montré sur les Figures 3.17 différentes densités de maillage ont été utilisées. La densité la plus faible est composée de 10 éléments répartis le long de l'interface [ab], ce qui représente des éléments de 4 mm de côté pour mailler une pièce de 4 cm de côté, et la densité la plus élevée est composée de 90 éléments répartis le long de l'interface [ab] ce qui donne des éléments de 0.44 mm de côté pour mailler la même pièce.

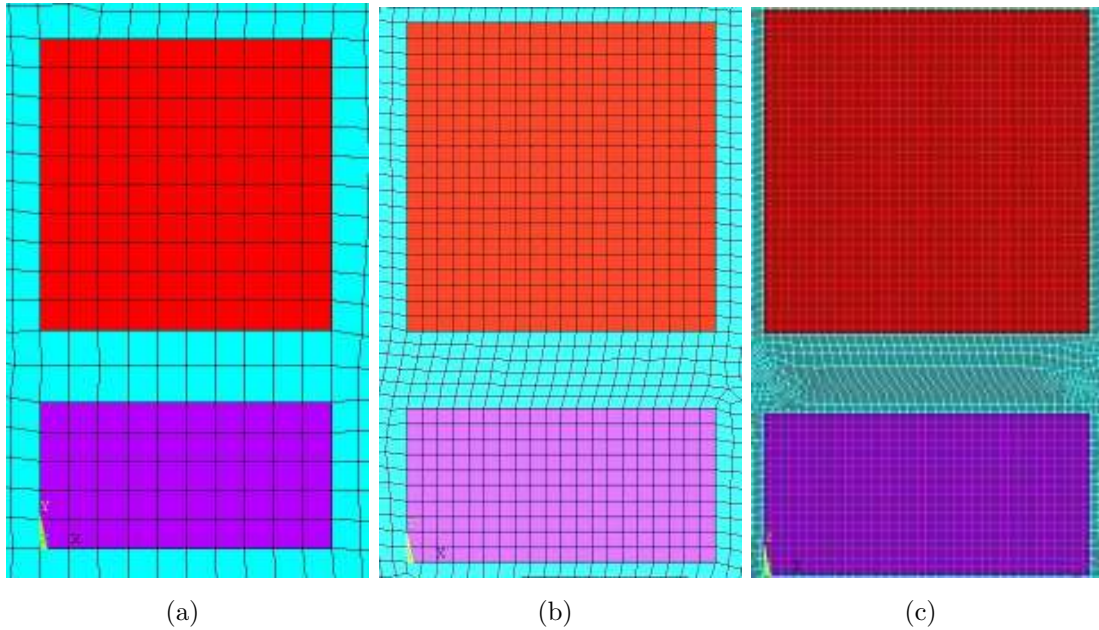


FIG. 3.17 – Maillage utilisant 10 éléments (a), 20 éléments (b), 90 éléments (c) le long de l'interface [ab]

Cependant, il faut noter que cette étude n'utilise que la formulation en potentiel vecteur, et les composantes du champ sont calculées au niveau des noeuds, car en 2D le logiciel ANSYS propose uniquement cette formulation [Ans07]. Ainsi, dans cette partie, seules les valeurs nodales des composantes du champ sont présentées.

3.7.1 Calcul avec des éléments linéaires

Les résultats du calcul sous ANSYS avec les éléments linéaires sont présentés sur les Figures 3.18, 3.19 et 3.20. La comparaison de la répartition de H_t dans le fer (FIG. 3.18) avec celle dans l'air (FIG. 3.19, FIG. 3.20) montre que la discontinuité des valeurs nodales de H_t reste importante même avec un maillage très fin. Ces résultats confirment ceux précédemment obtenus avec notre code de calcul.

Avec 10 éléments le long de l'interface [ab], ce qui représente des éléments quadrangulaires de 4 mm de côté pour mailler une pièce ferromagnétique de 40 mm de côté, la discontinuité de H_t dans l'air et dans le fer est vraiment importante, atteignant même des rapports de l'ordre de 400 entre les deux répartitions.

En augmentant le nombre d'éléments sur l'interface, nous constatons que le rapport entre les répartitions de H_t dans le fer et dans l'air diminue mais reste quand même très élevé. Par exemple avec 30 éléments nous avons un rapport de 110, avec 50 éléments il passe à 60, avec 70 éléments il est à 38 et enfin avec 90 éléments nous obtenons un rapport de 35 comme montré sur le Tableau 3.4. Alors que si les conditions de passage étaient respectées, le rapport entre le $H_{t_{air}}$ et le

Nombre d'éléments	Rapport de $H_{t_{air}}/H_{t_{fer}}$ avec des éléments linéaires
10	400
30	110
50	60
70	38
90	35

TAB. 3.4 – Evolution du rapport entre le $H_{t_{air}}$ et le $H_{t_{fer}}$ en fonction du nombre d'éléments linéaires le long de l'interface [ab].

$H_{t_{fer}}$ devrait être égal à 1.

En conclusion, avec des éléments linéaires le long de l'interface (a,b) il est très difficile de respecter les conditions de passage d'un milieu à un autre de perméabilité différente. Même avec 90 éléments, ce qui représente des éléments de 0.44 mm de côté pour mailler une pièce ferromagnétique de 4 cm de côté, il est très difficile de ne pas avoir de discontinuité.

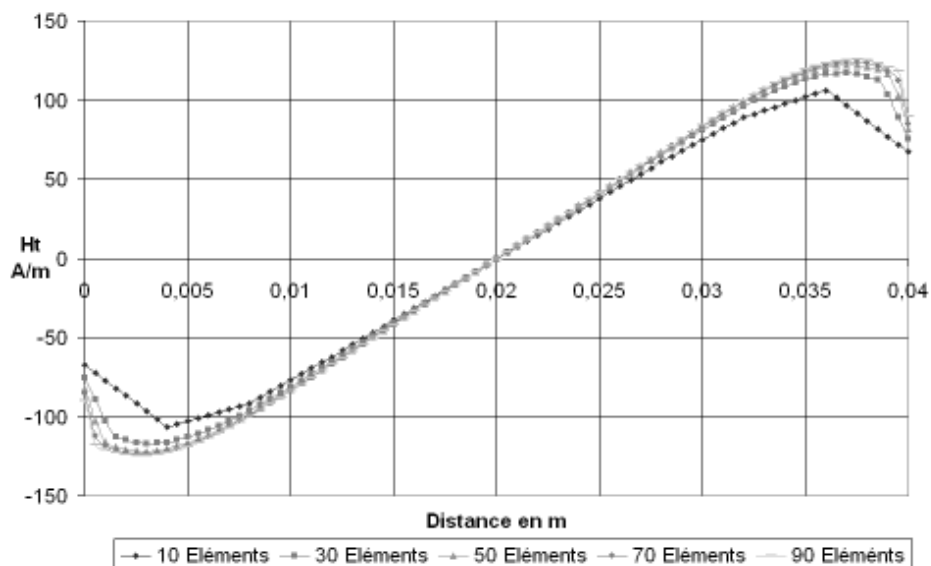


FIG. 3.18 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface

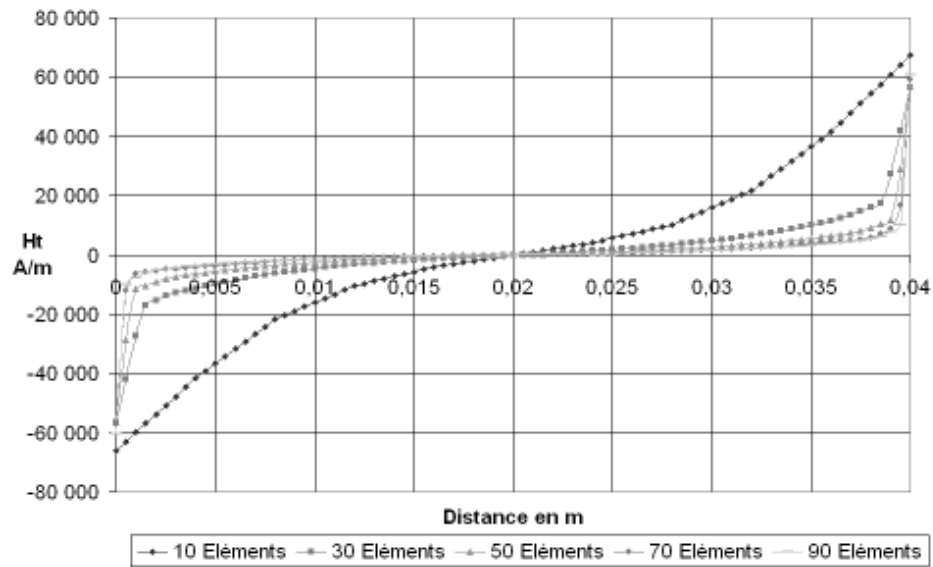


FIG. 3.19 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air tout le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface

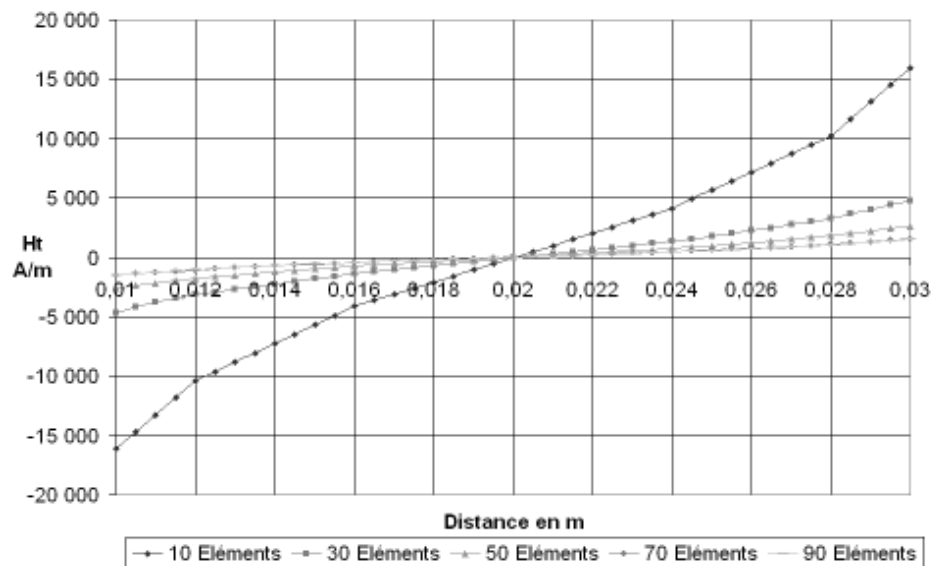


FIG. 3.20 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air au milieu de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments linéaires imposés sur l'interface

3.7.2 Calcul avec des éléments quadratiques

Les résultats du calcul sous ANSYS avec les éléments quadratiques sont présentés sur les Figures 3.21, 3.22 et 3.23. La comparaison de la répartition de H_t dans le fer (FIG. 3.21) avec celle dans l'air (FIG. 3.23) montre que la discontinuité des valeurs nodales de H_t diminue.

L'utilisation des éléments quadratiques permet de réduire très nettement la discontinuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique. Avec 10 éléments le long de l'interface (a,b) de la pièce ferromagnétique, nous obtenons un rapport de 66 entre la répartition de H_t dans l'air et celle du fer. Avec 30 éléments ce rapport passe à 9,2 et à partir de 90 éléments la continuité de H_t est respectée au milieu de l'interface, comme montré sur le Tableau 3.5. Mais à mesure que l'on se rapproche des coins a et b, la valeur de la composante tangentielle oscille.

Le nombre d'éléments pour arriver à respecter la continuité au milieu de l'interface est tout de même très élevé. Avec 90 éléments nous avons comme valeur maximale de H_t dans le fer 130 A.m^{-1} et celle dans l'air est de 135 A.m^{-1} .

Avoir un grand nombre d'éléments pose un problème lors de la conception d'actionneur innovant où plusieurs configurations de structure doivent être analysées. Il n'est pas toujours possible de mener des calculs avec un maillage aussi fin, 90 éléments juste pour une interface de 4 cm de long.

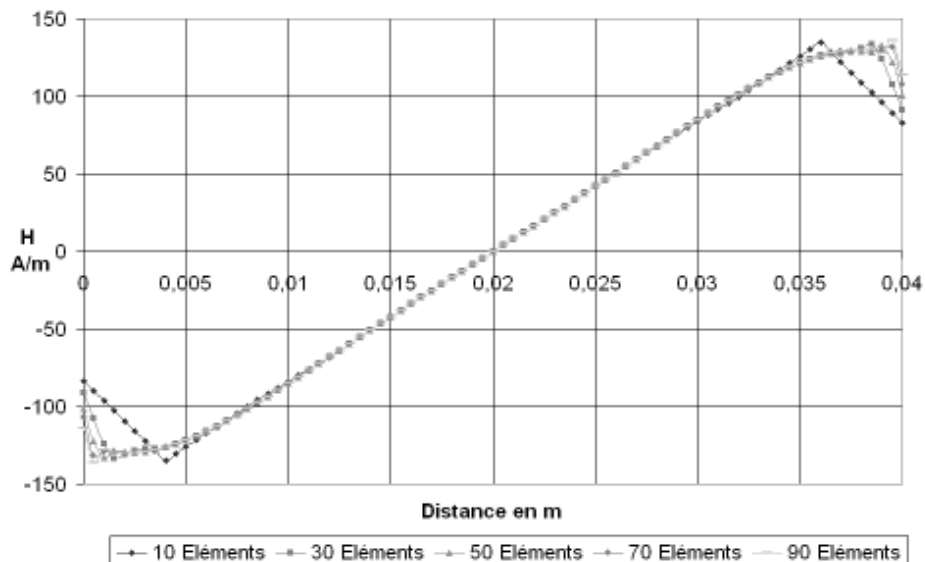


FIG. 3.21 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans le fer le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques sur l'interface

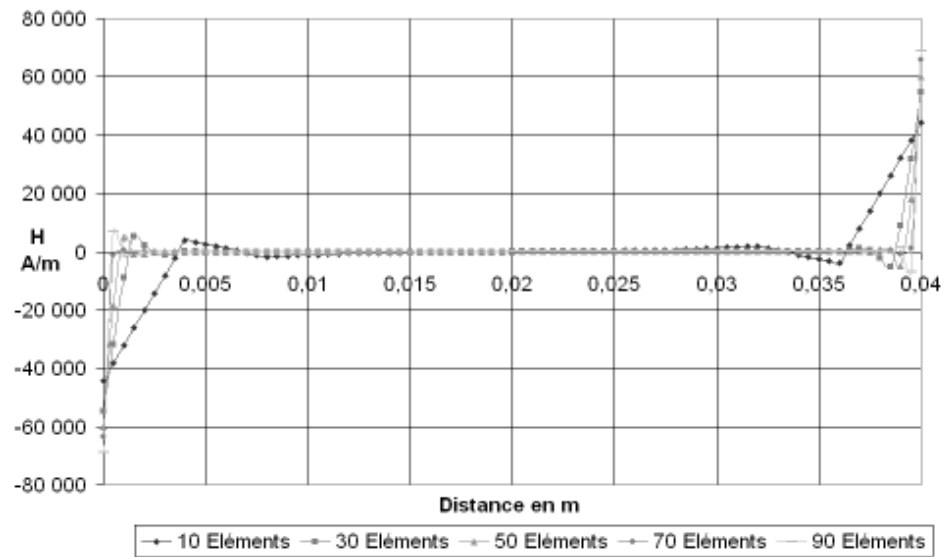


FIG. 3.22 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air tout le long de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques imposés sur l'interface

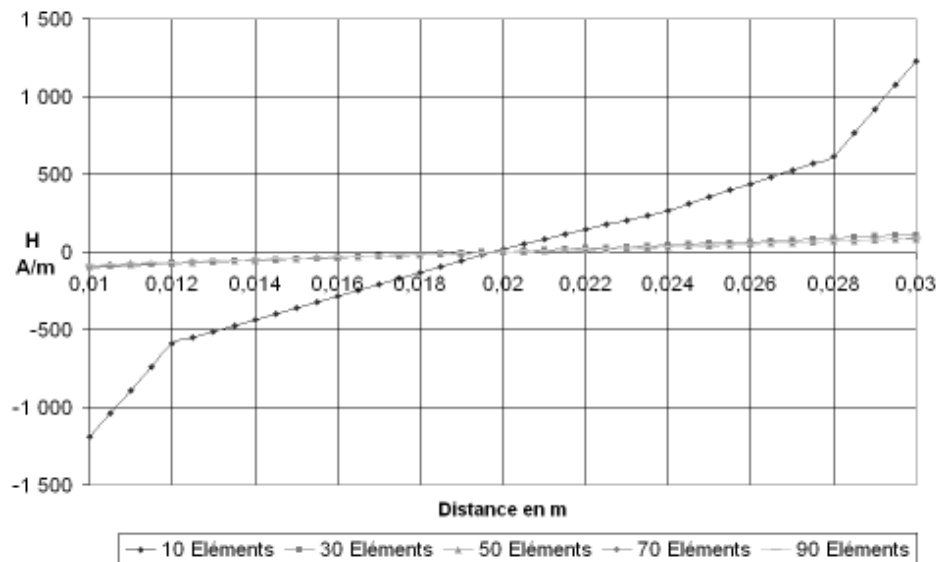


FIG. 3.23 – Répartition de la valeur nodale de la composante tangentielle H_t dans l'air au milieu de l'interface (a,b) calculée avec la formulation potentiel vecteur sous ANSYS en fonction du nombre d'éléments quadratiques imposés sur l'interface

Nombre d'éléments	Rapport de Ht_{air}/Ht_{fer} avec des éléments quadratiques
10	66
30	9.2
50	1.1
70	1.05
90	1.005

TAB. 3.5 – Evolution du rapport entre le Ht_{air} et le Ht_{fer} en fonction du nombre d'éléments quadratiques le long de l'interface [ab].

En conclusion les résultats du calcul sous ANSYS concordent avec les résultats obtenus avec le code développé. Ils confirment qu'avec une formulation en potentiel vecteur la discontinuité de la composante Ht est importante mais en utilisant des éléments quadratiques et en maillant de manière très fine, il est possible de la réduire.

Les éléments quadratiques améliorent encore les résultats au niveau quantitatif. Mais au niveau qualitatif on peut observer que des oscillations apparaissent pour les répartitions de H_t le long de l'interface [ab].

3.8 Calcul de la force résultante

Pour montrer la cohérence des calculs effectués, la force résultante s'exerçant sur la pièce ferromagnétique (FIG. 3.2) a été calculée à l'aide des deux méthodes de calcul de force utilisées. Le Tableau 3.6 donne les résultats obtenus suivant les différentes combinaisons de calcul possibles.

Le Tableau 3.6 montre que la force résultante calculée avec le tenseur de Maxwell est peu dépendante de la formulation et de la manière dont sont calculées les composantes du champ. Par contre, la méthode de la dérivée de l'énergie donne des valeurs non significatives sauf en potentiel scalaire et en imbriquée à condition d'utiliser les valeurs nodales du champ. Ceci se comprend aisément au vu des allures des densités de force obtenues. La méthode de la dérivée de l'énergie est sensible à la discontinuité du champ Ht .

Suite à ces résultats, des calculs complémentaires en potentiel vecteur et en utilisant la méthode de la dérivée de l'énergie ont été réalisés.

Le Tableau 3.7 montre les résultats obtenus avec 200 éléments. Ce tableau présente aussi le calcul de la force résultante à l'aide du principe des travaux

avec 20 éléments		Maxwell (N.m ⁻¹)	Dérivée de l'énergie (N.m ⁻¹)
Calcul à partir des valeurs élémentales	Potentiel vecteur	680	5470
	Potentiel scalaire	666	5440
	Imbriqué	684	5490
Calcul à partir des valeurs nodales	Potentiel vecteur	700	7400
	Potentiel scalaire	673	672
	Imbriqué	712	712

TAB. 3.6 – Résultats du calcul de la force résultante sur la pièce ferromagnétique.

	Eléments linéaires (200 éléments)	Eléments quadratiques (200 éléments)	Avec la dérivée de la Jacobienne locale (20 éléments)
Dérivée de l'énergie	2400 N.m ⁻¹	680 N.m ⁻¹	640 N.m ⁻¹

TAB. 3.7 – Résultats complémentaires sur le calcul de la force résultante.

virtuels en utilisant la dérivée de la Jacobienne locale.

Avec des éléments linéaires, l'augmentation de leur nombre améliore la valeur de la force globale mais il faut un nombre excessivement élevé (beaucoup plus de 200 éléments sur l'interface [ab] pour une pièce ferromagnétique de 4 cm de côté). Par contre, il faut utiliser un nombre élevé d'éléments quadratiques pour avoir un résultat significatif. Nous constatons qu'avec la dérivée de la Jacobienne locale, nous obtenons un résultat acceptable avec seulement 20 éléments.

Pour finir, les résultats du calcul de la force résultante confirment aussi les résultats obtenus précédemment. Ils montrent cependant l'intérêt d'utiliser la dérivée de la jacobienne locale pour calculer la force résultante [Cou84].

3.9 Conclusion

Dans ce chapitre, notre discussion ne porte pas sur la question de savoir quelle est la meilleure méthode qui calcule le mieux les densités de force magnétique, mais porte sur la question de savoir dans quelle mesure l'utilisation d'une forme faible des équations du champ peut influencer les résultats du calcul de la densité

de force magnétique.

Dans la littérature, il est connu depuis un certain nombre d'années, qu'une forme faible n'assure qu'une des deux conditions de passage du champ.

Dans cette étude, une analyse systématique et quantitative de l'influence d'une formule faible sur le respect de ces conditions de passage a été réalisée. Un des intérêts de l'étude est de présenter pour la première fois une quantification de celle-ci. Elle montre des résultats assez étonnants, en révélant notamment, dans le cas de notre exemple en 2D, la difficulté de réduire le saut de la composante H_t du champ lorsque la formulation en potentiel vecteur est utilisée.

Pour analyser l'influence de l'utilisation d'une forme faible sur le calcul des densités de force magnétique, il est judicieux de choisir des méthodes où la densité de force s'exprime explicitement en fonction des composantes du champ : la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode de la dérivée de l'énergie. Notre étude systématique, dans le cadre de notre exemple en 2D, a permis d'obtenir un certain nombre de résultats notamment :

- la méthode du tenseur de Maxwell est peu sensible à l'utilisation d'une forme faible, à la manière dont les composantes du champ sont calculées et à la densité du maillage.
- la méthode de la dérivée de l'énergie ne donne des résultats cohérents qu'en potentiel scalaire, avec un maillage très fin et en utilisant les valeurs nodales du champ.

Il reste à étendre l'étude à d'autres structures. Si les résultats montrés se confirment alors il semble qu'avec la formulation en potentiel vecteur et la méthode de la dérivée de l'énergie, il est assez difficile d'utiliser uniquement les composantes du champ pour le calcul de la déformation mécanique d'une structure dans un cas concret. Notons cependant que la méthode de la dérivée de la jacobienne locale associée à la forme faible permet de déterminer de manière satisfaisante la force résultante.

Une solution proposée, pour résoudre ce problème, serait d'imposer de manière explicite, au niveau des conditions de passage, la continuité de B_n et H_t (Forme forte des équations du champ). Malgré l'abondante littérature sur le calcul des densités de force magnétique cette approche a été très peu proposée.

Dans la conception de notre pompe électroactive, pour le dimensionnement de la capsule remplie de fluide magnétorhéologique, il est important de connaître très précisément les forces mises en jeu lors de sa déformation. Pour cela il faut connaître très précisément le champ magnétique situé au niveau de l'interface de la

capsule. Pour le connaître, dans le chapitre suivant, l'utilisation d'une forme forte des équations du champ est proposée et analysée.

Chapitre 4

Forme forte des équations du champ et conditions de passage

Sommaire

4.1	Introduction	125
4.2	Présentation de la méthode des différences finies	125
4.3	Forme intégrale particulière	127
4.4	Structure étudiée	129
4.5	Forme forte des équations du champ	129
4.5.1	Equations à l'intérieur des milieux	130
4.5.2	Les équations aux interfaces	131
4.5.2.1	Interface Air-Fer	131
4.5.2.2	Interface Air-Aimant	133
4.5.3	Equations aux limites	134
4.6	Résultats avec la forme forte des équations du champ	135
4.6.1	Formulation en potentiel vecteur	135
4.6.2	Formulation en potentiel scalaire magnétique	137
4.6.3	Comparaisons des différentes approches	140
4.6.3.1	Pour la composante B_n	140
4.6.3.2	Pour la composante H_t	142
4.7	Comparaison avec une étude expérimentale	143
4.7.1	Dispositif mis en place	143
4.7.2	Forme forte et étude expérimentale	145
4.7.2.1	Avec l'aimant centré	145
4.7.2.2	Avec l'aimant décalé de 4 cm	147
4.7.2.3	Avec l'aimant décalé de 6 cm	148
4.7.3	Forme faible et étude expérimentale	150
4.7.3.1	Avec l'aimant centré	150
4.7.3.2	Avec l'aimant décalé de 4 cm	151

4. *Forme forte des équations du champ et conditions de passage*

4.7.3.3	Avec l'aimant décalé de 6 cm	152
4.7.4	Au niveau des conditions de passage	154
4.8	Conclusion	155

4.1 Introduction

L'utilisation de la forme faible des équations du champ avec la méthode des éléments finis ne permet d'imposer fortement qu'une des conditions de passage : B_n dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur et H_t en potentiel scalaire. L'autre condition n'est imposée que faiblement : elle est garantie que lorsque le nombre d'éléments tend vers l'infini.

Dans ce chapitre, pour pallier ce problème, une solution proposée est d'imposer de manière explicite la continuité des deux composantes. La solution la plus simple est ainsi d'utiliser les équations locales c'est-à-dire la forme forte des équations du champ. Cette dernière est associée préférentiellement à la méthode des différences finies pour sa facilité de mise en oeuvre par rapport à la méthode des éléments finis.

Dans un premier temps, afin d'appréhender cette problématique, le principe de la méthode des différences finies est rappelé.

Ensuite, une forme intégrale exploitée pour calculer le champ magnétique dans le logiciel DIFIMEDI utilisé dans l'ancien laboratoire LEEI est présentée.

Dans un troisième temps, l'approche permettant de prendre en compte les deux conditions de passage avec la méthode des différences finies est illustrée à travers un exemple simple.

Enfin, un dispositif expérimental spécialement conçu est utilisé pour réaliser une étude comparative entre la méthode utilisant la forme forte des équations du champ, la méthode des éléments finis et les relevés expérimentaux.

4.2 Présentation de la méthode des différences finies

Parmi les méthodes de résolutions des équations aux dérivées partielles couramment pratiquées, la méthode des différences finies est la plus facile d'accès, puisqu'elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation/différentiation d'une part, et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part.

Cette méthode est largement utilisée par les thermiciens pour résoudre, par exemple, des problèmes de diffusion et de convection naturelle, appliqués dans des géométries simples [Ben01] [Wel74].

La méthode des différences finies repose sur l'utilisation du développement limité de Taylor.

Dans un espace de dimension 1, la décomposition d'une fonction f autour d'un

point x_i peut être donnée par [Wel74] :

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3f}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (4.1)$$

et de même par :

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left(\frac{df}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3f}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (4.2)$$

En additionnant les équations 4.1 et 4.2 la dérivée seconde suivante est obtenue :

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{[f(x_i + h) + f(x_i - h) - 2f(x_i)]}{h^2} + o(h^2) \quad (4.3)$$

Le terme $o(h^2)$ à la fin de l'équation 4.3, indique que celle-ci permet de calculer la dérivée seconde avec une erreur plus petite que h^2 .

Pour un maillage donné, l'erreur entre la solution approchée et la solution réelle est déterminée par l'erreur de troncature, comme définie notamment dans le théorème de Taylor avec reste intégral ou au sens de la restriction à une partie finie d'une série de Taylor qui possède un nombre infini de termes.

Pour 3 points, à égale distance dans l'espace et dans un même milieu i , la représentation de la dérivée seconde en différence centrée peut être écrite comme suit :

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (4.4)$$

Pour la représentation de la dérivée première plusieurs approches sont possibles. Par exemple si l'équation 4.1 est tronquée après le terme linéaire en h , la dérivée première avant est obtenue :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h} + o(h) = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (4.5)$$

Une autre approche peut consister à tronquer l'équation 4.2, dans ce cas c'est la dérivée première arrière qui s'écrit :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i) - f(x_i - h)}{h} + o(h) = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (4.6)$$

Ou encore l'approche, utilisée par la suite, qui consiste à soustraire l'équation 4.1 de l'équation 4.2 en négligeant les termes en h^3 et supérieurs. Dans ce cas, l'expression suivante correspondant à une dérivée première centrée est ainsi obtenue :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} + o(h^2) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (4.7)$$

L'avantage de la méthode des différences finies est sa facilité de mise en oeuvre. De plus, une extension en 2 ou 3 dimensions est facilement réalisable.

4.3 Forme intégrale particulière

Cette méthode est basée sur la forme intégrale des équations du champ magnétique [Dur68]. Cette forme est obtenue en intégrant l'équation de Poisson dans un domaine S limité par un contour C , ce qui donne :

$$\oint_C \frac{1}{\mu} \frac{dA}{dn} dl = \int_S f ds \quad (4.8)$$

La fonction f représente les excitations magnétiques. En potentiel vecteur cette forme intégrale correspond au théorème d'Ampère et en potentiel scalaire c'est la loi de conservation des flux ($f = 0$).

Pour illustrer cet exemple le maillage montré sur la Figure 4.1 est exploité.

L'équation 4.8 est appliquée sur une maille rectangulaire MNPQ avec un point 0 excentré de telle sorte que les branches soient inégales. La formule est appliquée sur la zone hachurée obtenue en menant les perpendiculaires aux branches h_1 , h_2 , h_3 , h_4 en leur milieu. Le point a est donc le milieu du segment [01], le point b le milieu de [02], le point c le milieu de [03] et le point d le milieu de [04].

Les dérivées premières aux points a , b , c , et d peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \text{en } a : \quad \frac{dA}{dn} &= \frac{A_1 - A_0}{h_1} & \text{en } b : \quad \frac{dA}{dn} &= \frac{A_2 - A_0}{h_2} \\ \text{en } c : \quad \frac{dA}{dn} &= \frac{A_3 - A_0}{h_3} & \text{en } d : \quad \frac{dA}{dn} &= \frac{A_4 - A_0}{h_4} \end{aligned} \quad (4.9)$$

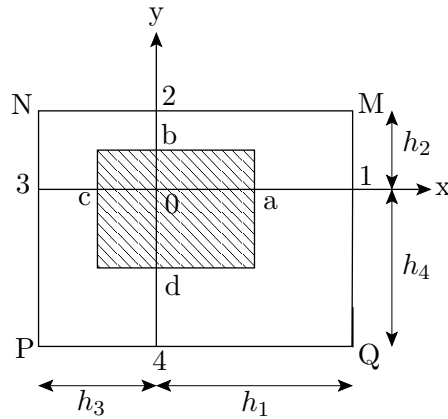


FIG. 4.1 – Maillage utilisé pour illustrer l'exemple de la forme intégrale des équations du champ.

En prenant f constant et égale à f_0 la formulation intégrale (Equation 4.8) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 h_1 \mu_1} (h_2 + h_4) (A_1 - A_0) + \frac{1}{2 h_2 \mu_2} (h_1 + h_3) (A_2 - A_0) \\ & + \frac{1}{2 h_3 \mu_3} (h_2 + h_4) (A_3 - A_0) + \frac{1}{2 h_4 \mu_4} (h_3 + h_1) (A_4 - A_0) \quad (4.10) \\ & = \frac{f_0}{4} (h_1 + h_3) (h_2 + h_4) \end{aligned}$$

Avec cette méthode, et au vu des équations 4.8 et 4.10, si un changement brutal de perméabilité magnétique est appliqué au niveau de l'interface [31] par exemple, il est facile de voir que seule la composante normale du champ magnétique est prise en considération dans les calculs.

Par conséquent en potentiel vecteur, seule la continuité de la composante normale du champ magnétique est assurée.

De même en potentiel scalaire, avec cette forme intégrale des équations du champ, seule la continuité de H_t est assurée.

Cette méthode peut être considérée comme une forme faible car seules les dérivées premières de la fonction inconnue interviennent.

Cette approche a été programmée et utilisée dans le logiciel DIFIMEDI (Différences Finies Méthode Directe) développée dans l'ancien laboratoire LEEI [LM78] [LM75].

Les calculs présentés par la suite, réalisés en différences finies, avec la forme forte des équations du champ n'utilisent pas cette technique.

4.4 Structure étudiée

Pour pouvoir comparer les résultats à ceux obtenus avec la méthode des éléments finis, une structure identique à celle utilisée dans le chapitre précédent est exploitée dans un premier temps.

Par contre, en tenant compte de la condition de symétrie au niveau de l'interface [pk] et pour gagner en temps de calcul, le domaine considéré correspond à la moitié de la structure.

La Figure 4.2 montre la structure étudiée et la grille utilisée. Cette dernière est composée de 10 éléments de 2 mm de côté, repartis le long de l'interface de [nb]. Ainsi en terme de densité de maillage les calculs en éléments finis et en différences finies sont comparables.

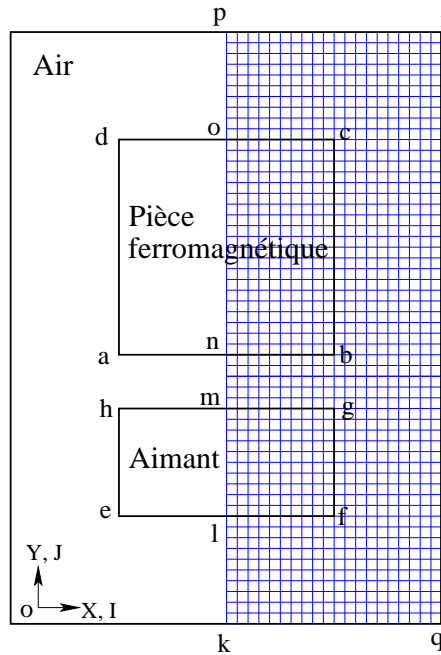


FIG. 4.2 – Structure étudiée en différences finies

4.5 Forme forte des équations du champ

Dans cette partie, seules les principales étapes de la mise en équation avec la forme forte sont décrites [Dur68] [Dur66a] [Dur66b] [Dur66c]. L'annexe C présente les équations utilisées de manière détaillée.

4.5.1 Equations à l'intérieur des milieux

Les équations constitutives des milieux pour l'aimant, l'air et le fer sont, respectivement :

$$\vec{B}_m = \mu_m \vec{H}_m + \vec{J}_r \quad (4.11)$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (4.12)$$

$$\vec{B}_f = \mu_f \vec{H}_f \quad (4.13)$$

Avec :

μ_m : Perméabilité magnétique de l'aimant.

μ_0 : Perméabilité magnétique de l'air.

μ_f : Perméabilité magnétique du fer.

\vec{J}_r : Polarisation magnétique.

En introduisant le potentiel vecteur \vec{A} (Equation 4.14) dans les équations constitutives des milieux, par exemple pour la pièce ferromagnétique, l'équation 4.15, représentant l'équation de Laplace, est obtenue dans le cas où la perméabilité magnétique est uniforme dans toutes les directions de l'espace.

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (4.14)$$

Pour un système invariant par translation, on a :

$$\frac{1}{\mu_f} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu_f} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = 0 \quad (4.15)$$

A étant la composante suivant l'axe d'invariance O_z du potentiel vecteur :

$$A = A_z \quad (4.16)$$

L'équation de Laplace 4.15 est également utilisée pour calculer le potentiel vecteur situé à l'intérieur des milieux air et aimant. Il suffit juste de remplacer, suivant le milieu considéré, la perméabilité magnétique du fer par celle de l'air ou de l'aimant.

En utilisant la méthode des différences finies sur la grille illustrée sur la Figure 4.3, l'équation 4.17 est obtenue pour un noeud I,J placé dans un milieu de perméabilité magnétique constante :

$$\frac{A_{I,J-1}}{k^2} + \frac{A_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) A_{I,J} + \frac{A_{I+1,J}}{h^2} + \frac{A_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (4.17)$$

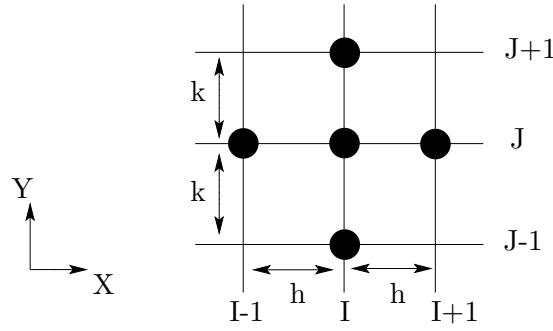


FIG. 4.3 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies à l'intérieur d'un matériau de perméabilité magnétique constante

4.5.2 Les équations aux interfaces

4.5.2.1 Interface Air-Fer

Au niveau des interfaces et notamment au niveau du segment [nb], la grille utilisée est illustrée sur la Figure 4.4.

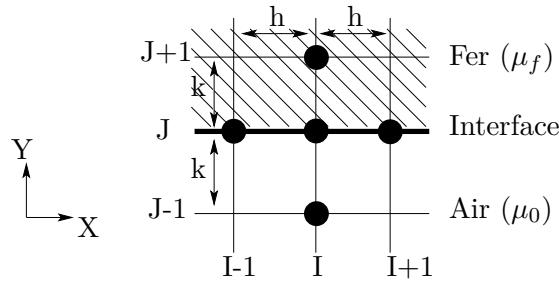


FIG. 4.4 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies au niveau des interfaces

En considérant le potentiel vecteur, la continuité de la composante H_t au niveau de l'interface s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{\mu_f} \frac{\partial A_{fer}}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{air}}{\partial y} \quad (4.18)$$

Avec la formule de Taylor et en utilisant la méthode des différences finies, l'équation suivante est obtenue :

$$A_{I,J-1} = A_{I,J} - k \frac{\partial A_{I,J}}{\partial y} + k^2 \frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial y^2} \quad (4.19)$$

L'équation de Laplace dans l'air permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial x^2} \quad (4.20)$$

En injectant l'expression 4.20 dans l'équation 4.19, la dérivée partielle par rapport à y du potentiel vecteur au niveau de l'interface [ab] du côté de l'air est obtenue :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial y}\right)_{air} = -\frac{A_{I,J-1}}{k} - \frac{k}{2h^2}A_{I-1,J} + \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2}\right)A_{I,J} - \frac{k}{2h^2}A_{I+1,J} \quad (4.21)$$

En utilisant la même procédure du côté du fer, la dérivée partielle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial y}\right)_{fer} = \frac{k}{2h^2}A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2}\right)A_{I,J} + \frac{k}{2h^2}A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{k} \quad (4.22)$$

Pour obtenir l'équation du potentiel vecteur d'un noeud I,J situé sur l'interface [nb], il ne reste plus qu'à imposer la continuité de la composante H_t . Pour cela il faut injecter dans l'équation 4.18 les expressions des dérivées premières du côté de l'air et du fer (Equation 4.21 et 4.22). En utilisant ce principe, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J situé sur l'interface [nb] peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{k \cdot \mu_0} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0}\right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2}\right) A_{I,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{k \cdot \mu_f} = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Avec l'équation 4.23, la continuité de la composante H_t , est imposée tout le long de l'interface entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes.

Remarques : La prise en compte de l'équation de Laplace dans l'air et dans le fer fait intervenir des dérivées du second ordre, même si la relation 4.18 ne fait intervenir que des dérivées du premier ordre. L'équation aux interfaces est donc ici sous sa forme forte.

Pour calculer les équations du potentiel vecteur, au noeud I,J, mais situées sur les interfaces [bc], [co], [mg] et [lf] il suffit d'effectuer la même procédure. Les expressions ainsi obtenues sont données dans l'annexe C.

4.5.2.2 Interface Air-Aimant

Le long de l'interface [fg], entre l'air et l'aimant, les équations du potentiel vecteur aux noeuds I,J sont différentes puisque c'est sur cette interface que la polarisation magnétique de l'aimant est prise en compte. La grille utilisée le long de cette interface est présentée sur la Figure 4.5.

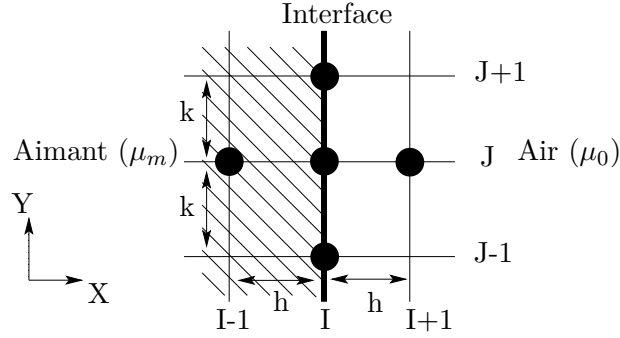


FIG. 4.5 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies, au niveau de l'interface [fg] entre l'aimant et l'air.

Dans ce cas les conditions de passage entre l'aimant et l'air s'écrivent :

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu_m} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{J_r}{\mu_m} \quad (4.24)$$

Avec :

μ_0 : Perméabilité magnétique de l'air.

μ_m : Perméabilité magnétique de l'aimant.

J_r : Polarisation magnétique de l'aimant.

En utilisant la même technique que précédemment, les dérivées partielles par rapport à x du potentiel vecteur au noeud I,J s'écrivent, respectivement pour l'air et pour l'aimant, sous la forme :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial x} \right)_{air} = \frac{h}{2k^2} A_{I,J-1} - \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) A_{I,J} + \frac{A_{I+1,J}}{h} + \frac{h}{2k^2} A_{I,J+1} \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial x} \right)_{aimant} = -\frac{h}{2k^2} A_{I,J-1} - \frac{A_{I-1,J}}{h} + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) A_{I,J} - \frac{h}{2k^2} A_{I,J+1} \quad (4.26)$$

L'équation aux noeuds I,J située sur l'interface [fg] est obtenue en imposant la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique.

L'équation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J-1} + \frac{A_{I-1,J}}{h \cdot \mu_m} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2}\right) A_{I,J} \\ + \frac{A_{I+1,J}}{h \cdot \mu_0} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J+1} = \frac{J_r}{\mu_m} \end{aligned} \quad (4.27)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique est imposée. Suivant la remarque précédente, c'est aussi une forme forte des équations aux interfaces.

4.5.3 Equations aux limites

Les conditions limites utilisées sont de type Dirichlet homogène, un champ nul est donc imposé sur les segments [kq], [rq] et [pr].

$$A = 0 \quad (4.28)$$

Au niveau de l'interface [pk], la condition de symétrie par rapport à l'axe des y doit être respectée. Donc par condition de symétrie les potentiels sont imposés :

$$A_{I+1,J} = A_{I-1,J} \quad (4.29)$$

Pour obtenir les équations aux noeuds I,J le long de l'interface [pk], il ne reste plus qu'à appliquer cette condition au niveau de l'équation des milieux intérieurs pour les noeuds situés sur les interfaces [lk], [lm], [mn], [no], [op], par exemple.

Dans ces cas, l'équation au noeud I,J situé à l'intérieur d'un milieu de perméabilité magnétique constant et sur l'axe de symétrie peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{A_{I,J-1}}{k^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right) A_{I,J} + \frac{2A_{I+1,J}}{h^2} + \frac{A_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (4.30)$$

Pour les noeuds situés sur les points k, l, m, n, o, et p, il faut appliquer le même principe mais en utilisant, respectivement, les équations des interfaces [kq], [lf], [mg], [nb], [oc], [pr]. Les résultats sont développés dans l'annexe C.

La forme forte a aussi été programmée en utilisant le potentiel scalaire magnétique, la procédure utilisée pour imposer la continuité des conditions de passage est la même qu'en potentiel vecteur. Le calcul des équations programmées est détaillé en annexe D.

4.6 Résultats avec la forme forte des équations du champ

4.6.1 Formulation en potentiel vecteur

L'exemple illustré dans la partie 4.4 a été programmé en utilisant le potentiel vecteur sous le logiciel Matlab. L'annexe E présente le code utilisé.

La Figure 4.6 montre la composante tangentielle du champ d'excitation H_t , au niveau de l'interface [ab] dans l'air et dans le fer. Avec la forme forte des équations du champ une parfaite continuité de la composante H_t peut être observée.

La forme forte, en potentiel vecteur, impose la continuité de H_t , et celle de la composante normale du champ magnétique, comme illustré sur la Figure 4.7.

Les niveaux de champ dans l'ensemble de la structure sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus en éléments finis (FIG. 4.8). La solution n'apparaît donc pas dégradée.

Au niveau des densités de force magnétique, la Figure 4.9 illustre les résultats obtenus avec le tenseur de Maxwell et la dérivée de l'énergie. Des écarts de 0.1% peuvent être observés entre les deux méthodes de calcul.

La Figure 4.10 rappelle les résultats obtenus avec la forme faible des équations du champ avec la méthode éléments finis. En comparant les deux courbes, nous constatons l'avantage d'utiliser une forme forte avec le potentiel vecteur surtout si la méthode de la dérivée de l'énergie pour calculer la densité de force magnétique est utilisée.

Avec la forme forte, la répartition des forces magnétiques le long de l'interface est beaucoup plus cohérente.

Le Tableau 4.1 montre les résultats du calcul de la force résultante exercée sur la pièce ferromagnétique. Les deux méthodes de calcul donnent une valeur de l'ordre de -708 N.m^{-1} . Un écart de 0.13 % peut être observé entre ces deux méthodes.

	Tenseur de Maxwell	Dérivée de l'énergie
Force (N.m^{-1})	-708.8851	-707.9701

TAB. 4.1 – Calcul de la force globale sur la pièce ferromagnétique en utilisant une forme forte et le potentiel vecteur.

De plus, ces valeurs sont proches de celles obtenues dans le chapitre 3, en utilisant les valeurs nodales et en imbriquant le potentiel vecteur et le potentiel scalaire.

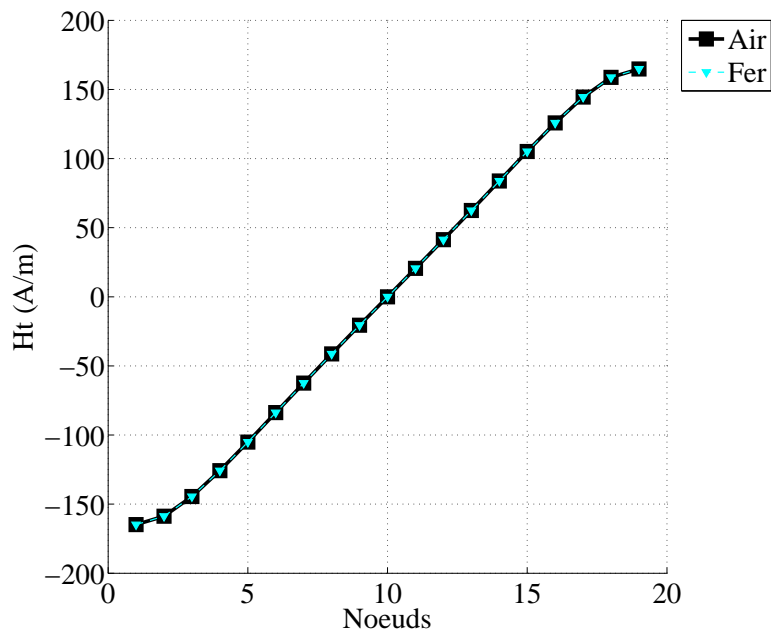


FIG. 4.6 – Composante tangentielle du champ d’excitation magnétique dans l’air et dans le fer au niveau de l’interface [ab] avec le potentiel vecteur.

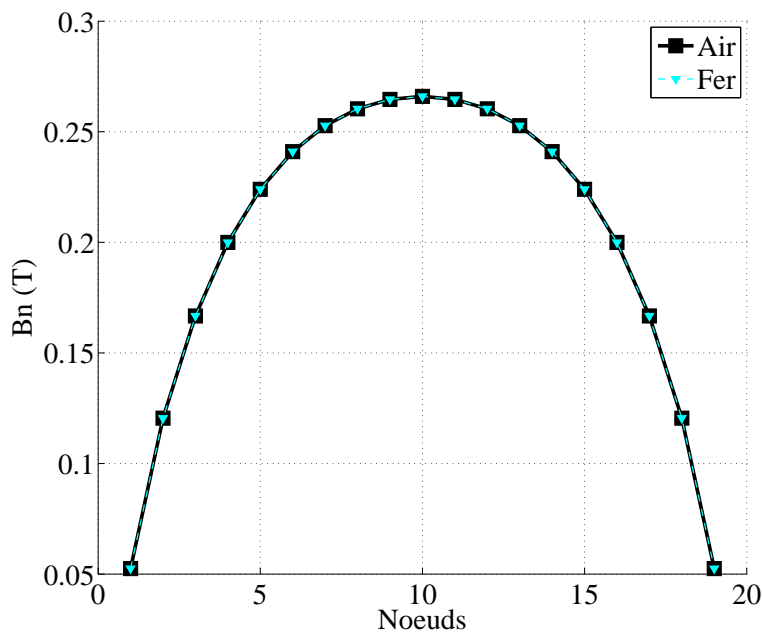


FIG. 4.7 – Composante normale du champ magnétique dans l’air et dans le fer au niveau de l’interface [ab] avec le potentiel vecteur

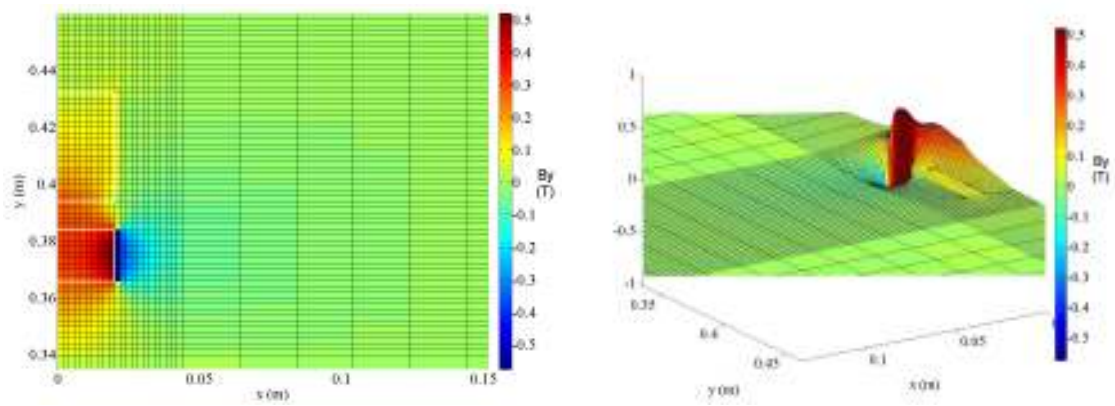


FIG. 4.8 – Allure de la composante du champ B_y dans la structure étudiée en potentiel vecteur

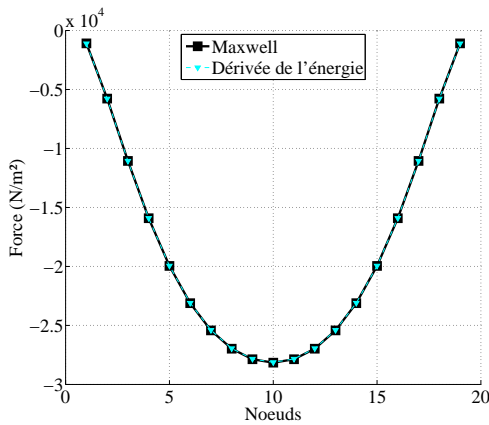


FIG. 4.9 – Répartition de la densité de force sur l'interface [ab] avec une **forme forte** des équations du champ et avec le potentiel vecteur.

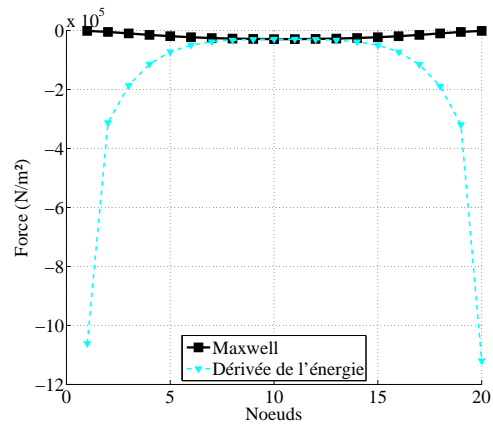


FIG. 4.10 – Répartition de la densité de force sur l'interface [ab] avec une **forme faible** des équations du champ et avec le potentiel vecteur.

En conclusion, avec la forme forte des équations du champ et en potentiel vecteur, l'allure des répartitions de force magnétique obtenue est plus cohérente qu'avec la forme faible.

4.6.2 Formulation en potentiel scalaire magnétique

La forme forte a aussi été programmée sous le logiciel Matlab en utilisant le potentiel scalaire magnétique.

La Figure 4.11 montre la composante normale du champ d'induction magnétique, B_n , au niveau de l'interface [ab] dans l'air et dans le fer. Avec la forme forte des équations du champ, une parfaite continuité de la composante B_n le long de

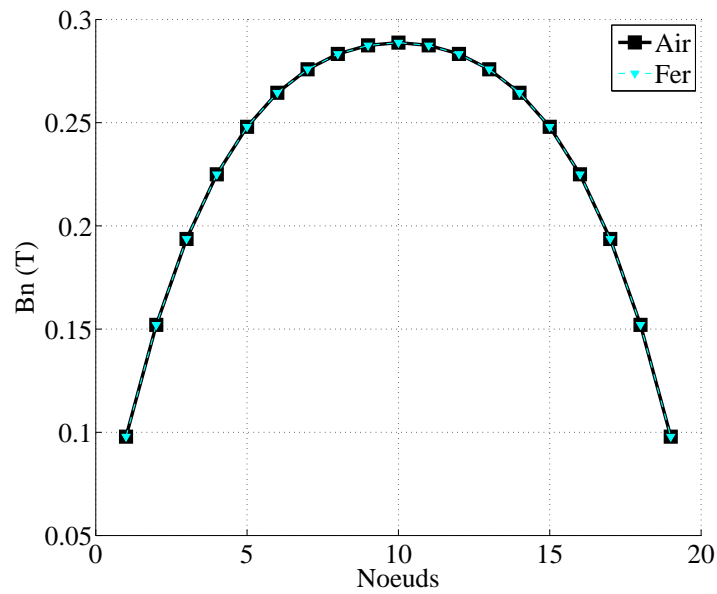


FIG. 4.11 – Composante normale du champ magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel scalaire magnétique.

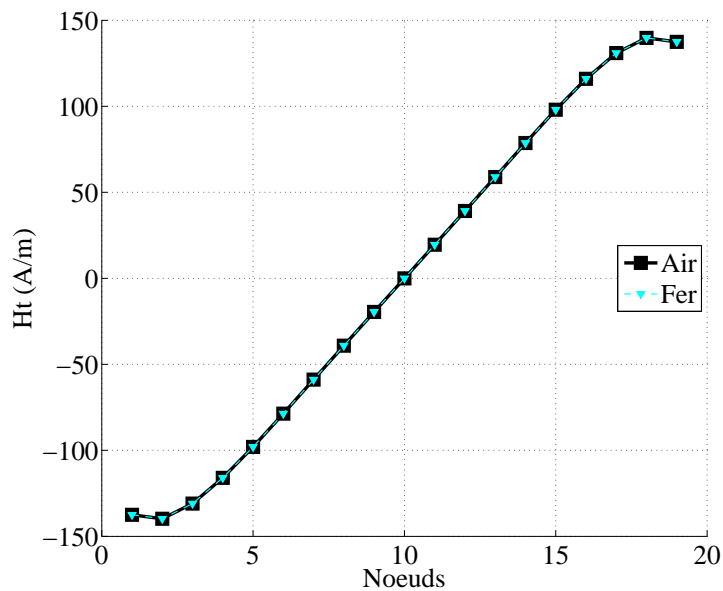


FIG. 4.12 – Composante tangentielle du champ d'excitation magnétique dans l'air et dans le fer au niveau de l'interface [ab] avec le potentiel scalaire magnétique.

l'interface [ab] est ainsi réalisée.

La forme forte impose dans ce cas la continuité de la composante B_n en potentiel scalaire, et aussi la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation H_t (FIG. 4.12).

Les valeurs du champ magnétique calculées dans l'ensemble du domaine d'étude sont plus élevées que celles obtenues avec la forme forte des équations en potentiel vecteur ou avec la méthode des éléments finis (Figure 4.13).

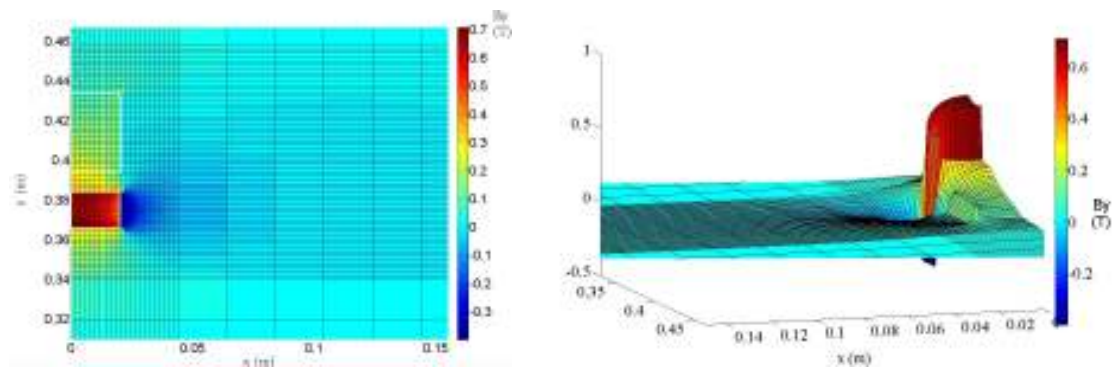


FIG. 4.13 – Allure de la composante du champ B_y dans la structure étudiée

Le niveau élevé de champ magnétique a pour conséquence d'obtenir des densités de force magnétique au niveau de l'interface [ab] plus fortes qu'en potentiel vecteur, de l'ordre de 17.85 % (FIG. 4.9). Les résultats entre les deux méthodes de calcul de force restent proches, un écart seulement de 0.1 % est observé.

La comparaison des Figures 4.14 et 4.15 montre qu'avec le potentiel scalaire magnétique les allures de distribution de densité de force sont identiques quelque soit la forme des équations de champ utilisées (faible ou forte).

Le Tableau 4.2 montre les résultats du calcul de la résultante sur la pièce ferromagnétique, les deux méthodes de calcul donnent une valeur de l'ordre de -776 N.m^{-1} (un écart de 0.165 % les différentie).

Cependant un écart de 9.6 % est constaté avec les valeurs obtenues avec la forme forte et en potentiel vecteur.

En conclusion, les résultats obtenus avec une forme forte et en potentiel scalaire magnétique sont légèrement supérieurs à ceux obtenus avec la forme faible.

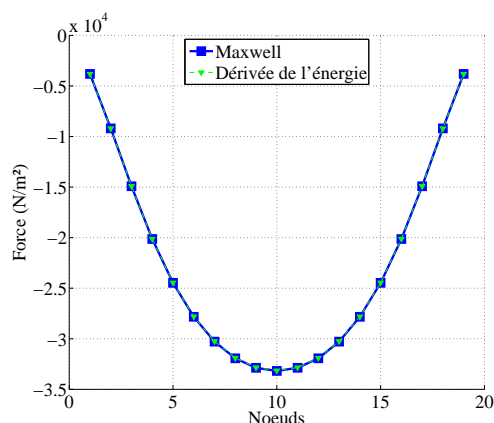


FIG. 4.14 – Répartition de la densité de force au niveau de l'interface [ab] avec la **forme forte** et le potentiel scalaire magnétique.

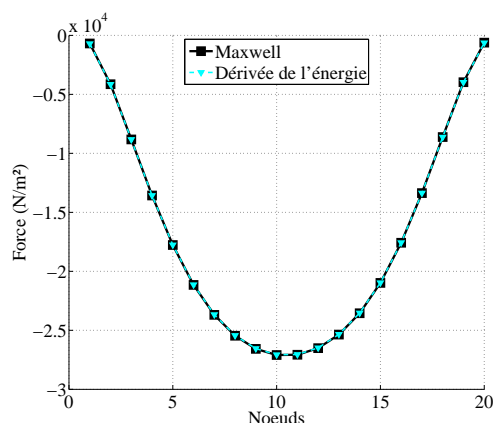


FIG. 4.15 – Répartition de la densité de force au niveau de l'interface [ab] avec la **forme faible** et le potentiel scalaire magnétique.

	Tenseur de Maxwell	Dérivée de l'énergie
Force (N.m ⁻¹)	-776.5668	-775.2906

TAB. 4.2 – Calcul de la force globale sur la pièce ferromagnétique en utilisant la forme forte et le potentiel scalaire magnétique.

4.6.3 Comparaisons des différentes approches

Dans cette partie, les différences obtenues entre les composantes du champ B_n et H_t avec les diverses méthodes de calcul utilisées sont analysées. Cette étude a été effectuée avec la même densité de maillage, c'est à dire 20 éléments disposés le long de l'interface [ab].

4.6.3.1 Pour la composante B_n

La Figure 4.16 compare les valeurs de la composante normale du champ magnétique le long de l'interface [ab], avec les différentes formulations et combinaisons de calcul utilisées.

Si les valeurs de B_n calculées avec les éléments quadratiques sont prises comme référence, alors le Tableau 4.3 donne les valeurs maximales des différentes approches utilisées et leurs écarts en pourcentage.

Sur la Figure 4.16 et le Tableau 4.3, les valeurs de la composante B_n calculées dans l'air et dans le fer avec la forme faible des équations du champ, la méthode des éléments finis et en potentiel scalaire ont été rajoutées car cette approche

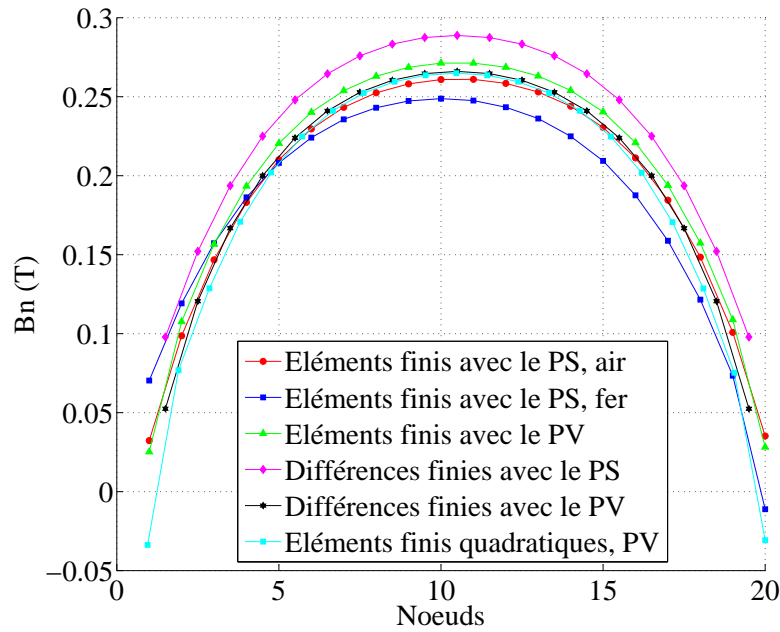


FIG. 4.16 – Comparaison entre les principales méthodes de calcul numérique, de la composante normale du champ d'induction magnétique au niveau de l'interface [ab].

Avec 20 éléments placés sur l'interface [ab]	Valeurs maximales de B_n (T)	Ecart (%) Référence : Éléments quadratiques
Eléments finis avec le potentiel scalaire dans l'air	0.2609 T	1,47 %
Eléments finis avec le potentiel scalaire dans le fer	0.2488 T	6,44 %
Eléments finis avec le potentiel vecteur	0.2713 T	2,4 %
Différences finies avec le potentiel scalaire	0.2888 T	8,3 %
Différences finies avec le potentiel vecteur	0.2660 T	0,46 %
Eléments finis avec le potentiel vecteur et des éléments quadratiques	0.2648 T	0 %

TAB. 4.3 – Comparaison des valeurs maximales de B_n le long de l'interface [ab]

n'assure pas la continuité de cette composante.

A première vue, toutes les valeurs calculées sont proches les unes des autres exceptées celles obtenues avec la forme forte des équations du champ, la méthode par différences finies et en potentiel scalaire qui sont sensiblement supérieures. Un écart de 8,3% par rapport aux valeurs calculées avec les éléments quadratiques peut être observé.

De plus, les valeurs de la composante B_n dans le fer avec la forme faible des équations du champ sont sensiblement inférieures aux valeurs obtenues avec les autres méthodes de calcul. Des écarts de 6,44% peuvent être constatés.

Pour finir, toutes les autres approches donnent des résultats proches avec des écarts de moins de 3%. Notamment entre la forme forte des équations du champ en potentiel vecteur, et la forme faible avec des éléments quadratiques où cet écart est inférieure à 1%.

4.6.3.2 Pour la composante H_t

Au niveau de la composante H_t , les valeurs obtenues dans l'air avec la forme faible des équations du champ, en potentiel vecteur et avec la méthode des éléments finis n'ont pas pu être placées sur la Figure 4.17 car leurs différences sont trop importantes et auraient masqué les autres courbes.

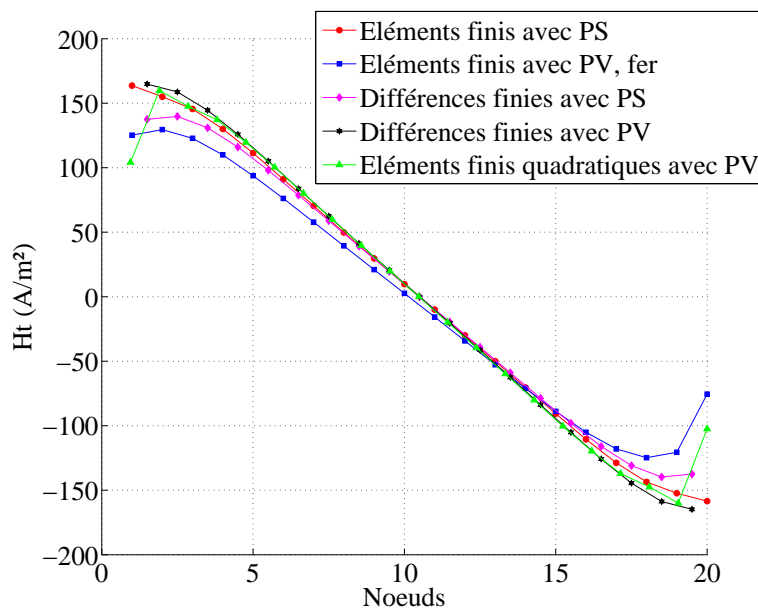


FIG. 4.17 – Comparaison entre les principales méthodes de calcul numérique, de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique au niveau de l'interface [ab].

L'approche utilisant la forme faible des équations du champ, en potentiel vecteur, et avec la méthode des éléments finis pour calculer les valeurs de la composante H_t dans le fer, donne un écart moyen de 15 % par rapport aux résultats obtenues avec les éléments quadratiques. Toutes les autres approches utilisées donnent des résultats comparables, avec des écarts de moins de 10 %.

Les résultats obtenus avec la forme forte des équations du champ sont voisins des valeurs calculées avec les éléments quadratiques (écart de l'ordre de 7 %).

4.7 Comparaison avec une étude expérimentale

Pour valider les calculs effectués avec les formes faible et forte, une étude expérimentale a été réalisée.

4.7.1 Dispositif mis en place

La structure étudiée dans cette partie est constituée d'un aimant permanent parallélépipédique ayant une polarisation magnétique de 0.56 T et d'une culasse ferromagnétique (FIG. 4.18).

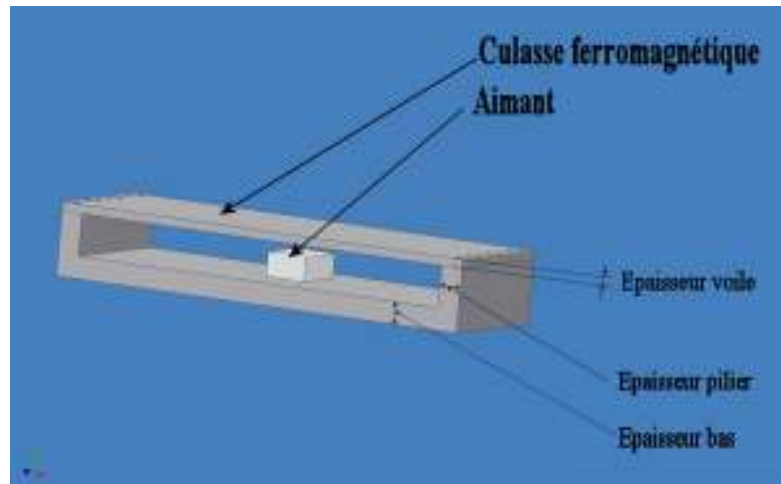


FIG. 4.18 – Schéma de la structure étudiée

La culasse ferromagnétique a été dimensionnée afin d'éviter la saturation et ainsi rester dans la zone linéaire du matériau. Ce point est confirmé au vu des résultats obtenus par simulation, montrés sur les Figures F.1 et F.2 F.3 situés en annexe F.

Le Tableau 4.4 donne les paramètres dimensionnels et magnétiques de la structure.

4. Forme forte des équations du champ et conditions de passage

Aimant	Dimensions (Largeur × Hauteur × Profondeur)	(19 × 11 × 28) mm
	Polarisation magnétique (Jr)	0.56 T
	Perméabilité magnétique relative	1.02
Culasse	Dimensions (Largeur × Hauteur × Profondeur)	(200 × 33 × 68) mm
	Epaisseur pilier et épaisseur bas	10 mm
	Epaisseur voile	4 mm
	Perméabilité magnétique relative	1000
Entrefer		8 mm

TAB. 4.4 – Dimensions et propriétés magnétiques de l'exemple étudié

Le même maillage est utilisé lors des calculs numériques en éléments finis et en différences finies, celui-ci est montré sur la Figure 4.19.

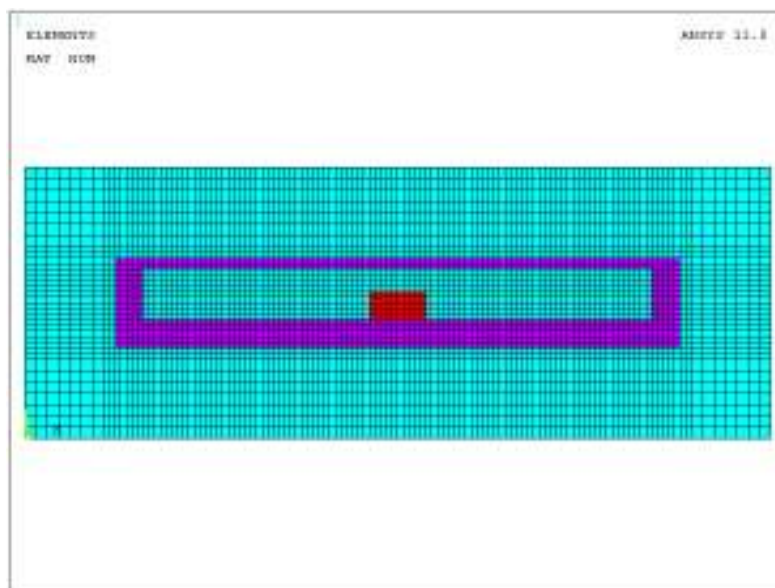


FIG. 4.19 – Maillage utilisé pour les calculs

Avec la méthode des éléments finis, les éléments utilisés sont quadrangulaires et linéaires. C'est l'élément PLANE13 du logiciel ANSYS qui est utilisé.

Avec la méthode des différences finies, les résultats montrés sont ceux obtenus avec les équations illustrées dans les annexes C et D, utilisant la forme forte des

équations du champ. Avec cette méthode, deux types de formulation, potentiel vecteur et potentiel scalaire magnétique ont été utilisés pour calculer le champ magnétique dans la structure.

Pour observer de manière précise les différences entre forme faible, forme forte et valeurs expérimentales, des relevés du champ magnétique dans la structure au milieu de l'entrefer, le long de l'axe RS ont été effectués (FIG. 4.20). La sonde est déplacée parallèlement à l'axe des x.

Les mesures ont été effectuées avec un gaussmètre de Bell (Model 7030 ; F. W. Bell) et une sonde triaxial permettant de relever simultanément le champ dans les trois directions de l'espace (x,y,z) [Syp08].

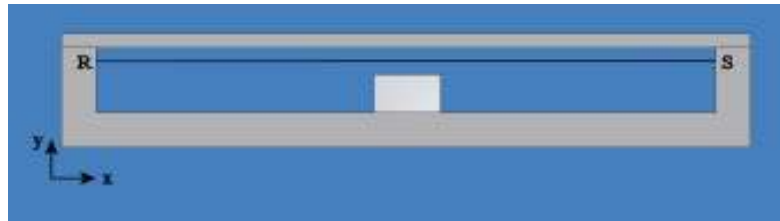


FIG. 4.20 – Ligne de déplacement du capteur

Trois campagnes de mesures ont été réalisées :

- Pour la première série, l'aimant est placé au milieu de la structure.
- Pour les seconds essais, l'aimant a été translaté suivant l'axe des x décroissant. Il a été décalé de 4 cm par rapport au centre de la structure.
- Pour les derniers essais, l'aimant a été translaté de nouveau vers les x décroissants. Il a été placé cette fois-ci à 6 cm par rapport au centre du système.

4.7.2 Forme forte et étude expérimentale

Avec la méthode des différences finies le champ magnétique a été calculé avec la formulation en potentiel vecteur (PV) et la formulation en potentiel scalaire magnétique (PS).

4.7.2.1 Avec l'aimant centré

Avec l'aimant centré dans la structure, les Figures 4.21 et 4.22 montrent les composantes B_x et B_y du champ magnétique.

Au niveau de la composante B_y , les valeurs calculées obtenues sont très proches des valeurs expérimentales indifféremment de l'utilisation des formulations en potentiel scalaire magnétique ou en potentiel vecteur. Des écarts de 8 % peuvent être observés entre les mesures et les simulations.

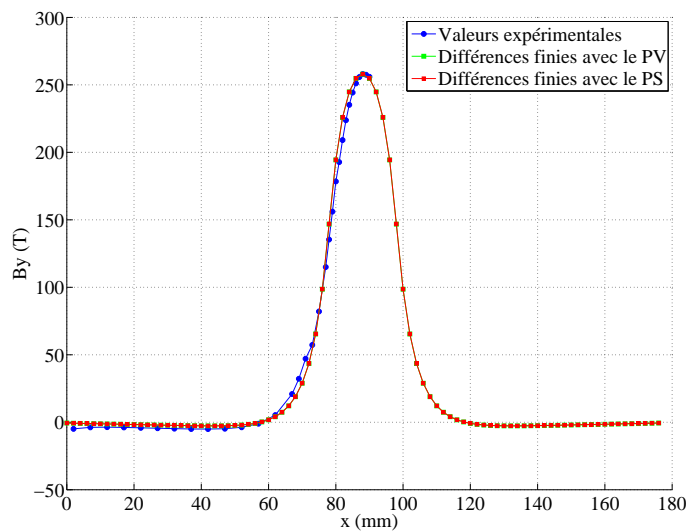


FIG. 4.21 – Comparaison entre les mesures et les valeurs calculées de la composante B_y dans l'entrefer avec l'aimant centré.

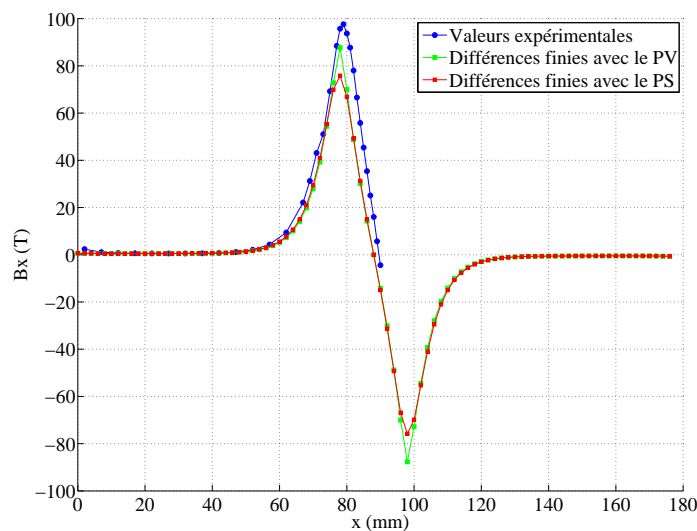


FIG. 4.22 – Comparaison entre les mesures et les valeurs calculées de la composante B_x dans l'entrefer avec l'aimant centré.

Au niveau de la composante B_x , des écarts plus importants entre les mesures et les résultats de simulation sont observables. Contrairement à la composante B_y des différences entre les résultats obtenus avec le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur, sont constatées. Il existe un écart de 10 % entre les valeurs obtenues avec le potentiel vecteur et les valeurs expérimentales tandis que des écarts de 20 % sont observés avec le potentiel scalaire magnétique.

4.7.2.2 Avec l'aimant décalé de 4 cm

Dans ce cas, l'aimant est décalé de 4 cm par rapport au centre de la structure. Les Figures 4.23 et 4.24 montrent les comparaisons entre les valeurs expérimentales et calculées des composantes du champ au milieu de l'entrefer.

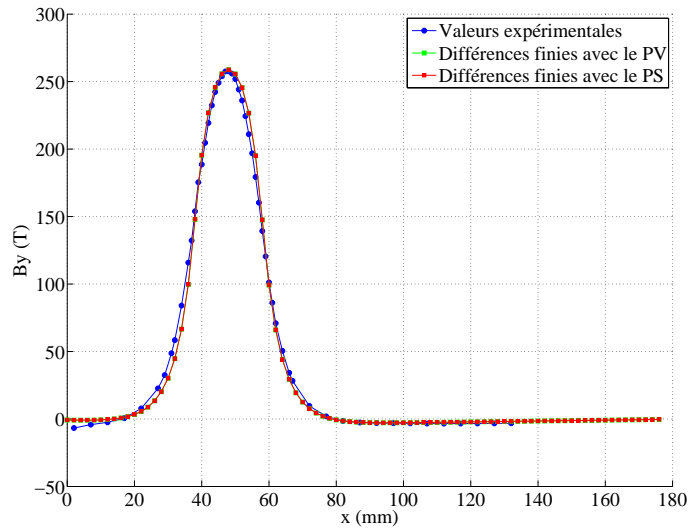


FIG. 4.23 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.

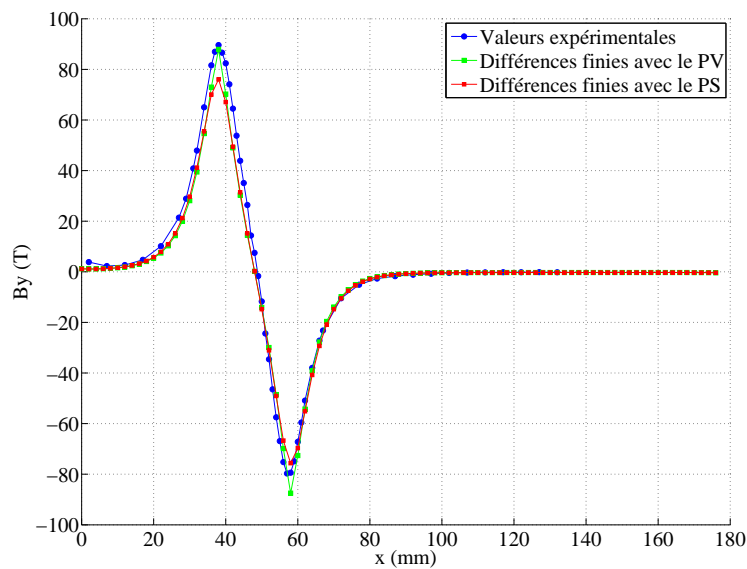


FIG. 4.24 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.

Comme avec l'aimant centré, les valeurs expérimentales de la composante B_y sont proches des valeurs calculées indifféremment de l'utilisation du potentiel vecteur ou du potentiel scalaire. Des écarts de 7% peuvent être observés entre les mesures et les valeurs de simulation.

Au niveau de la composante B_x , des écarts plus importants entre les mesures et les résultats de simulation sont observables. Contrairement à la composante B_y des différences entre les résultats obtenus avec le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur sont constatées. Avec le potentiel vecteur, nous obtenons une valeur proche de B_x max et avec le potentiel scalaire magnétique nous obtenons une valeur proche de B_x min.

En dehors de ces points là, des écarts de 11% peuvent être constatés entre la formulation potentiel vecteur ou potentiel scalaire magnétique et les valeurs expérimentales.

4.7.2.3 Avec l'aimant décalé de 6 cm

Dans ce cas, l'aimant est décalé de 6 cm par rapport au centre de la structure. Les Figures 4.25 et 4.26 montrent les comparaisons entre les valeurs expérimentales et calculées des composantes du champ au milieu de l'entrefer.

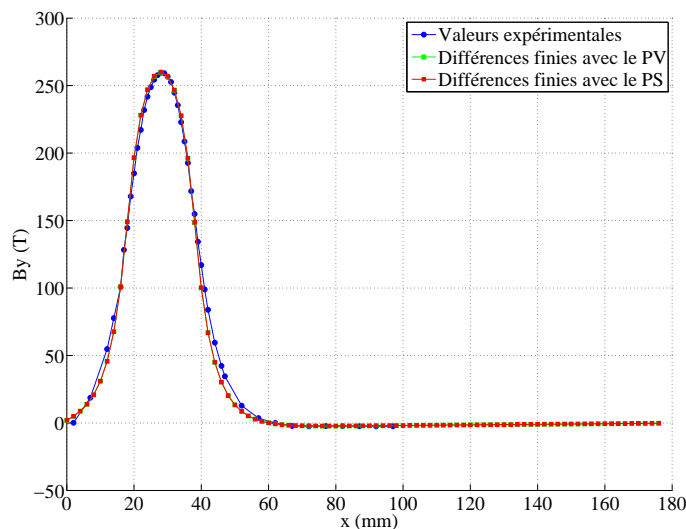


FIG. 4.25 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.

Comme avec l'aimant centré, et aussi lorsqu'il était décalé de 4 cm, les valeurs expérimentales de la composante B_y sont proches des valeurs calculées indifféremment de l'utilisation du potentiel vecteur ou du potentiel scalaire. Des

écarts de 5 % peuvent être observés entre les mesures et les valeurs de simulation.

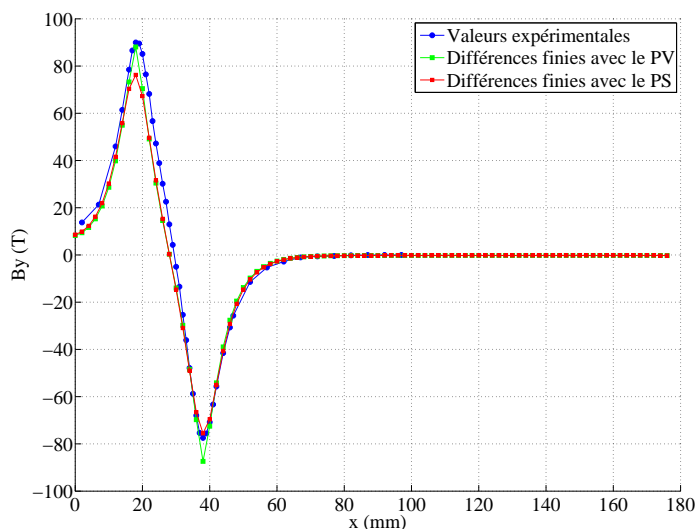


FIG. 4.26 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par différences finies du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.

Encore une fois, au niveau de la composante B_x , des écarts plus importants entre les mesures et les résultats de simulation sont observables. Ici des différences sont observées entre les résultats obtenus avec le potentiel scalaire magnétique et le potentiel vecteur. Comme quand l'aimant était décalé de 4 cm, le potentiel vecteur permet d'obtenir la valeur B_x max et le potentiel scalaire magnétique la valeur B_x min.

En dehors de ces points là, des écarts de 12 % peuvent être constatés entre la formulation potentiel vecteur et potentiel scalaire magnétique et les valeurs expérimentales.

En conclusion, à partir de ces premiers résultats, le constat est que la formulation forte respecte les conditions de passage entre des milieux de perméabilité magnétique différente tout en ayant des résultats cohérents dans le reste de la structure. Les différences observées entre valeurs expérimentales et valeurs calculées peuvent être partiellement dues à l'imprécision des données sur les matériaux concernés, par exemple la valeur de la perméabilité magnétique relative du fer.

4.7.3 Forme faible et étude expérimentale

4.7.3.1 Avec l'aimant centré

Les Figures 4.27 et 4.28 montrent la comparaison entre les résultats obtenus en potentiel vecteur avec la méthode des éléments finis et les valeurs expérimentales au niveau du calcul des composantes du champ d'induction magnétique le long de la droite (RS) quand l'aimant est centré dans la structure.

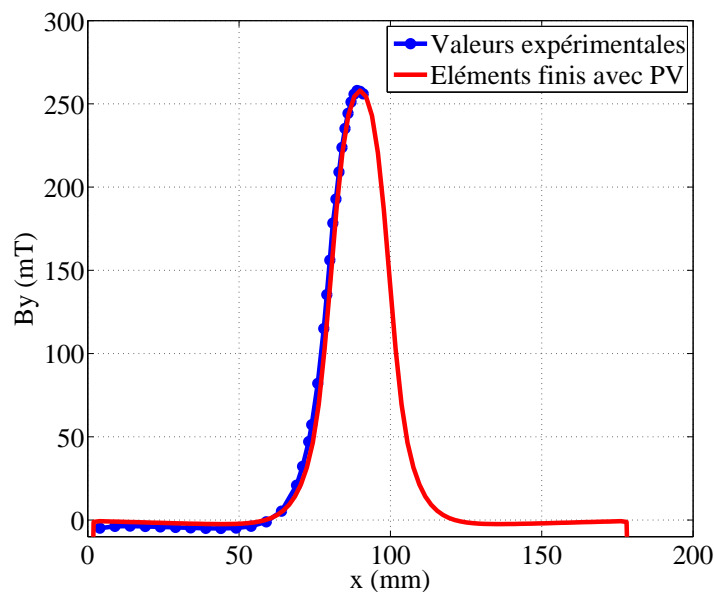


FIG. 4.27 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champ B_y dans l'entrefer avec l'aimant centré.

Au niveau de la composante B_y , nous obtenons des valeurs calculées proches des valeurs expérimentales. Des écarts de 9 % peuvent être observés entre les mesures et les simulations.

Les valeurs obtenues en formulation faible sont très proches des valeurs obtenues en formulation forte. Un écart de l'ordre de 3 % a pu être constaté entre ces deux formulations.

Comme avec la formulation forte, au niveau de la composante B_x , les écarts sont plus importants entre les mesures et les résultats de simulation. En dehors de la valeur maximale, une différence de 20 % est observée entre les deux résultats. Les valeurs obtenues avec la formulation faible se situent entre celles obtenues en potentiel vecteur et potentiel scalaire avec la formulation forte.

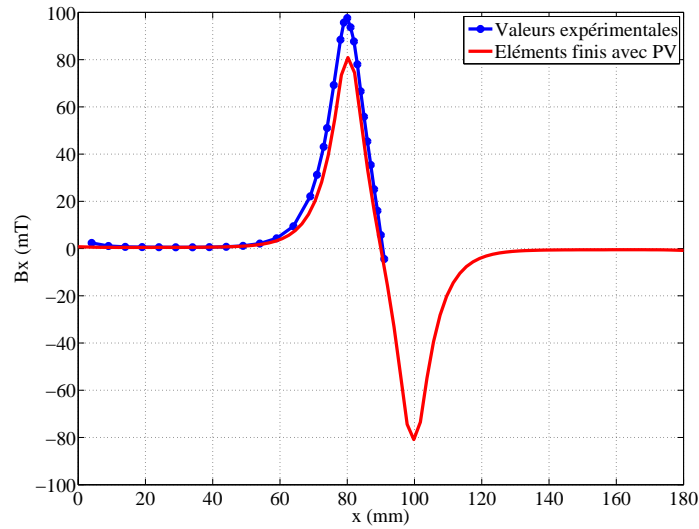


FIG. 4.28 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées en éléments finis du champ B_x dans l'entrefer avec l'aimant centré.

4.7.3.2 Avec l'aimant décalé de 4 cm

Les Figures 4.29 et 4.30 montrent la comparaison entre les résultats obtenus en potentiel vecteur avec la méthode des éléments finis et les valeurs expérimentales au niveau du calcul des composantes du champ d'induction magnétique le long de la droite (RS) quand l'aimant est décalé de 4 cm.

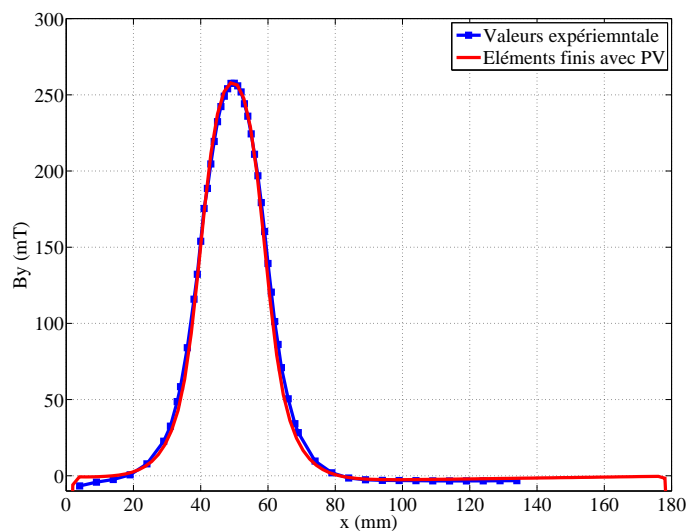


FIG. 4.29 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.

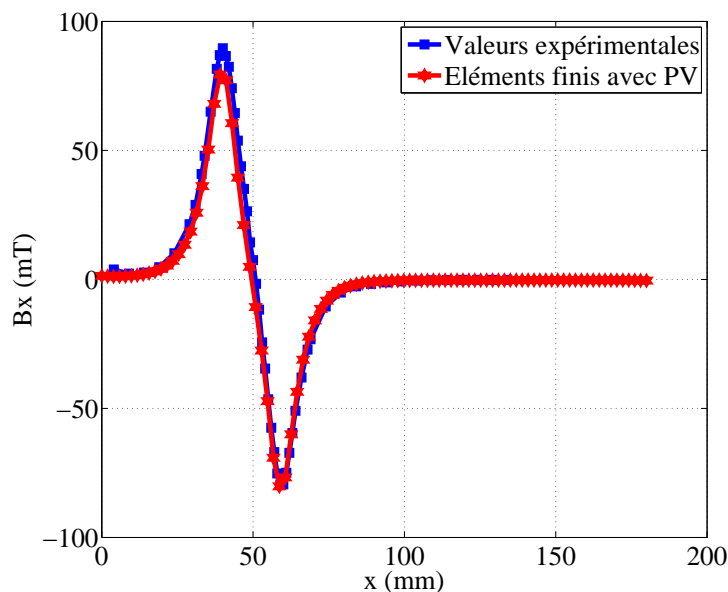


FIG. 4.30 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 4 cm.

Au niveau de la composante B_y , nous obtenons des valeurs calculées proches des valeurs expérimentales. Des écarts de 7% peuvent être observés entre les mesures et les simulations.

Les valeurs obtenues en formulation faible sont très proches des valeurs obtenues en formulation forte. Un écart de l'ordre de 2% a pu être constaté entre les deux formulations.

Au niveau de la composante B_x , les écarts sont plus importants entre les mesures et les résultats de simulation, comme avec la formulation forte. En dehors de la valeur maximale, une différence de 12% peut être observée entre les deux résultats. Les valeurs obtenues avec la formulation faible se situent entre celles obtenues en potentiel vecteur et potentiel scalaire avec la formulation forte.

4.7.3.3 Avec l'aimant décalé de 6 cm

Les Figures 4.31 et 4.32 montrent la comparaison entre les résultats obtenus en potentiel vecteur avec la méthode des éléments finis et les valeurs expérimentales au niveau du calcul des composantes du champ d'induction magnétique le long de la droite (RS) quand l'aimant est décalé de 6 cm.

Au niveau de la composante B_y , nous obtenons des valeurs calculées proches des valeurs expérimentales. Des écarts de 6% peuvent être observés entre les mesures et les simulations.

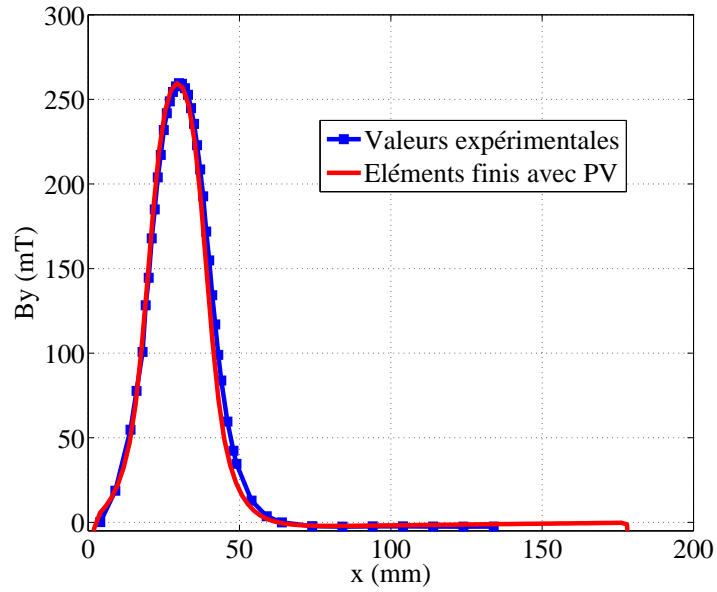


FIG. 4.31 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_y dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.

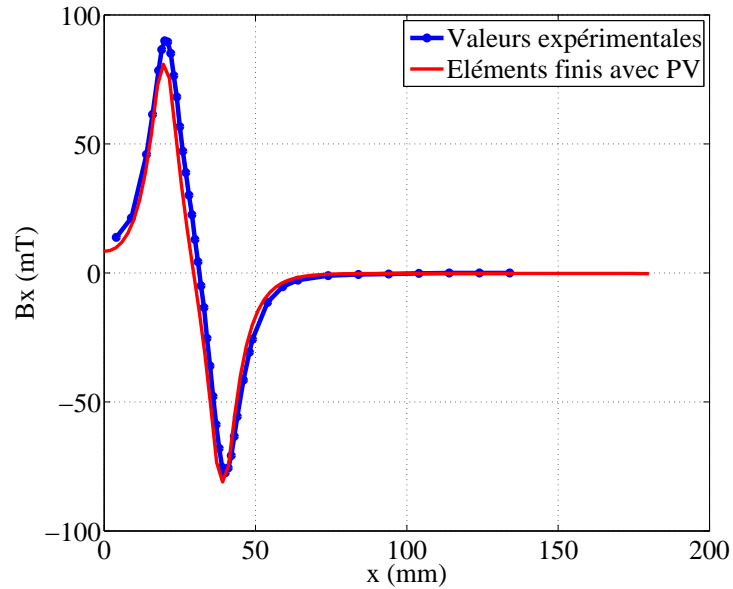


FIG. 4.32 – Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées par éléments finis du champs B_x dans l'entrefer avec l'aimant décalé de 6 cm.

Les valeurs obtenues en formulation faible sont très proches des valeurs obtenues en formulation forte. Un écart de l'ordre de 2% a pu être constaté entre les deux formulations.

Au niveau de la composante B_x , comme avec la forme forte, les écarts sont plus importants entre les mesures et les résultats de simulation. En dehors de la valeur maximale une différence de 12% peut être observée entre les deux résultats. Les valeurs obtenues avec la formulation faible se situent entre celles obtenues en potentiel vecteur et potentiel scalaire avec la formulation forte.

En conclusion les comparaisons entre la méthode des éléments finis et les valeurs expérimentales confortent nos résultats. Elles permettent de montrer que la formulation forte donne des valeurs de champ cohérentes au sein de la structure puisque les différences entre les deux formulations sont inférieures à 3%. Les écarts entre la méthode des éléments finis et les valeurs expérimentales peuvent venir de l'approximation faite sur la perméabilité magnétique relative du fer.

L'annexe F présente les résultats du champ magnétique dans l'ensemble du domaine et compare les résultats obtenus entre la forme faible et la forme forte.

4.7.4 Au niveau des conditions de passage

Dans cette partie les conditions de passage calculées avec la forme faible et la forme forte des équations du champ en potentiel vecteur et situées au niveau de l'interface inférieure fer/air du voile ont été comparées.

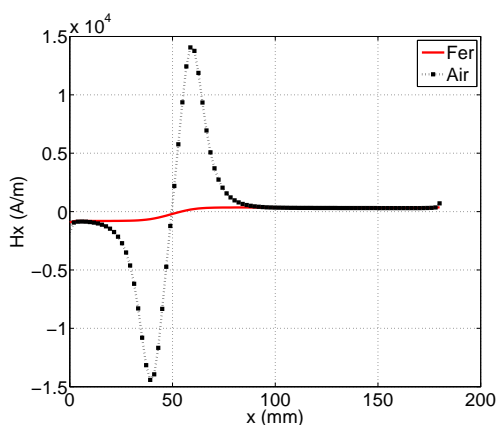


FIG. 4.33 – Comparaison de la composante H_t au niveau de l'interface fer/air avec la forme faible

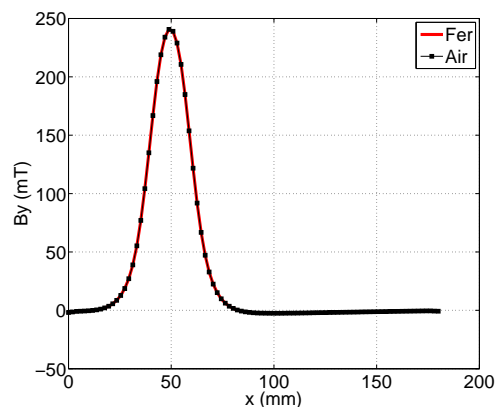


FIG. 4.34 – Comparaison de la composante B_n au niveau de l'interface fer/air avec la forme faible

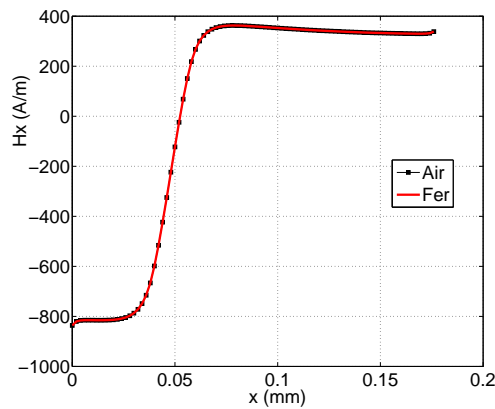


FIG. 4.35 – Comparaison de la composante H_t au niveau de l'interface fer/air avec la forme forte

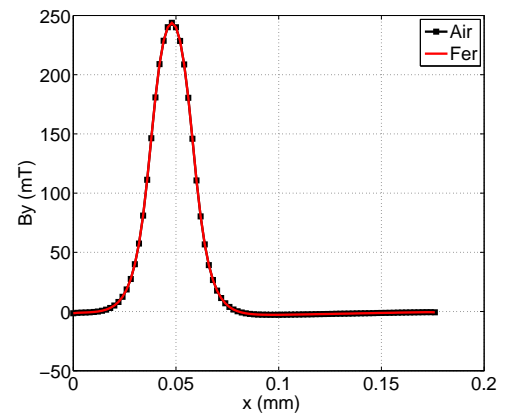


FIG. 4.36 – Comparaison de la composante B_n au niveau de l'interface fer/air avec la forme forte

Avec la forme faible en potentiel vecteur, les résultats montrés précédemment se confirment. Un saut très important de la composante tangentielle H_t peut être constaté (FIG. 4.33). La Figure 4.34 illustre la continuité de la composante normale du champ B_n au travers de l'interface calculée avec la forme faible des équations du champ en potentiel vecteur. Ces figures confirment les problèmes liés à l'utilisation d'une forme faible des équations du champ.

Par contre, avec la forme forte des équations du champ, les conditions de passage sont parfaitement respectées. Les Figures 4.35 et 4.36 témoignent de la continuité des composantes normales et tangentielles du champ le long de l'interface air/fer. Ceci permettra de garantir un calcul plus précis de la répartition des efforts magnétiques s'exerçant sur le voile.

La forme forte respecte les conditions de passage entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes sans dégrader la solution dans le reste du domaine d'étude.

4.8 Conclusion

Ce dernier chapitre a présenté la forme forte des équations du champ utilisée avec la méthode des différences finies pour imposer la continuité des deux composantes du champ permettant ainsi de respecter les conditions de passage entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes.

La forme forte a d'abord été testée sur le même exemple ayant servi à mettre en évidence les problèmes liés à l'utilisation d'une formulation faible sur le calcul de la distribution de force surfacique.

Les résultats obtenus avec la formulation en potentiel scalaire magnétique et la formulation en potentiel vecteur sont cohérents et permettent d'obtenir des distributions de force surfacique identiques quelque soit la méthode de calcul de force utilisée (la méthode du tenseur de Maxwell, la méthode de la dérivée de l'énergie). Notamment, avec la formulation en potentiel vecteur et avec la méthode de la dérivée de l'énergie, la distribution de force surfacique obtenue sur la pièce ferromagnétique est plus cohérente.

Une étude expérimentale a été réalisée pour comparer les résultats obtenus avec le code de calcul utilisant la forme forte et les mesures. Cette étude a permis de montrer que la valeur du champ magnétique dans le domaine d'étude reste cohérente. De plus, sur l'interface entre deux milieux de perméabilité magnétique différente, les deux conditions de passages sont bien respectées, contrairement à la forme faible où le saut de H_t , en potentiel vecteur, reste très important !

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire a porté sur la conception d'une prothèse cardiaque innovante basée sur le "morphing" électroactif d'un corps magnétique déformable (Première partie). Pour déterminer de manière précise les forces mises en jeu lors de la déformation de ce corps, permettant ainsi son dimensionnement, une approche numérique utilisant la forme forte des équations du champ a été développée (Deuxième partie).

Le premier chapitre a proposé un tour d'horizon des principaux coeurs artificiels totaux et assistances circulatoires disponibles à ce jour. Cette étude a permis de mettre en évidence les différentes technologies utilisées, en détaillant les avantages et les faiblesses des deux principales familles de pompes, volumétriques ou rotatives.

Pour les prothèses cardiaques basées essentiellement sur l'utilisation de pompes volumétriques, leur principale faiblesse est due à leur manque de fiabilité du fait de l'utilisation de certains éléments mécaniques (axes, pivots, roulements ...) ou encore leur encombrement important, même pour des patients de forte corpulence. Les pompes rotatives présentent l'avantage quant à elles d'être moins volumineuses, mais posent le problème du contact des éléments mécaniques avec le sang, susceptible d'entraîner des problèmes majeurs de biocompatibilité. De plus, les conséquences physiologiques d'un débit continu sur de longues périodes restent encore à préciser dans le cadre d'études médicales spécifiques.

Pour pallier ces problèmes, de nouveaux concepts de pompe doivent être envisagés. Pour cela, l'utilisation de matériaux électroactifs semble prometteuse car cette solution offre l'avantage d'une conversion directe de l'énergie au sein même de la matière.

L'état de l'art des matériaux disponibles à ce jour et l'analyse des applications dans le domaine médical ont permis de mettre en évidence leurs intérêts potentiels face à la problématique envisagée.

Les différents matériaux ont été classés selon le type d'énergie utilisée pour contrôler leur transformation, soit de nature "électrique" (céramiques, polymères piézoélectriques et co-polymères électroactifs, fluides électrorhéologiques), soit de nature "magnétique" (alliages magnétostrictifs, fluides magnétorhéologiques), soit de nature "thermique" (alliages à mémoire de forme). Sur la base de cette analyse préliminaire, les céramiques piézoélectriques semblent, en première approche diffi-

ciles à mettre en oeuvre car même si les performances sont attractives en termes de puissances spécifiques, les déplacements exploitables, d'amplitudes submillimétriques, sont incompatibles avec les taux de déformation requis par une fonction ventriculaire. Au niveau des polymères piézoélectriques ou électrostrictifs, malgré des progrès accomplis relativement prometteurs, les efforts disponibles semblent encore relativement faibles. Les matériaux magnéto-actifs et notamment les fluides magnétorhéologiques, présentent par principe, l'avantage d'être, très déformables et surtout contrôlables à distance grâce à une source de champ magnétique de caractéristiques appropriées.

Les nombreuses applications médicales de ces matériaux actifs opérationnels ou à l'étude, laissent entrevoir les possibilités de renouveau qu'ils peuvent apporter. Le domaine de l'assistance circulatoire, les dispositifs de coeurs artificiels totaux ou les systèmes de circulation extracorporelle, utilisent des technologies classiques (actionneurs électromagnétiques ou pneumatiques). Ces technologies ont bénéficié de longues années de mise au point et d'optimisation, elles n'en demeurent pas moins limitées face aux fonctions ciblées dans le domaine cardiaque, notamment du point de vue de leur encombrement et de leur consommation énergétique. Aussi la mise au point de prothèses totalement implantables et véritablement exploitables, sur le long terme nécessite un effort d'innovation important face auxquels les matériaux électroactifs et notamment les fluides, constituent une voie d'investigation prometteuse.

Sur la base de cette étude préliminaire, le deuxième chapitre a proposé un nouveau concept de pompe électroactive pour l'assistance circulatoire. L'objectif visé à terme concerne un actionneur capable d'assurer un débit pulsé avec une partie mobile directement implantable à l'intérieur de l'aorte. Pour cela, il était souhaitable que le système proposé soit constitué d'un corps déformable. C'est pour ces raisons que les fluides magnétorhéologiques ont été choisis.

Après une étude des principales caractéristiques des fluides magnétorhéologiques, les simulations numériques ont montré qu'il était possible de déformer une enveloppe remplie de fluide afin de lui donner les deux configurations requises pour l'actionneur, l'une "occlusive" et l'autre "ouverte".

Sur la base de ces résultats encourageants, un premier démonstrateur a été élaboré pour valider ce concept selon une première variante sensiblement simplifiée. Les résultats expérimentaux, réalisés avec une valve aortique mécanique unidirectionnelle, ont permis de montrer la faisabilité du système et confirment globalement l'intérêt du concept préconisé.

Toutefois, les simulations numériques réalisées avec la méthode des éléments finis, en vue de rendre compte de la déformation de la capsule sont à considérer avec précaution. En effet, la détermination précise de la déformation de la capsule nécessite de connaître finement la distribution des forces magnétiques à la surface de l'objet. Or, les méthodes de calcul de répartition des forces magnétiques

continuent de faire l'objet de recherches, voire de controverses ces dernières années. Outre la méthode de calcul de force (tenseur de Maxwell, dérivée de l'énergie), plusieurs auteurs ont signalé que l'utilisation de la formulation faible dans les codes de calcul par éléments finis induit une incertitude sur le résultat.

Cet aspect méthodologique a donc été plus particulièrement considéré dans la deuxième partie du mémoire. Le troisième chapitre a rappelé tout d'abord les différentes approches utilisées permettant la mise en équation de la forme intégrale des équations du champ dans un code de calcul par éléments finis. Cette étude a permis de montrer que la méthode des éléments finis ne respecte fortement qu'une seule des deux conditions de passage : la composante normale du champ magnétique, B_n , dans le cas d'une formulation en potentiel vecteur, ou la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique, H_t , dans le cas d'une formulation en potentiel scalaire.

Une analyse systématique et quantitative de l'influence d'une forme faible des équations du champ sur le respect de ces conditions de passage a été réalisée. Un des intérêts de l'étude a été de présenter pour la première fois une quantification de celle-ci. Elle montre des résultats assez étonnants, en révélant notamment, dans le cas d'un exemple de configuration simple en deux dimensions, la difficulté de réduire le saut de la composante H_t du champ lorsque la formulation en potentiel vecteur est utilisée.

Pour observer et analyser l'influence de l'utilisation d'une forme faible des équations du champ sur le calcul des densités de force magnétique, deux méthodes de calcul de force ont été utilisées : la méthode du tenseur de Maxwell et la méthode de la dérivée de l'énergie. L'étude systématique a été effectuée sur un exemple en deux dimensions en observant la répartition des densités de force magnétique obtenue au niveau d'une pièce ferromagnétique. Dans le cadre de cet exemple un certain nombre de résultats conduisent aux conclusions suivantes :

- la méthode du tenseur de Maxwell est peu sensible à l'utilisation d'une forme faible, à la manière dont les composantes du champ sont calculées et à la densité du maillage ;
- la méthode de la dérivée de l'énergie ne donne des résultats cohérents qu'en potentiel scalaire, avec un maillage très fin et en utilisant les valeurs nodales du champ.

Pour compléter les résultats, il reste à étendre l'étude à d'autres structures, et si ces observations se confirment, il semble qu'avec la formulation en potentiel vecteur et la méthode de la dérivée de l'énergie, il est assez difficile d'utiliser uniquement les composantes du champ pour le calcul de la déformation mécanique d'une structure dans un cas concret.

Dans la conception de la prothèse faisant l'objet de la première partie du mémoire, s'agissant du dimensionnement du corps déformable, il est nécessaire de connaître très précisément le champ magnétique situé au niveau de l'interface de la capsule. Pour le déterminer, dans le quatrième chapitre, l'utilisation d'une forme forte des équations du champ a été proposée et analysée.

Ainsi, le dernier chapitre a présenté une solution qui consiste à imposer de manière explicite, au niveau des conditions de passage, la continuité de la composante normale du champ magnétique et de la composante tangentielle du champ d'excitation. Cette forme forte des équations du champ a été associée à la méthode des différences finies pour être illustrée sur un exemple simple.

Les résultats obtenus avec la formulation en potentiel scalaire magnétique et la formulation en potentiel vecteur sont cohérents et permettent de déterminer des distributions de force surfacique identiques quelle que soit la méthode de calcul de force utilisée (Méthode du tenseur de Maxwell, méthode de la dérivée de l'énergie). Notamment, avec la forme forte en potentiel vecteur et avec la méthode de la dérivée de l'énergie, la distribution de force surfacique obtenue sur la pièce ferromagnétique est devenue plus cohérente.

Une étude expérimentale a été menée pour comparer les valeurs obtenues avec le code de calcul utilisant la forme forte et les relevés expérimentaux. Cette comparaison a prouvé l'efficacité de l'approche employée et a permis d'obtenir sur une configuration de référence, des valeurs précises à l'interface de deux matériaux de perméabilités magnétiques différentes sans dégrader les résultats obtenus dans le domaine d'étude complet.

En conclusion, la présente thèse a permis de démontrer la faisabilité d'un nouveau concept de pompe innovante, basée sur le morphing électroactif d'un corps magnétique déformable, dédiée à l'assistance circulatoire. Certes, cette étude n'en est qu'à ces balbutiements mais laisse entrevoir les possibilités qu'offrent les matériaux électroactifs dans le domaine médical. Au niveau méthodologique, les résultats de nos recherches montrent que pour les applications nécessitant une connaissance fine de grandeurs locales comme le champ magnétique ou les densités de force, il vaut mieux utiliser la forme forte des équations du champ. La forme forte a été associée à la méthode des différences finies qu'il est possible d'étendre facilement en 3D pour des géométries relativement simples. Pour des géométrie plus complexes, s'il s'avère que l'utilisation de la forme forte des équations est nécessaire, il faudrait alors développer la méthode des différences finies à l'aide de l'approche tensorielle et des coordonnées curvilignes. La méthode des éléments finis reste cependant dominante pour des applications nécessitant la connaissance précise de grandeurs globales comme la force résultante, le couple, les flux dans un bobinage...

Annexes

Annexe A

Caractéristiques des principales pompes rotatives

Dans cette annexe, nous présentons, sur la Figure [A.1](#), un inventaire des différentes pompes existantes actuellement. Les pompes sont classées suivant leurs débits, pulsatiles ou continues.

Les Figures [A.2](#) [A.3](#) présentent les caractéristiques des différentes pompes axiales existantes en termes de puissance consommée, de débit, de vitesse de rotation ...

Sur les Figures [A.4](#), [A.5](#), [A.6](#), [A.7](#) les caractéristiques des principales pompes centrifuges sont présentées.

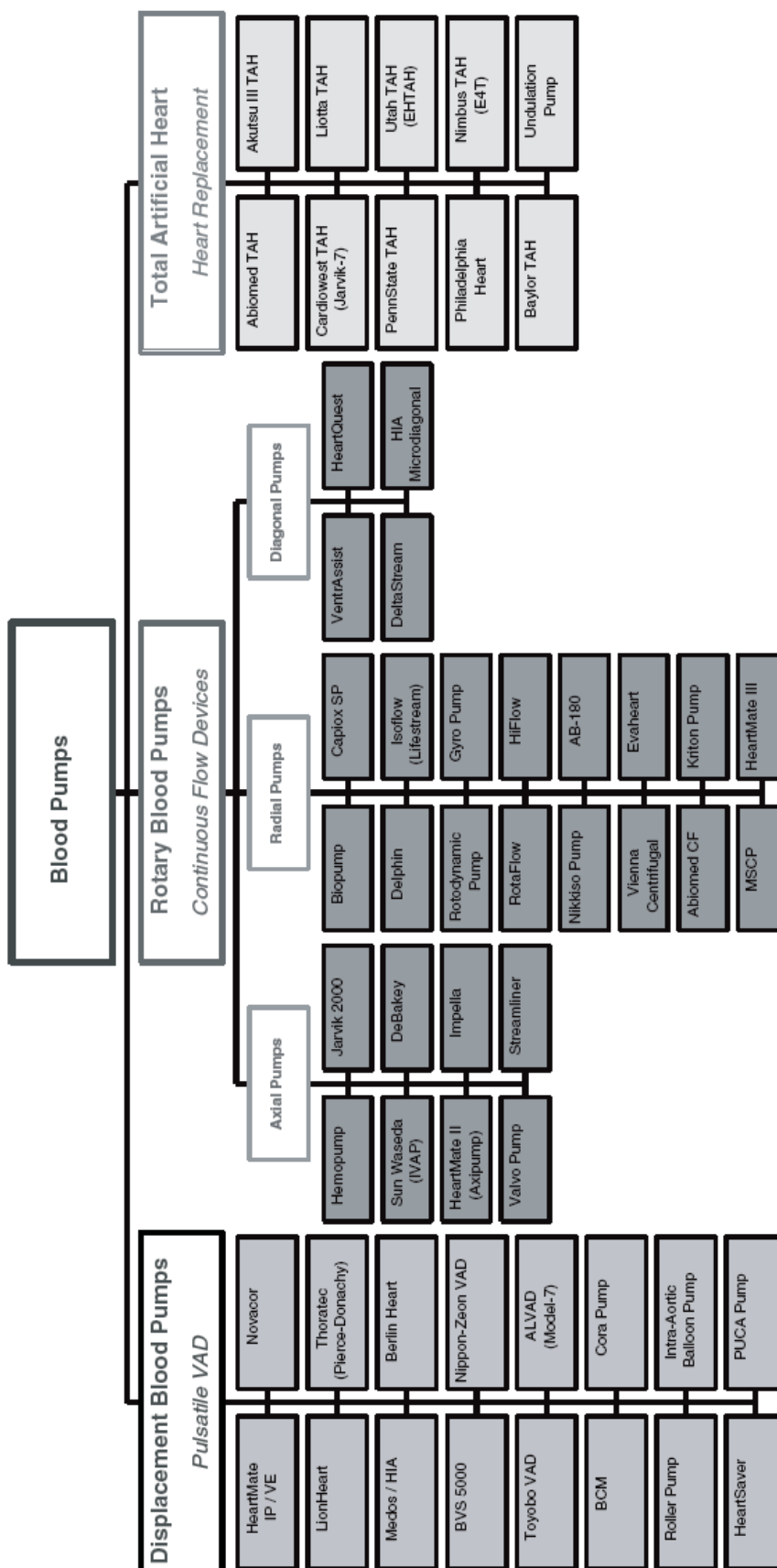


FIG. A.1 – Inventaires des différentes pompes utilisées en assistance circulatoire [Reu00]



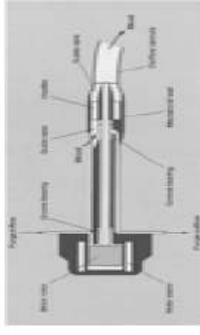





Pump	Weight/size	Flow rate (l/min)	Rotational speed (RPM)	Power requirement (Watts)	Type of bearings	Type of seals	Type of sensors	Additional features	Stage of development
Hemopump	6 g/5 cc	4.5	25 000	70	Purge fluid-lubricated hydrostatic journal bearings	Purged seal system Dextrose solution as purge fluid	External controller in console	Impeller (Archimedes screw) is driven by a flexible cable, which is rotated by a paracorporeal motor Pump introduced through femoral artery Application in minimal invasive heart surgery Not produced anymore	Clinical use (since 1990)
									
Jarvik 2000	90 g/25 cc	6	10 000–160 000	7–10	Blood-immersed ceramic bearings	No seals	External microprocessor-based automatic motor controller regulating pump speed according to physical demands Control modes: heart rate responsive mode or fixed rate mode	Rotor magnets inside impeller Electrical wires penetrate scalp Pediatric type available	Animal experiments
									
IVAP	170 g	5	9 000	8	Pressure-grooved ceramic journal bearings Bearings cooled by purge fluid Bearings acting as a miniature viscous pump for the purge fluid (spiral/helix grooves on bearing surface)	First: purged-lip seal (silicone) Later: 'Cool-Seal System'	External blood pump controller	Pump introduced through LV apex, outflow across aortic valve	Animal experiments
									
DeBakey VAD	95 g/15 cc	5	7500–120 000	6	Ceramic bearings (blood lubricated) located as the conjunction of the impeller with the flow straightener (front) and flow diffuser (rear)	No seals	Micro-controller coupled with internal battery powered by TETS	Rotor magnets are located (hermetically sealed) inside the impeller vanes CFD-based design Price is < US\$ 10,000	Clinical trial
									

FIG. A.2 – Caractéristiques des pompes axiales [Reu00]

A. Caractéristiques des principales pompes rotatives

HeartMate II	160 g/62 cc	6	6000–13 000	10	 <p>Ceramic bearings, similar to ball-cup jewel bearings, acting against radial and axial thrust Blood immersed Ceramics and diamond coatings as preferred bearing materials Ball bearings located inside motor chamber</p>	No seals	Electronic (external) controller modulates pump speed according to physiological demands	Rotor magnets are located in the hub of the pumps rotor TETS will be used in future	Ready for clinical trial
Impella	5 g / 2 cc	4.5	30 000	12	 <p>Ball bearings located inside motor chamber</p>	Polymeric lip seal	Internal pressure sensors for monitoring, external controller integrate in console	Pump introduced through the femoral artery Integrated electric motor Long-term pump in development	Clinical use
Valvo Pump	138 g/40 cc	5	9 000	26	 <p>Miniature ball bearings</p>	Ferrofluidic shaft seal Seal ring: Nd-Fe-B magnet Ferrofluid: ferricolloid HC-50 No seals	Motor speed is determined by counting pulses from the Hall sensors in the motor	Price is < US\$ 1000 Myocardium is used as pump housing Pump may also be used in grafts Motor shaft is glued to the rotor	Laboratory
Streamliner					 <p>Magnetically levitated bearings Conical in shape Blood lubricated and biocompatible bearings</p>	No seals	Internal and external controller coupled with TETS	Computationally optimized impeller geometry CFD-based design	Laboratory

TETS = transcatheter energy transmission system; CFD = computational fluid dynamic.

FIG. A.3 – Caractéristiques des pompes axiales [Reu00]



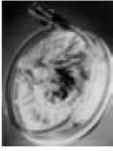
Pump	Weight/size	Flow rate (l/min)	Rotational speed (RPM)	Power requirement (Watts)	Type of bearings	Type of seal	Type of sensor	Additional features	Stage of development
Bio-Pump	200 g / 87 cc	6	5,000	8	Polycarbonate journal bearing	Flexible polymeric seal	Bio-console: electromagnetic flow measurement and pump speed controller	Rotating cone type pump Constrained Force Vortex pump Bioactive surface available for improved biocompatibility BP-80: adult biopump BP-50: pediatric biopump Frequently used as reference pump for comparison studies	Clinical use (> 20 years)
									
Capiox	46 cc	5	3000		Ball bearings	Polymeric lip seal	Autoflow cruise control system adjusts rotational speed to desired flow rate Ultrasonic doppler flow meter	Straight-Path Rotor reduces pump speed without decreasing hydraulic efficiency resulting in less hemolysis Rotor powered by magnetic coupling Automatic priming function allows pulsatile flow mode	Clinical use
									
Sarns Delphin	130 g	9	3600		Ball bearings	Polymeric lip seal Problems with seal disruption encountered in clinical use	Microcomputer-based control console Doppler flow sensor	Pulsatile flow mode option Open impeller with straight vanes Activated by magnetic coupling	Clinical use (> 10 years)
									

FIG. A.4 – Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]

A. Caractéristiques des principales pompes rotatives

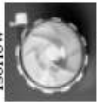



	290 g	9	3500	Sleeve bearings (sintered slide bearings) and ball bearing (axial thrust bearing)	Lip seal	Microprocessor-based system controller	Open impeller with curved vanes	Clinical use (> 10 years)
	35 cc	10	4000	Magnetic stabilized rotor bearing (radial magnetic suspension) Low friction blood-immersed pivot bearing — sapphire ball (Al ₂ O ₃) and polyethylene calotte without shaft seals	No seals	Reusable ultrasonic flow rate sensor Flow and bubble sensors in drive unit, pressure transducers Stand-alone console	Activated by magnetic coupling Rotor powered by radial magnetic coupling Logarithmic spiral channels	Clinical use
	145 g/25 cc	10	36 000	Ball bearings	V-shaped ring seal made of fluororubber	Ultrasonic flow meter External console	Activated by magnetic coupling Rotor driven by console through flexible shaft (therefore its smaller size) CFD studies on hemolysis Six straight vanes, six washout holes 2-week test with purging system washing the shaft-seal area	Clinical use
	90 g/30 cc	6	3500	Spherical blood-immersed rotor thrust bearing Ceramic-polymer pairing Minimal contact radius reduced heat generation within the bearing area	No seals	Pressure transducer and flow probe	Activated by magnetic coupling Pulsatile pumping option	Laboratory

FIG. A.5 – Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]





Rotodynamic 	207 g/ 62 cc	5	3000	6—7	Blood-lubricated hydrodynamic journal bearings Magnetic attraction between stator-rotor acts as thrust bearing	No seals	Flow rate proportional to heart rate determined by pace maker	Grooved bearing surface provides a self-pumping action that generates wash flow Motor is surrounded by cooling blood flow TETS used for energy supply	Laboratory
Gyro 	305 g/ 145 cc	10	26 000	7	Double pivot bearing system at top and bottom of impeller Blood-immersed bearings Alumina Ceramic (Al ₂ O ₃) Male pivot and polyethylene (UHMWPE) female pivot	No seals	Actuator controller	Eccentric inlet port eliminates obstacles in the blood path Activated by magnetic coupling Gyro PI: implantable — VAD GyroCIE3: paracorporeal — CPB	Animal experiments
AB-180 	284 g/ 44 cc	6	4500	4	Hydrodynamic journal bearing made of polycarbonate Lubricated and cooled by sterile water/heparin infusion	Polyurethane-coated rubber seal	Microprocessor-based device regulates pump speed, infusions rate and occluder safety system	Balloon occluder system: prevents backflow from Aorta to left atrium if the pump fails Heparin infusion also used for anti-coagulation Rotor is powered by electromagnetic coupling	Clinical use
Vienna 	240 g/ 101 cc	6	2 500	15	Hybrid mechanical—magnetic bearing system (permanent magnets) Single mono-pivot mechanical support (ceramic/polyethylene)	No seal — no shaft	Various controllers tested: fuzzy nonlinear and neuronal	Activated by magnetic coupling using a double-disk motor Magnets used both for driving and bearing Previous model: rotor supported by three balls running on a convex carbon disk	Animal experiments

FIG. A.6 – Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]

A. Caractéristiques des principales pompes rotatives





Evaheart	280 g/ 150 cc	7	2500	9—10	Hydrodynamic journal bearing made of SiC Lubricated and cooled by purge fluid (sterile pure water) Viscous pumping effect by spiral grooves on bearing surface	Cool-Seal System : mechanical seal with circulating purge fluid	Ultrasonic flow measurement Thermocouple meter for purge fluid temperature	Purge fluid continuously purified and sterilized by ultrafiltration Diamond-like carbon coating	Animal experiments
									
Abiomed CF	190 cc	10	3500	25 (15 for bearings)	Active magnetic suspension in combination with hydrostatic stabilization Electromagnets as actuators Fluid between rotor and housing stabilize the magnetic suspension and contain axial motion	No seals — no shaft	Analog electronic feedback control system for radial position Proximity sensors	Activated by magnetic coupling using an internal motor More compact and efficient system in future design	Laboratory
									
Kriton	195 g/ 43 cc	6	5000	6—10	Passive radial magnetic bearing acting in synergy with blood-lubricated hydrodynamic bearings eliminating the need for proximity sensors Blood-lubricated pivot bearing to constrain axial motion	No seals	Pressure meter and transonic flow probes	Activated by magnetic coupling Thick-bladed impeller due to embedding of rotor magnets within the impeller blades	Laboratory
									
MSCP	400 g/ 196 cc	5	2.000	15 (9 for magnetic suspension)	Magnetic bearing Magnetic suspension of impeller providing contact free rotation Stainless steel motor bearings	No seals — no shaft	Position sensors for magnetic suspension of bearings Sensorless system: no need for a flow probe, flow rate obtained through motor current	Activated by magnetic coupling Extracorporeal device available Future design: TETS, pulsatile mode, implantable controller	Animal experiments
									

FIG. A.7 – Caractéristiques des pompes centrifuges [Reu00]

Annexe B

Présentation des outils numériques utilisés par la méthode des éléments finis

Dans cette annexe nous développons les principaux outils numériques utilisés lors de la méthode des éléments finis [Cha96] [Dha81].

B.1 Les éléments de référence

La notion d'élément de référence est introduite pour simplifier la définition analytique des éléments de forme élaborée, en particulier des éléments triangulaires ou quadratiques quelconques ou à côtés courbes, pour approcher au mieux les frontières.

Un élément de référence est donc un élément de forme très simple, repéré dans un espace de référence, qui peut être transformé en chaque élément réel par une transformation géométrique T_e , comme illustré sur la figure B.1 dans le cas d'un triangle.

La transformation T_e définit les coordonnées de X_e de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées U du point correspondant de l'élément de référence. La transformation T_e dépend de la forme et de la position de l'élément réel, donc des coordonnées géométriques qui le définissent. Il y a donc une transformation différente pour chaque élément réel. Nous avons donc :

$$T_e : U \rightarrow X_e = X_e(U, X_1, X_2, X_3) \quad (\text{B.1})$$

Les X_i représentent les coordonnées dans l'espace réel du noeud i . Cette transformation doit satisfaire les propriétés suivantes :

- être bijective,
- transformer le noeud i de l'élément de référence en noeud i de l'élément réel,

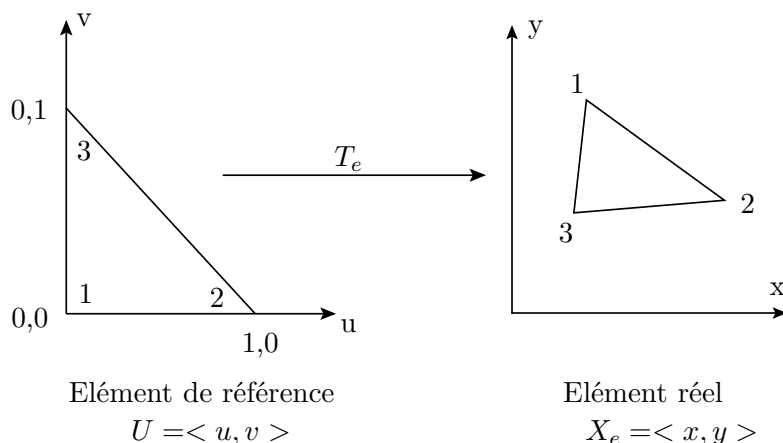


FIG. B.1 – Transformation géométrique en 2D d'un élément de référence triangulaire à un élément de forme quelconque

- transformer les frontières de l'élément de référence en frontières de l'élément réel.

La transformation choisie peut être linéaire par rapport aux coordonnées des noeuds de l'élément réel.

Par exemple :

$$T_e : U \rightarrow X_e = \sum_{i=1}^{n_e} \bar{N}_i(u) x_i \quad (\text{B.2})$$

n_e représente ici le nombre de noeuds de l'élément.

Par exemple pour un triangle à trois noeuds, nous avons :

$$x(u, v) = \bar{N}_1(u, v) x_1 + \bar{N}_2(u, v) x_2 + \bar{N}_3(u, v) x_3 \quad (\text{B.3})$$

$$y(u, v) = \bar{N}_1(u, v) y_1 + \bar{N}_2(u, v) y_2 + \bar{N}_3(u, v) y_3 \quad (\text{B.4})$$

Les \bar{N}_i sont alors appelés fonctions de transformation géométrique.

B.2 Les fonctions d'interpolation

Une fonction A est approximée sur un élément réel par des fonctions d'interpolation associées aux noeuds :

$$A(x, y) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(x, y) A_i \quad (\text{B.5})$$

Les A_i représentent alors les valeurs de la fonction A aux noeuds d'interpolation, les N_i sont appelés fonctions d'interpolation. Les noeuds d'interpolations choisis sont confondus aux noeuds géométriques de l'élément.

B.2.1 Interpolation sur l'élément de référence

Si nous remplaçons l'approximation sur un élément réel par une approximation sur l'élément de référence, nous obtenons :

$$A(u, v) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(u, v) A_i = [N(u)] \langle A_n \rangle \quad (\text{B.6})$$

Les mêmes fonctions $N(u)$, qui sont les fonctions d'interpolation dans l'élément de référence, peuvent donc être utilisées pour tous les éléments ayant le même élément de référence (élément de même type).

B.2.2 Expression des dérivées premières

L'expression des dérivées premières par rapport à x dans l'élément de référence est définie de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Dans cette équation $[J]$ est la matrice jacobienne de la transformation qui se forme de la manière suivante :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial \bar{N}_{n_e}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial \bar{N}_{n_e}}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n_e} & y_{n_e} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

B.2.3 Expression des intégrales

La valeur de l'intégrale d'une fonction G sur un élément par rapport à l'élément de référence, est donnée par la relation :

$$\iint_{S_e} G(x, y) dx dy = \iint_{S_r} G(x(u, v), y(u, v)) \det(J) du dv \quad (\text{B.9})$$

Dans cette équation S_e représente la surface de l'élément réel et S_r la surface de l'élément de référence. Ces intégrales sont du type :

$$\begin{aligned} & \iint_{S_e} G(A(x), \frac{\partial A(x)}{\partial x}) dx dy \\ &= \iint_{S_r} G(A(u), \frac{\partial A(u)}{\partial u}, [J]^{-1}) \det(J) du dv \\ &= \iint_{S_r} G(N(u), \frac{\partial N(u)}{\partial u}, [J]^{-1}, A_n) \det(J) du dv \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

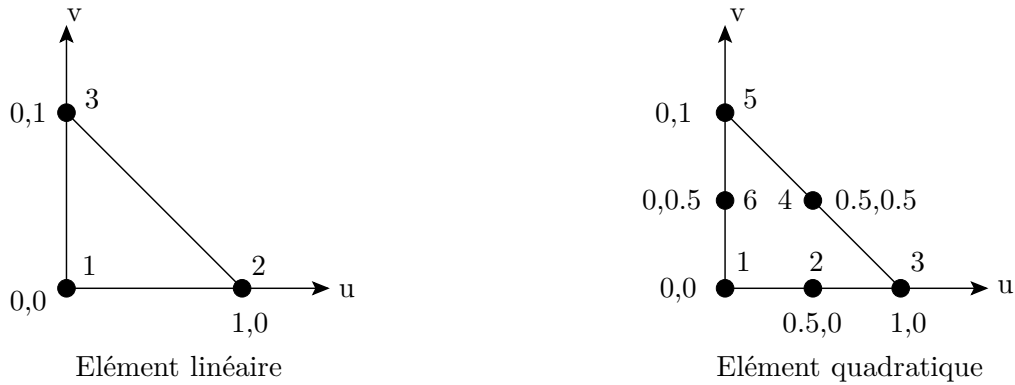


FIG. B.2 – Éléments triangulaire linéaire et quadratique

Noeud	N	$\frac{\partial N}{\partial u}$	$\frac{\partial N}{\partial v}$
1	$1 - u - v$	-1	-1
2	u	1	0
3	v	0	1

TAB. B.1 – Fonctions pour l'élément triangulaire linéaire

B.3 Expression des fonctions \bar{N} et N

Seuls des éléments isoparamétriques sont utilisés dans notre exemple. Les fonctions d'interpolation sont confondues aux fonctions de transformations géométriques ($N = \bar{N}$). Seuls quatre types d'éléments sont présentés ici, les éléments triangulaires et quadrangulaires du premier et du deuxième ordre.

B.3.1 Les éléments triangulaires

La figure B.2 présente les éléments de référence utilisés avec des éléments triangulaires du premier et du second ordre respectivement.

Le tableau B.1 montre par exemple les fonctions d'interpolations utilisées avec les éléments triangulaires linéaires.

Le tableau B.2 montre les fonctions utilisées avec des éléments triangulaires quadratiques, ici nous avons noté $w = 1 - u - v$.

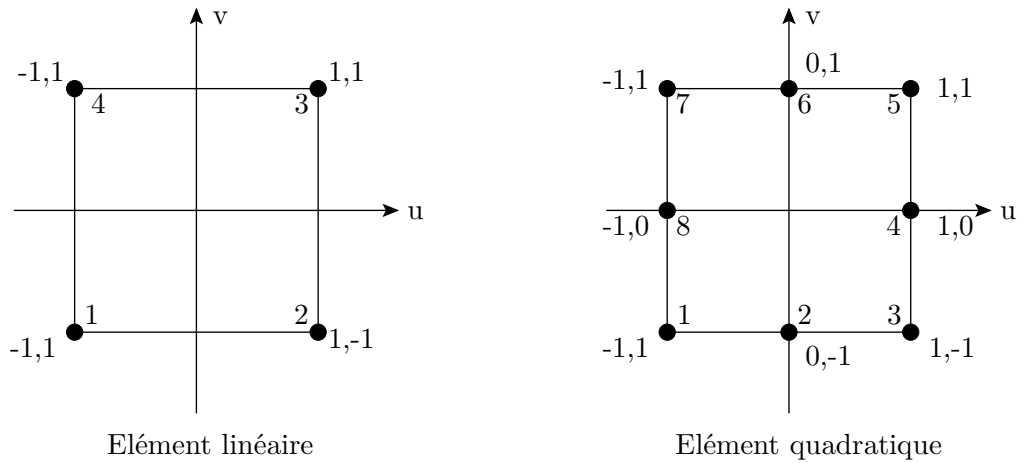
B.3.2 Les éléments quadrangulaires

La figure B.3 montre les éléments de référence utilisés pour les éléments quadrangulaires du premier et du deuxième ordre.

Les tableaux B.3 et B.4 présentent les fonctions associées aux éléments quadrangulaires linéaires et quadratiques.

Noeud	N	$\frac{\partial N}{\partial u}$	$\frac{\partial N}{\partial v}$
1	$w(1 - 2w)$	$1 - 4w$	$1 - 4w$
2	$4uw$	$4(w - u)$	$-4u$
3	$-u(1 - 2u)$	$-1 + 4u$	0
4	$-4uv$	$4v$	$4u$
5	$-v(1 - 2v)$	0	$-1 + 4v$
6	$4vw$	$-4v$	$4(w - v)$

TAB. B.2 – Fonctions pour l'élément triangulaire quadratique



Elément linéaire

Elément quadratique

FIG. B.3 – Éléments quadrangulaire linéaire et quadratique

Noeud	N	$\frac{\partial N}{\partial u}$	$\frac{\partial N}{\partial v}$
1	$(1-u)(1-v)/4$	$(v-1)/4$	$(u-1)/4$
2	$(1+u)(1-v)/4$	$(1-v)/4$	$(-1-u)/4$
3	$(1+u)(1+v)/4$	$(1+v)/4$	$(1+u)/4$
4	$(1-u)(1+v)/4$	$(-1-v)/4$	$(1-u)/4$

TAB. B.3 – Fonctions pour l'élément quadrangulaire linéaire

Noeud	N	$\frac{\partial N}{\partial u}$	$\frac{\partial N}{\partial v}$
1	$-(1-u)(1-v)(1+u+v)/4$	$(1-v)(2u+v)/4$	$(1-u)(u+2v)/4$
2	$(1-u^2)(1-v)/2$	$-(1-v)u$	$-(1-u^2)/2$
3	$-(1+u)(1-v)(1-u+v)/4$	$(1-v)(2u-v)/4$	$-(1+u)(u-2v)/4$
4	$(1+u)(1+v^2)/2$	$(-1-v^2)/2$	$-(1+u)v$
5	$-(1+u)(1+v)(1-u-v)/4$	$(1+v)(2u+v)/4$	$(1+u)(u+2v)/4$
6	$(1+v)(1-u^2)/2$	$-(1+v)u$	$(1-u^2)/2$
7	$-(1-u)(1+v)(1+u-v)/4$	$(1+v)(2u-v)/4$	$-(1-u)(u-2v)/4$
8	$(1-u)(1-v^2)/2$	$-(1-v^2)/2$	$-(1-u)v$

TAB. B.4 – Fonctions pour l'élément quadrangulaire quadratique

B.4 Points de Gauss

Pour calculer l'intégrale d'une fonction sur un élément de référence, nous utilisons la méthode des points de Gauss. La méthode de Gauss est une méthode de calcul numérique d'intégrales à poids. La valeur de l'intégrale est approximée par la somme pondérée de la valeur de la fonction en un certain nombre de points particuliers de l'élément. Ces points sont appelés points de Gauss. A chaque point de Gauss est associé un poids comme montré dans l'équation B.11.

$$\iint_{S_r} Y(u, v) dudv = \sum_{ig=1}^{npg} w_{ig} Y(u_{ig}, v_{ig}) \quad (\text{B.11})$$

Avec :

ig : Point de Gauss considéré.

u_{ig}, v_{ig} : Coordonnées du point de Gauss ig .

w_{ig} : Poids associé au point de Gauss ig .

Plus le nombre de points de Gauss est augmenté plus la précision de l'intégrale est améliorée.

Les tableaux B.5 et B.6 donnent les coordonnées et les poids des points de gauss pour respectivement, des éléments triangulaires et des éléments quadrangulaires.

Nombre	u_{ig}	v_{ig}	w_{ig}
1	$1/3$	$1/3$	$1/2$
3	$1/2$ 0 $1/2$	$1/2$ $1/2$ 0	$1/6$
4	$1/3$ $1/5$ $3/5$ $1/5$	$1/3$ $1/5$ $1/5$ $3/5$	$-27/96$ $25/96$ $25/96$ $25/96$
6 a=0.445948 b=0.091576	a $1 - 2a$ a b $1 - 2b$ b	a a $1 - 2a$ b b $1 - 2b$	0.11169 0.11169 0.11169 0.054976 0.054976 0.054976
7 $a = (6+\sqrt{15})/21$ $b = 4/7 - a$	$1/3$ a $1 - 2a$ a b $1 - 2b$ b	$1/3$ a a $1 - 2a$ b b $1 - 2b$	$9/80$ $A = (155+\sqrt{15})/2400$ A A $B = 31/240 - A$ B B

TAB. B.5 – Points de Gauss pour un élément triangulaire

Nombre	u_{ig}	v_{ig}	w_{ig}
3	$\sqrt{2/3}$ $-1/\sqrt{6}$	0 $\pm 1/\sqrt{2}$	$4/3$ $4/3$
4	$\pm 1/\sqrt{3}$	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
7	0 0 $\pm \sqrt{3/5}$	0 $\pm \sqrt{14/15}$ $\pm \sqrt{3/5}$	$8/7$ $20/63$ $20/36$

TAB. B.6 – Points de Gauss pour un élément quadrangulaire

Annexe C

Forme forte des équations du champ avec le potentiel vecteur

Dans cette partie, la forme forte des équations du champ, avec la formulation du potentiel vecteur, est illustrée sur l'exemple présenté dans la partie 4.4.

Les équations, à l'intérieur des milieux de perméabilité magnétique constante, ont été détaillés dans la partie 4.5.

C.1 Les équations aux interfaces

C.1.1 Interface Air-Fer

- Interface [nb]

Au niveau des interfaces et notamment au niveau du segment [nb], la grille utilisée est illustrée sur la Figure C.1.

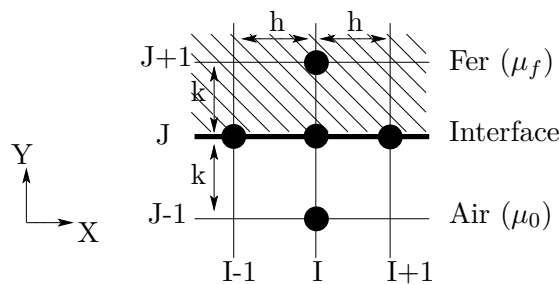


FIG. C.1 – Grille utilisée sur l'interface [nb] Fer-Air

En considérant le potentiel vecteur, la continuité de la composante H_t au niveau de l'interface s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{1}{\mu_f} \frac{\partial A_{fer}}{\partial y} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{air}}{\partial y} \quad (C.1)$$

Avec la formule de Taylor et en utilisant la méthode des différences finies, l'équation suivante est obtenue :

$$A_{I,J-1} = A_{I,J} - k \frac{\partial A_{I,J}}{\partial y} + k^2 \frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial y^2} \quad (\text{C.2})$$

L'équation de Laplace dans l'air permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 A_{I,J}}{\partial x^2} \quad (\text{C.3})$$

En injectant l'expression C.3 dans l'équation C.2, la dérivée partielle par rapport à y du potentiel vecteur au niveau de l'interface [ab] du côté de l'air est obtenue :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial y} \right)_{air} = - \frac{A_{I,J-1}}{k} - \frac{k}{2h^2} A_{I-1,J} + \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} - \frac{k}{2h^2} A_{I+1,J} \quad (\text{C.4})$$

En utilisant la même procédure du côté du fer, la dérivée partielle s'écrit :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial y} \right)_{fer} = \frac{k}{2h^2} A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} + \frac{k}{2h^2} A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{k} \quad (\text{C.5})$$

Pour obtenir l'équation du potentiel vecteur d'un noeud I,J situé sur l'interface [nb], il ne reste plus qu'à imposer la continuité de la composante H_t . Pour cela il faut injecter dans l'équation C.1 les expressions des dérivées premières du côté de l'air et du fer (équation C.4 et C.5). En utilisant ce principe, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J situé sur l'interface [nb] peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{k \cdot \mu_0} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{k \cdot \mu_f} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

• **Interface [oc] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [oc] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure C.2, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J s'écrit sous la forme :

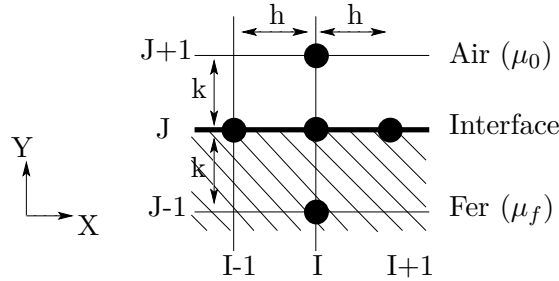


FIG. C.2 – Grille utilisée sur l'interface [oc] Fer-Air

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_f k} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_0 k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

• **Interface [cb] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [cb] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure C.3, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J s'écrit sous la forme :

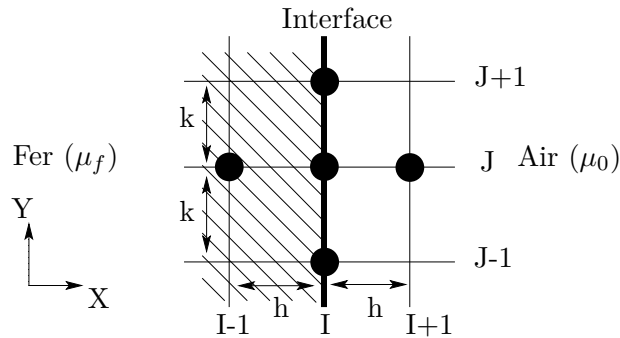


FIG. C.3 – Grille utilisée sur l'interface [cb] Fer-Air

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J-1} + \frac{A_{I-1,J}}{\mu_f h} - \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) A_{I,J} \\ + \frac{A_{I+1,J}}{\mu_0 h} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J+1} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

C.1.1.1 Interface Air-Aimant

Le long de l'interface [fg], entre l'air et l'aimant, les équations du potentiel vecteur aux noeuds I,J sont différentes puisque c'est sur cette interface que la polarisation magnétique de l'aimant est prise en compte. La grille utilisée le long de cette interface est présentée sur la Figure C.4.

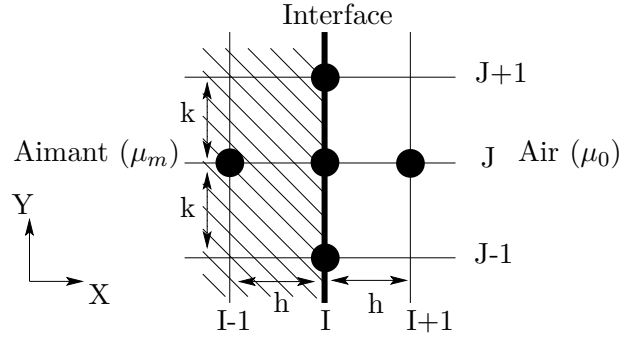


FIG. C.4 – Grille utilisée au niveau de l'interface [fg] Air-Aimant.

Dans ce cas les conditions de passage entre l'aimant et l'air s'écrivent :

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) = \frac{1}{\mu_m} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{J_r}{\mu_m} \quad (\text{C.9})$$

Avec :

μ_0 : Perméabilité magnétique de l'air.

μ_m : Perméabilité magnétique de l'aimant.

J_r : Polarisation magnétique de l'aimant.

En utilisant la même technique que précédemment les dérivées partielles par rapport à x du potentiel vecteur aux noeuds I,J s'écrivent, respectivement pour l'air et pour l'aimant, sous la forme :

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial x} \right)_{air} = \frac{h}{2k^2} A_{I,J-1} - \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) A_{I,J} + \frac{A_{I+1,J}}{h} + \frac{h}{2k^2} A_{I,J+1} \quad (\text{C.10})$$

$$\left(\frac{\partial A_{I,J}}{\partial x} \right)_{aimant} = -\frac{h}{2k^2} A_{I,J-1} - \frac{A_{I-1,J}}{h} + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) A_{I,J} - \frac{h}{2k^2} A_{I,J+1} \quad (\text{C.11})$$

L'équation aux noeuds I,J située sur l'interface [fg] est obtenue en imposant la continuité de la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique.

L'équation s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J-1} + \frac{A_{I-1,J}}{h \cdot \mu_m} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2}\right) A_{I,J} \\ + \frac{A_{I+1,J}}{h \cdot \mu_0} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0}\right) \frac{h}{2k^2} \cdot A_{I,J+1} = \frac{J_r}{\mu_m} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

- **Interface [lf] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [lf] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure C.5, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J s'écrit sous la forme :

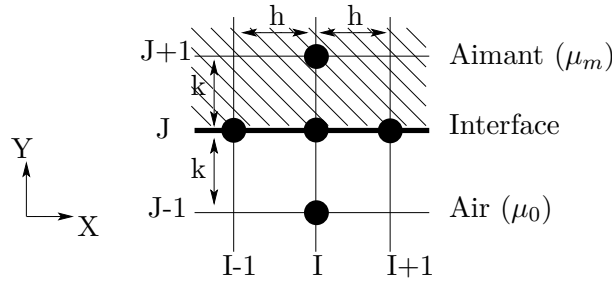


FIG. C.5 – Grille utilisée sur l'interface [lf] Air-Aimant

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_0 k} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I-1,J} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2}\right) A_{I,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I+1,J} + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_m k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

- **Interface [mg] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [lf] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure C.6, l'expression du potentiel vecteur au noeud I,J s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I-1,J} + \frac{A_{I,J-1}}{\mu_m k} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2}\right) A_{I,J} \\ + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_0 k} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{k}{2h^2} \cdot A_{I+1,J} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

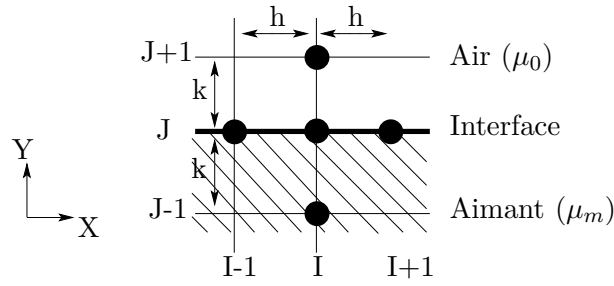


FIG. C.6 – Grille utilisée au niveau de l’interface [mg] Air-Aimant

C.2 Equations aux angles

C.2.1 Pour le fer

Pour la pièce ferromagnétique, les équations pour les coins supérieurs et inférieurs sont les suivantes [Dur68] :

- **Noeud c :**

La grille utilisée pour l’angle supérieur, est illustrée sur la Figure C.7.

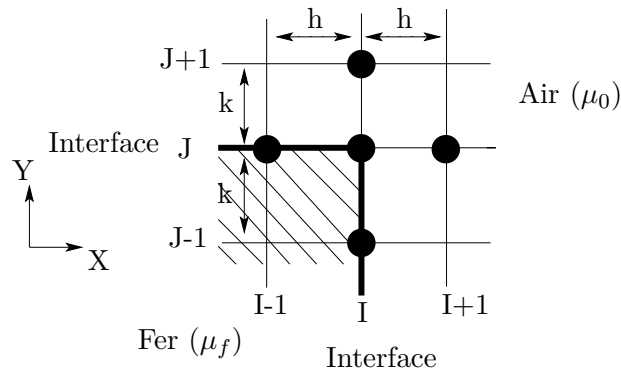


FIG. C.7 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur du fer

L’équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s’écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu_0} A_{I+1,J} + \frac{2}{\mu_0} A_{I,J+1} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I-1,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I,J-1} - 2 \left(3 \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) A_{I,J} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

• **Noeud b :**

La grille utilisée pour l'angle inférieur, est illustrée sur la Figure C.8.

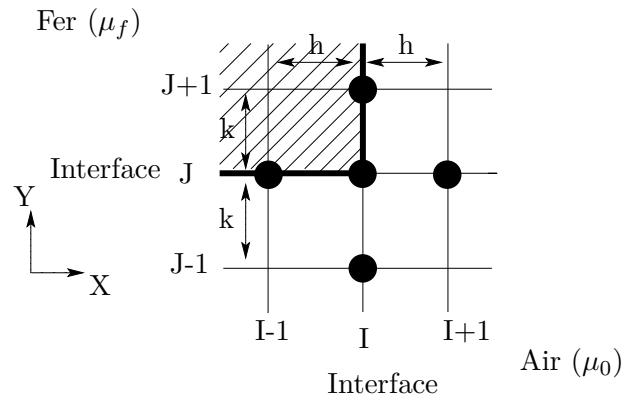


FIG. C.8 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur du fer

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu_0} A_{I+1,J} + \frac{2}{\mu_0} A_{I,J-1} + \left(\frac{1}{\mu_f} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I-1,J} \\ + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) A_{I,J+1} - 2 \left(3 \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) A_{I,J} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

C.2.2 Pour l'aimant

Pour l'aimant, les équations pour les coins supérieurs et inférieurs sont les suivantes [Dur68] :

• **Noeud g :**

La grille utilisée pour l'angle supérieur, est illustrée sur la Figure C.9.

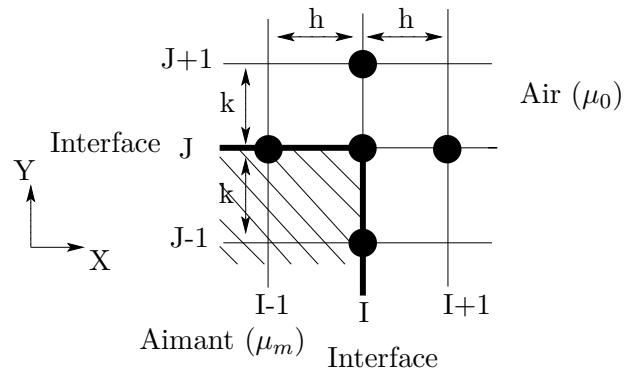


FIG. C.9 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur de l'aimant

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu_0} A_{I+1,J} + \frac{2}{\mu_0} A_{I,J+1} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I-1,J} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I,J-1} \\ - 2 \left(3 \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) A_{I,J} = \frac{h J_r}{\mu_m} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

• **Noeud f :**

La grille utilisée pour l'angle inférieur, est illustrée sur la Figure C.10.

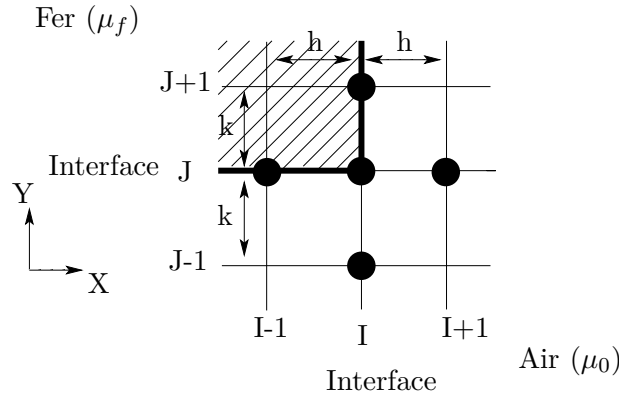


FIG. C.10 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit de l'aimant

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu_0} A_{I+1,J} + \frac{2}{\mu_0} A_{I,J-1} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I-1,J} + \left(\frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_0} \right) A_{I,J+1} \\ - 2 \left(3 \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) A_{I,J} = \frac{h J_r}{\mu_m} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

C.3 Equations aux bordures

C.3.1 Equations aux limites

Les conditions limites utilisées sont de type Dirichlet homogène, un champ nul est donc imposé sur les segments $[kq]$, $[rq]$, $[pr]$ et sur les noeuds k , q , r et p .

$$A_{I,J} = 0 \quad (\text{C.19})$$

C.3.2 Conditions de symétrie

Au niveau de l'interface [pk], la condition de symétrie par rapport à l'axe des Y doit être respectée. Donc par condition de symétrie les potentiels sont imposés :

$$A_{I+1,J} = A_{I-1,J} \quad (\text{C.20})$$

Pour obtenir les équations aux noeuds I,J le long de l'interface [pk], il ne reste plus qu'à appliquer cette condition au niveau de l'équation des milieux intérieurs pour les noeuds situés sur les interfaces [lk], [lm], [mn], [no], et [op].

Dans ces cas, l'équation au noeud I,J situé à l'intérieur d'un milieu de perméabilité magnétique constant et sur l'axe de symétrie peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{A_{I,J-1}}{k^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) A_{I,J} + \frac{2 A_{I+1,J}}{h^2} + \frac{A_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{C.21})$$

Pour les noeuds situés sur les points l, m, n et o, il faut appliquer le même principe mais en utilisant, respectivement, les équations des interfaces [lf], [mg], [nb] et [oc].

Pour le noeud l :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_0 k} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) \frac{k}{h^2} \cdot A_{I+1,J} \\ + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_m k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Pour le noeud m :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_m k} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_m} \right) \frac{k}{h^2} \cdot A_{I+1,J} \\ + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_0 k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Pour le noeud n :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_0 k} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) \frac{k}{h^2} \cdot A_{I+1,J} \\ + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_f k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

Pour le noeud o :

$$\begin{aligned} \frac{A_{I,J-1}}{\mu_f k} - \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) A_{I,J} + \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_f} \right) \frac{k}{h^2} \cdot A_{I+1,J} \\ + \frac{A_{I,J+1}}{\mu_0 k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Annexe D

Forme forte des équations du champ avec le potentiel scalaire magnétique

Dans cette partie, la forme forte des équations du champ est illustrée sur l'exemple présenté dans la partie 4.4, avec la formulation du potentiel scalaire magnétique.

D.1 Equations à l'intérieur des milieux

Les équations constitutives des milieux pour l'aimant, l'air et le fer sont, respectivement :

$$\vec{B}_m = \mu_m \vec{H}_m + \vec{J}_r \quad (\text{D.1})$$

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (\text{D.2})$$

$$\vec{B}_f = \mu_f \vec{H}_f \quad (\text{D.3})$$

Avec :

μ_m : Perméabilité magnétique de l'aimant.

μ_0 : Perméabilité magnétique de l'air.

μ_f : Perméabilité magnétique du fer.

\vec{J}_r : Polarisation magnétique.

En introduisant le potentiel scalaire magnétique Ω (Equation D.4) dans les équations constitutives des milieux, nous obtenons, par exemple pour la pièce ferromagnétique, l'équation D.5, représentant l'équation de Laplace, dans le cas où la perméabilité des matériaux est uniforme dans toutes les directions de l'espace.

$$\vec{H} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Omega \quad (\text{D.4})$$

D'où :

$$\mu_f \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \mu_f \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{D.5})$$

L'équation D.5 est également utilisée pour calculer le potentiel scalaire magnétique Ω situé à l'intérieur des milieux air et aimant. Il suffit juste de remplacer, suivant le milieu considéré, la perméabilité magnétique du fer par celle de l'air ou de l'aimant.

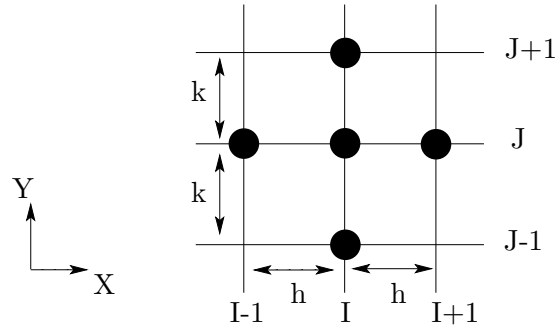


FIG. D.1 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies à l'intérieur d'un matériau de perméabilité magnétique constante

En utilisant la méthode des différences finies sur la grille illustrée sur la figure D.1, l'équation D.6 est obtenue pour un noeud I,J placé dans un milieu de perméabilité magnétique constante.

$$\frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} + \frac{\Omega_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{\Omega_{I+1,J}}{h^2} + \frac{\Omega_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.6})$$

D.2 Les équations aux interfaces

D.2.1 Interface Air-Fer

- **Interface [nb]**

Au niveau de l'interface [nb] la grille, illustrée sur la figure D.2, est utilisée.

En considérant le potentiel scalaire magnétique, la continuité de B_n s'écrit de la manière suivante :

$$\mu_f \frac{\partial \Omega_{fer}}{\partial y} = \mu_0 \frac{\partial \Omega_{air}}{\partial y} \quad (\text{D.7})$$

Avec la formule de Taylor et en utilisant la méthode des différences finies, la dérivée première du côté de l'air s'écrit :

$$\Omega_{I,J-1} = \Omega_{I,J} - k \frac{\partial \Omega_{I,J}}{\partial y} + k^2 \frac{\partial^2 \Omega_{I,J}}{\partial y^2} \quad (\text{D.8})$$

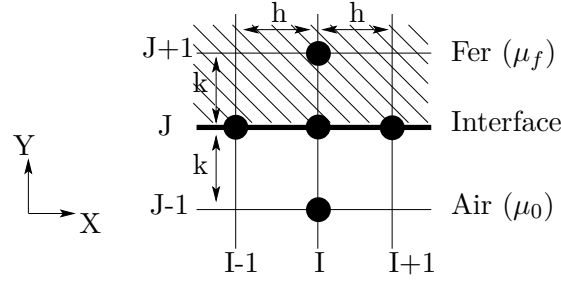


FIG. D.2 – Grille utilisée sur l'interface [nb]

L'équation D.5 dans l'air permet d'écrire :

$$\frac{\partial^2 \Omega_{I,J}}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \Omega_{I,J}}{\partial x^2} \quad (\text{D.9})$$

En injectant l'expression D.9 dans l'équation D.8, la dérivée partielle par rapport à y du potentiel vecteur au niveau de l'interface [ab] du côté de l'air peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{\partial \Omega_{I,J}}{\partial y} \right)_{air} = -\frac{\Omega_{I,J-1}}{k} - \frac{k}{2h^2} \Omega_{I-1,J} + \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} - \frac{k}{2h^2} \Omega_{I+1,J} \quad (\text{D.10})$$

En utilisant la même procédure du côté du fer, l'équation suivante est obtenue :

$$\left(\frac{\partial \Omega_{I,J}}{\partial y} \right)_{fer} = \frac{k}{2h^2} \Omega_{I-1,J} - \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{k}{2h^2} \Omega_{I+1,J} + \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} \quad (\text{D.11})$$

Pour obtenir l'équation du potentiel scalaire magnétique d'un noeud I,J situé sur l'interface [ab], il ne reste plus qu'à imposer la continuité de la composante H_t . Pour cela il faut injecter dans l'équation D.7 les expressions des dérivées premières du côté de l'air et du fer (équation D.10 et D.11). En utilisant ce principe, l'expression du potentiel scalaire au noeud I,J, situé sur l'interface [nb], s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I-1,J} - (\mu_f + \mu_0) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} + \mu_f \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

• **Interface [oc] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [oc] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure D.3, l'expression du potentiel scalaire au noeud I,J s'écrit sous la forme :

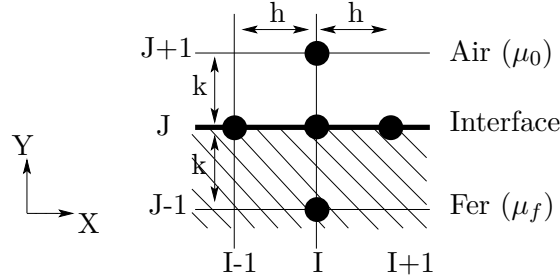


FIG. D.3 – Grille utilisée sur l'interface [oc] fer-air

$$\begin{aligned} \mu_f \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I-1,J} - (\mu_f + \mu_0) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} + \mu_0 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (D.13)$$

• **Interface [cb] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [cb] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure D.4, l'expression du potentiel scalaire au noeud I,J s'écrit sous la forme :

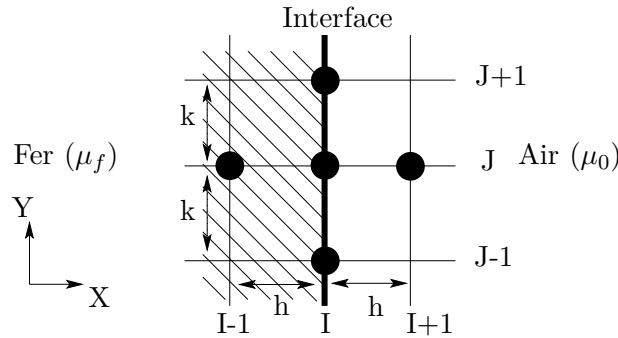


FIG. D.4 – Grille utilisée sur l'interface [cb] Fer-Air

$$\begin{aligned} (\mu_f + \mu_0) \frac{h}{2k^2} \cdot \Omega_{I,J-1} + \mu_f \frac{\Omega_{I-1,J}}{h} - (\mu_f + \mu_0) \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + \mu_0 \frac{\Omega_{I+1,J}}{h} + (\mu_f + \mu_0) \frac{h}{2k^2} \cdot \Omega_{I,J+1} = 0 \end{aligned} \quad (D.14)$$

D.2.2 Interface Air-Aimant

Le long des interfaces [mg] et [lf], entre l'air et l'aimant, les équations du potentiel scalaire aux noeuds I,J sont différentes puisque c'est sur ces interfaces qu'est prise en considération la polarisation magnétique de l'aimant.

- **Interface [mg] :**

La grille utilisée le long de cette interface est présentée sur la Figure D.5.

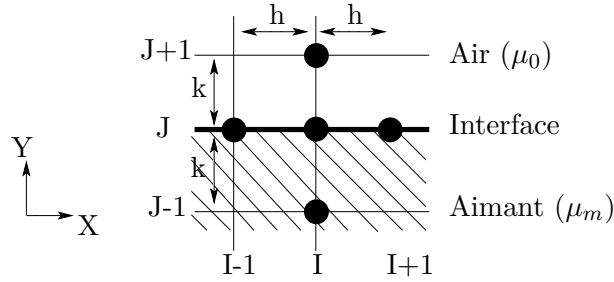


FIG. D.5 – Grille utilisée sur l'interface [mg] Air-Aimant

Dans ce cas les conditions de passage entre l'aimant et l'air s'écrivent :

$$\mu_0 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \mu_m \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) + J_r \quad (\text{D.15})$$

Avec :

μ_0 : Perméabilité magnétique de l'air.

μ_m : Perméabilité magnétique de l'aimant.

J_r : Polarisation magnétique de l'aimant.

En utilisant la même technique que précédemment les dérivées partielles par rapport à y du potentiel scalaire magnétique au noeud I,J s'écrivent, respectivement, pour l'air et pour l'aimant :

$$\left(\frac{\partial \Omega_{I,J}}{\partial y} \right)_{air} = \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} - \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{k}{2h^2} \Omega_{I+1,J} + \frac{k}{2h^2} \Omega_{I-1,J} \quad (\text{D.16})$$

$$\left(\frac{\partial \Omega_{I,J}}{\partial y} \right)_{aimant} = -\frac{\Omega_{I,J-1}}{k} + \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} - \frac{k}{2h^2} \Omega_{I+1,J} - \frac{k}{2h^2} \Omega_{I-1,J} \quad (\text{D.17})$$

En imposant la continuité de la composante normale du champ magnétique l'équation aux noeuds I,J située sur l'interface [mg] est obtenue :

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} + (\mu_0 + \mu_m) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I-1,J} - (\mu_0 + \mu_m) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + (\mu_m + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} + \mu_0 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = J_r \end{aligned} \quad (D.18)$$

• **Interface [lf] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [lf] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure D.6, l'expression du potentiel scalaire au noeud I,J s'écrit sous la forme :

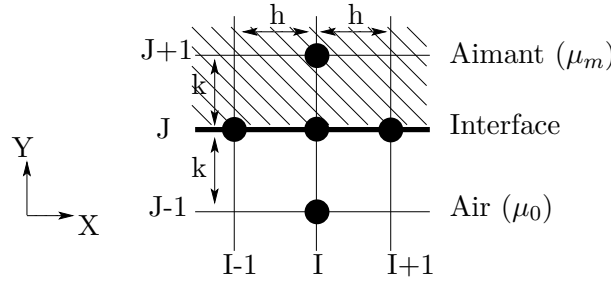


FIG. D.6 – Grille utilisée sur l'interface [lf] Air-Aimant

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} + (\mu_0 + \mu_m) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I-1,J} - (\mu_0 + \mu_m) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + (\mu_m + \mu_0) \frac{k}{2h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} + \mu_m \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = -J_r \end{aligned} \quad (D.19)$$

• **Interface [fg] :**

En appliquant la même procédure sur l'interface [fg] et en utilisant la grille illustrée sur la Figure D.7, l'expression du potentiel scalaire au noeud I,J s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} (\mu_0 + \mu_m) \frac{h}{2k^2} \cdot \Omega_{I,J-1} + \mu_m \frac{\Omega_{I-1,J}}{h} - (\mu_0 + \mu_m) \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{k^2} \right) \Omega_{I,J} \\ + \mu_0 \frac{\Omega_{I+1,J}}{h} + (\mu_m + \mu_0) \frac{h}{2k^2} \cdot \Omega_{I,J+1} = 0 \end{aligned} \quad (D.20)$$

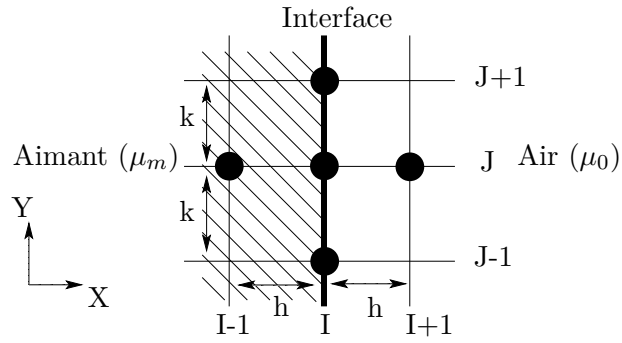


FIG. D.7 – Grille utilisée au niveau de l'interface [fg] Air-Aimant

D.3 Equations aux angles

D.3.1 Pour le fer

Pour la pièce ferromagnétique, les équations pour les coins supérieurs et inférieurs sont les suivantes [Dur68] :

- Noeud c :

La grille utilisée pour l'angle supérieur, est illustrée sur la Figure D.8.

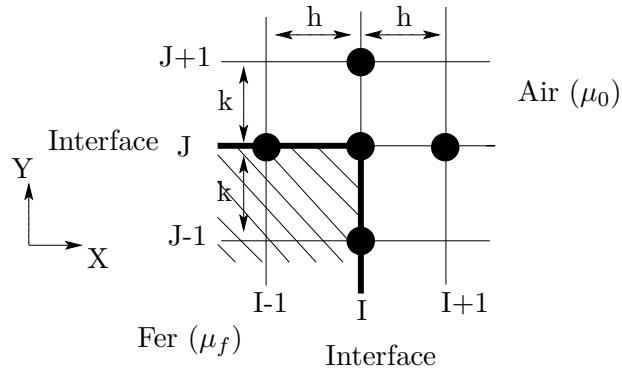


FIG. D.8 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur droit du fer

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
 2\mu_0\Omega_{I+1,J} + 2\mu_0\Omega_{I,J+1} + (\mu_f + \mu_0)\Omega_{I-1,J} \\
 + (\mu_f + \mu_0)\Omega_{I,J-1} - 2(3\mu_0 + \mu_f)\Omega_{I,J} = 0
 \end{aligned}
 \tag{D.21}$$

- Noeud b :

La grille utilisée pour l'angle inférieur, est illustrée sur la Figure D.9.

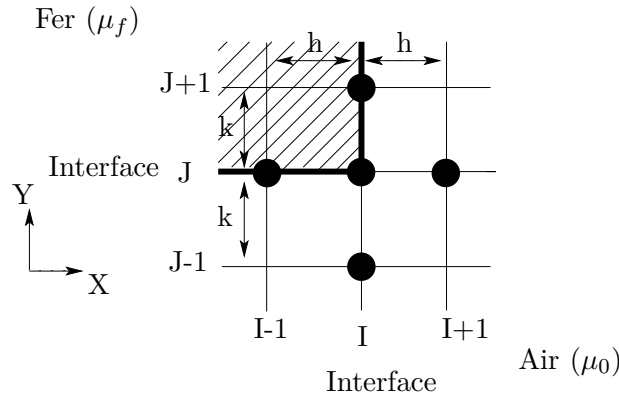


FIG. D.9 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit du fer

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$2\mu_0\Omega_{I+1,J} + 2\mu_0\Omega_{I,J-1} + (\mu_f + \mu_0)\Omega_{I-1,J} + (\mu_f + \mu_0)\Omega_{I,J+1} - 2(3\mu_0 + \mu_f)\Omega_{I,J} = 0 \quad (\text{D.22})$$

D.3.2 Pour l'aimant

Pour l'aimant, les équations pour les coins supérieurs et inférieurs sont les suivantes [Dur68] :

- **Noeud g :**

La grille utilisée pour l'angle supérieur, est illustrée sur la Figure D.10.

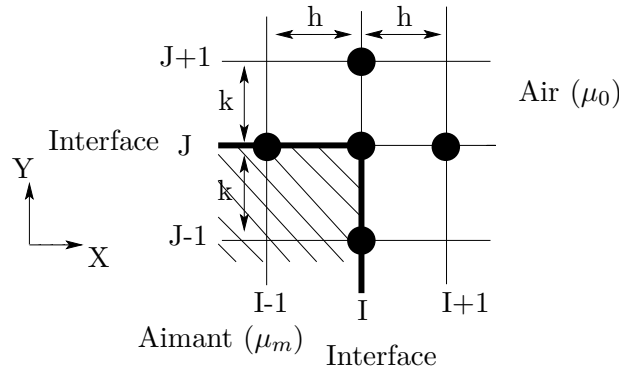


FIG. D.10 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle supérieur de l'aimant

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$2\mu_0\Omega_{I+1,J} + 2\mu_0\Omega_{I,J+1} + (\mu_m + \mu_0)\Omega_{I-1,J} + (\mu_m + \mu_0)\Omega_{I,J-1} - 2(3\mu_0 + \mu_m)\Omega_{I,J} = \frac{h}{\mu_0}(\mu_0 - \mu_m)J_r \quad (\text{D.23})$$

• **Noeud f :**

La grille utilisée pour l'angle inférieur, est illustrée sur la Figure D.11.

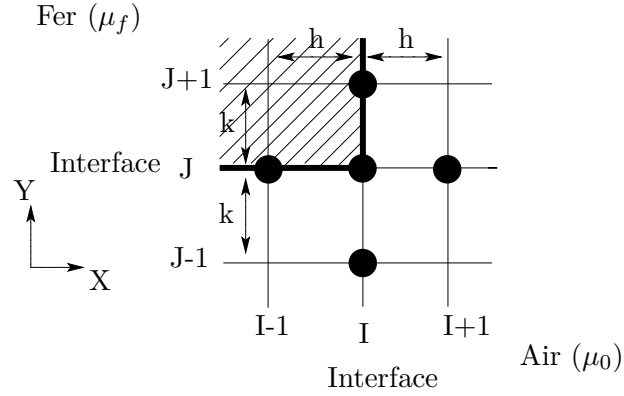


FIG. D.11 – Grille utilisée pour les calculs en différences finies : Angle inférieur droit de l'aimant

L'équation obtenue pour un maillage carré où $h = k$ s'écrit :

$$2\mu_0\Omega_{I+1,J} + 2\mu_0\Omega_{I,J-1} + (\mu_m + \mu_0)\Omega_{I-1,J} + (\mu_m + \mu_0)\Omega_{I,J+1} - 2(3\mu_0 + \mu_m)\Omega_{I,J} = -\frac{h}{\mu_0}(\mu_0 - \mu_m)J_r \quad (\text{D.24})$$

D.4 Equations aux bordures

D.4.1 Equations aux limites

Les conditions limites utilisées sont de type Neumann homogènes :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial n} = 0 \quad (\text{D.25})$$

Interfaces [kq] et [pr] :

Pour les interfaces [kq] et [pr], cette condition revient à imposer :

$$\Omega_{I,J+1} = \Omega_{I,J-1} \quad (\text{D.26})$$

Pour ces interfaces, il faut prendre l'équation obtenue à l'intérieur des milieux et appliquer la condition D.26.

Pour l'interface [kq], l'expression obtenue pour un noeud I,J est :

$$\frac{\Omega_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{\Omega_{I+1,J}}{h^2} + 2 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.27})$$

Pour l'interface [pr], l'expression obtenue pour un noeud I,J s'écrit :

$$\frac{\Omega_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{\Omega_{I+1,J}}{h^2} + 2 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.28})$$

Interface [rq] :

Pour l'interface [rq], la condition de Neumann homogène impose :

$$\Omega_{I+1,J} = \Omega_{I-1,J} \quad (\text{D.29})$$

Dans ce cas l'expression au noeud I,J, pour l'interface [rq], s'écrit :

$$\frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} + 2 \frac{\Omega_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{\Omega_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.30})$$

Noeud r :

Pour le noeud r, les deux conditions sont imposées, l'équation suivante est ainsi obtenue :

$$2 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} + 2 \frac{\Omega_{I-1,J}}{h^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} = 0 \quad (\text{D.31})$$

Noeud q :

Le potentiel situé au noeud q est simplement imposé à 0. Donc pour le noeud q :

$$\Omega_{I,J} = 0 \quad (\text{D.32})$$

D.4.2 Conditions de symétrie

Au niveau de l'interface [pk], la condition de symétrie par rapport à l'axe des Y doit être respectée. Donc, par condition de symétrie, les potentiels suivants sont imposés :

$$\Omega_{I+1,J} = \Omega_{I-1,J} \quad (\text{D.33})$$

Pour obtenir les équations aux noeuds I,J le long de l'interface [pk], il ne reste plus qu'à appliquer cette condition au niveau de l'équation des milieux intérieurs,

pour les noeuds situés sur les interfaces [lk], [lm], [mn], [no], [op].

Dans ces cas, l'équation au noeud I,J situé à l'intérieur d'un milieu de perméabilité magnétique constant et sur l'axe de symétrie peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} - 2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + \frac{2\Omega_{I+1,J}}{h^2} + \frac{\Omega_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.34})$$

Pour les noeuds situés sur les points k, l, m, n, o, et p, il faut appliquer le même principe mais en utilisant, respectivement, les équations des interfaces [kq], [lf], [mg], [nb], [oc], [pr].

Pour le noeud k :

$$-2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + 2 \frac{\Omega_{I+1,J}}{h^2} + 2 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.35})$$

Pour le noeud l :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} - (\mu_0 + \mu_m) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + (\mu_m + \mu_0) \frac{k}{h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} \\ + \mu_m \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = -J_r \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

Pour le noeud m :

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} - (\mu_0 + \mu_m) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + (\mu_m + \mu_0) \frac{k}{h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} \\ + \mu_0 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = J_r \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

Pour le noeud n :

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} - (\mu_f + \mu_0) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} \\ + \mu_f \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.38})$$

Pour le noeud o :

$$\begin{aligned} \mu_f \frac{\Omega_{I,J-1}}{k} - (\mu_f + \mu_0) \left(\frac{1}{k} + \frac{k}{h^2} \right) \Omega_{I,J} + (\mu_f + \mu_0) \frac{k}{h^2} \cdot \Omega_{I+1,J} \\ + \mu_0 \frac{\Omega_{I,J+1}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

Pour le noeud p :

$$-2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) \Omega_{I,J} + 2 \frac{\Omega_{I+1,J}}{h^2} + 2 \frac{\Omega_{I,J-1}}{k^2} = 0 \quad (\text{D.40})$$

Annexe E

Exemple de code utilisant une formulation forte

Le programme présenté ci-dessous utilise la formulation forte, et notamment les équations détaillées dans l'annexe C. Ce code est spécifique à l'exemple illustré sur la Figure 4.2 et a été programmé sous MATLAB en utilisant le potentiel vecteur.

```
clc
clear all
clf
digits(256);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Maillage utilisé "maillage fin 40cm air_18_07_07.xls"
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% paramètres de départ
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

J=94;           % Nombre de lignes
I=40;           % Nombre de colonnes
Nbrenoeudsmax=J*I;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Géométrie
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

hauteuraimant=0.02;
largeuraimant=0.04;
entrefer =0.01;
fer=0.04;
air=0.4;

% Définitions des matériaux

% air
murair=1;
muair=murair*pi*4e-7;

% fer
murfer=1000;
mufer=1000*4*pi*1e-7;
```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
% aimant
muraimant=1.02;
muaimant=muraimant*4*pi*1e-7;
brym=1;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Matrice des potentiels
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    tabpotentiel=zeros(Nbrenoeudsmax,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Matrices A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Remplissage de la matrice de 0
    matrice=zeros(Nbrenoeudsmax,Nbrenoeudsmax);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Conditions aux limites
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% On mets zéro pour tous les potentiels en bordure

for toto=2:39
    matrice(toto,toto)=1e12;
end

for toto=1:40:3721
    matrice(toto,toto)=1e12;
end

for toto=3722:3759
    matrice(toto,toto)=1e12;
end

for toto=40:40:3760
    matrice(toto,toto)=1e12;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Point intérieur d'un milieu
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% air noeuds de 42 à 662
h=0.002;
k=0.02;
toto=42;
for compteur=1:1:16
    for compt=1:1:21
        matrice(toto,toto-40)=(1/(k^2));
        matrice(toto,toto-1)=(1/(h^2));
        matrice(toto,toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto,toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto,toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+19;
end

% air noeuds de 3082 à 3102
```

```

h=0.002;
k=0.02;
toto=3082;
for compteur=1:1:16
    for compt=1:1:21
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+19;
end

% air noeuds de 63 à 663 et 3103 à 3703
h=0.002;
h1=0.02;
k=0.02;
for toto=63:40:663
    matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
    matrice(toto , toto -1)=(2*h1)/(h1*(h^2)+h*(h1^2));
    matrice(toto , toto)=-2*((h+h1)/((h1*(h^2))+(h*(h1^2))))+(1/(k^2));
    matrice(toto , toto+1)=(2*h^2)/(h1*h^2+h*h1^2);
    matrice(toto , toto+40)=1/(k^2);
end
for toto=3103:40:3703
    matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
    matrice(toto , toto -1)=(2*h1)/((h1*(h^2))+(h*(h1^2)));
    matrice(toto , toto)=-2*((h+h1)/(h1*h^2+h*h1^2))+(1/(k^2));
    matrice(toto , toto+1)=(2*h^2)/(h1*h^2+h*h1^2);
    matrice(toto , toto+40)=1/(k^2);
end

% air noeuds de 64 à 679
h=0.02;
k=0.02;
toto=64;
for compteur=1:1:16
    for compt=1:1:16
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+24;
end

% air noeuds de 3104 à 3719
h=0.02;
k=0.02;
toto=3104;
for compteur=1:1:16
    for compt=1:1:16
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
end

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
toto=toto+24;
end

% air noeuds de 704 à 719
h=0.02;
k1=0.002;
k=0.02;
for toto=704:1:719
    matrice(toto , toto -40)=(2*k1)/(k1*k^2+k*k1^2);
    matrice(toto , toto -1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto )=-2*((k+k1)/(k1*k^2+k*k1^2)+(1/(h^2)));
    matrice(toto , toto +1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto +40)=(2*k)/(k1*k^2+k*k1^2);
end

% air noeuds de 744 à 3039
h=0.02;
k=0.002;
toto=744;
for compteur =1:1:58
    for compt =1:1:16
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=1/(h^2);
        matrice(toto , toto )=-2*((1/(h^2)+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto +1)=1/(h^2);
        matrice(toto , toto +40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+24;
end

% air noeuds de 3064 à 3079
h=0.02;
k1=0.002;
k=0.02;
for toto=3064:1:3079
    matrice(toto , toto -40)=(2*k)/(k1*k^2+k*k1^2);
    matrice(toto , toto -1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto )=-2*((k+k1)/(k1*k^2+k*k1^2)+(1/(h^2)));
    matrice(toto , toto +1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto +40)=(2*k1)/(k1*k^2+k*k1^2);
end

% air noeuds de 682 à 702
h=0.002;
k1=0.002;
k=0.02;
for toto=682:1:702
    matrice(toto , toto -40)=(2*k1)/(k1*k^2+k*k1^2);
    matrice(toto , toto -1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto )=-2*((k+k1)/(k1*k^2+k*k1^2)+(1/(h^2)));
    matrice(toto , toto +1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto +40)=(2*k)/(k1*k^2+k*k1^2);
end

% air noeuds de 3042 à 3062
h=0.002;
k=0.02;
k1=0.002;
for toto=3042:1:3062
    matrice(toto , toto -40)=(2*k)/(k1*k^2+k*k1^2);
    matrice(toto , toto -1)=1/(h^2);
    matrice(toto , toto )=-2*((k+k1)/(k1*k^2+k*k1^2)+(1/h^2));
```

```

    matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
    matrice(toto , toto+40)=(2*k1)/(k*k1^2+k1*k^2);
end

% air noeuds de 722 à 731 jusqu'a 1122 à 1131
h=0.002;
k=0.002;
toto=722;
for compteur=1:1:11
    for compt=1:1:10
        matrice(toto , toto-40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto-1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+30;
end

% air noeuds de 1602 à 1611 jusqu'a 1722 à 1731
h=0.002;
k=0.002;
toto=1602;
for compteur=1:1:4
    for compt=1:1:10
        matrice(toto , toto-40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto-1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+30;
end

% air noeuds de 2602 à 2611 jusqu'a 3002 à 3011
h=0.002;
k=0.002;
toto=2602;
for compteur=1:1:11
    for compt=1:1:10
        matrice(toto , toto-40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto-1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+30;
end

% aimant noeuds de 1202 à 1210 jusqu'a 1522 à 1530
h=0.002;
k=0.002;
toto=1202;
for compteur=1:1:9
    for compt=1:1:9
        matrice(toto , toto-40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto-1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto)=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto+1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto+40)=(1/(k^2));
    end
end

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
toto=toto+1;
end
toto=toto+31;
end

% fer noeuds de 1802 à 1810 jusqu'a 2522 à 2530
h=0.002;
k=0.002;
toto=1802;
for compteur=1:1:19
    for compt=1:1:9
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto )=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto +1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto +40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+31;
end

% air noeuds de 732 à 742 jusqu'à 3012 à 3022
h=0.002;
k=0.002;
toto=732;
for compteur=1:1:58
    for compt=1:1:11
        matrice(toto , toto -40)=(1/(k^2));
        matrice(toto , toto -1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto )=-2*((1/(h^2))+(1/(k^2)));
        matrice(toto , toto +1)=(1/(h^2));
        matrice(toto , toto +40)=(1/(k^2));
        toto=toto+1;
    end
    toto=toto+29;
end

% air noeud 703
k1=0.002;
k2=0.02;
h1=0.002;
h2=0.02;
matrice(703,703-40)=(2*k1)/(k1*k2^2+k2*k1^2);
matrice(703,703-1)=(2*h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
matrice(703,703)=-2*((h1+h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2))+((k1+k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2));
matrice(703,703+1)=(2*h1)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
matrice(703,703+40)=(2*k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2);

% air noeuds de 743 à 3023
k1=0.002;
k2=0.002;
h1=0.002;
h2=0.02;
for toto=743:40:3023
    matrice(toto , toto -40)=(2*k1)/(k1*k2^2+k2*k1^2);
    matrice(toto , toto -1)=(2*h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
    matrice(toto , toto )=-2*((h1+h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2))+((k1+k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2));
    matrice(toto , toto +1)=(2*h1)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
    matrice(toto , toto +40)=(2*k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2);
end

% air noeud 3063
```



```

k1=0.02;
k2=0.002;
h1=0.002;
h2=0.02;
matrice(3063,3063-40)=(2*k1)/(k1*k2^2+k2*k1^2);
matrice(3063,3063-1)=(2*h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
matrice(3063,3063)=-2*((h1+h2)/(h1*h2^2+h2*h1^2))+((k1+k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2));
matrice(3063,3063+1)=(2*h1)/(h1*h2^2+h2*h1^2);
matrice(3063,3063+40)=(2*k2)/(k1*k2^2+k2*k1^2);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Conditions de passage
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

% fer air Jf1 < J < Jf2 et I=If
k=0.002;
h=0.002;
for toto=1811:40:2531
    matrice(toto,toto-40)=((1/muair)+(1/mufer))*(h/(2*k^2));
    matrice(toto,toto-1)=1/(mufer*h);
    matrice(toto,toto)=-((1/mufer)+(1/muair))*((1/h)+(h/k^2));
    matrice(toto,toto+1)=1/(muair*h);
    matrice(toto,toto+40)=((1/muair)+(1/mufer))*(h/(2*k^2));
end

```

```

% fer air 1 < I < If et Jf2
k=0.002;
h=0.002;
for tutu=2562:1:2570
    matrice(tutu,tutu-40)=1/(mufer*k);
    matrice(tutu,tutu-1)=((1/muair)+(1/mufer))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu,tutu)=-((1/mufer)+(1/muair))*((1/k)+(k/h^2));
    matrice(tutu,tutu+1)=((1/muair)+(1/mufer))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu,tutu+40)=1/(muair*k);
end

```

```

% fer air 1 < I < If et Jf1
k=0.002;
h=0.002;
for tutu=1762:1:1770
    matrice(tutu,tutu-40)=1/(muair*k);
    matrice(tutu,tutu-1)=((1/muair)+(1/mufer))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu,tutu)=-((1/mufer)+(1/muair))*((1/k)+(k/h^2));
    matrice(tutu,tutu+1)=((1/muair)+(1/mufer))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu,tutu+40)=1/(mufer*k);
end

```

```

% fer air Noeud 2571
matrice(2571,2571-40)=(1/muair)+(1/mufer);
matrice(2571,2571-1)=(1/muair)+(1/mufer);
matrice(2571,2571)=-2*(3*(1/muair)+(1/mufer));
matrice(2571,2571+1)=2/muair;
matrice(2571,2571+40)=2/muair;

```

```

% fer air Noeud 1771
matrice(1771,1771-40)=2/muair;
matrice(1771,1771-1)=((1/muair)+(1/mufer));
matrice(1771,1771)=-2*(3*(1/muair)+(1/mufer));
matrice(1771,1771+1)=2/muair;
matrice(1771,1771+40)=(1/mufer)+(1/muair);

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
% aimant air Jm1 < Jm < Jm2 et I=Im
h=0.002;
k=0.002;
for tutu=1211:40:1531
    matrice(tutu, tutu-40)=((1/muair)+(1/muaimant))*(h/(2*k^2));
    matrice(tutu, tutu-1)=(1/(muaimant*h));
    matrice(tutu, tutu)=-((1/muair)+(1/muaimant))*((1/h)+(h/k^2));
    matrice(tutu, tutu+1)=1/(muair*h);
    matrice(tutu, tutu+40)=((1/muaimant)+(1/muair))*(h/(2*k^2));
end

% aimant air 1 < I < Im2 et J=Jm1
k=0.002;
h=0.002;
for tutu=1162:1:1170
    matrice(tutu, tutu-40)=1/(muair*k);
    matrice(tutu, tutu-1)=((1/muaimant)+(1/muair))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu, tutu)=-((1/muair)+(1/muaimant))*((1/k)+(k/h^2));
    matrice(tutu, tutu+1)=((1/muair)+(1/muaimant))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu, tutu+40)=1/(muaimant*k);
end

% aimant air 1 < I < Im2 et J=Jm2
k=0.002;
h=0.002;
for tutu=1562:1570
    matrice(tutu, tutu-40)=1/(muaimant*k);
    matrice(tutu, tutu-1)=((1/muaimant)+(1/muair))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu, tutu)=-((1/muair)+(1/muaimant))*((1/k)+(k/h^2));
    matrice(tutu, tutu+1)=((1/muaimant)+(1/muair))*(k/(2*h^2));
    matrice(tutu, tutu+40)=1/(muair*k);
end

end

% air aimant noeud 1571
matrice(1571,1571-40)=(1/muair)+(1/muaimant);
matrice(1571,1571-1)=(1/muair)+(1/muaimant);
matrice(1571,1571)=-((2*(3*(1/muair)+(1/muaimant))));
matrice(1571,1571+1)=2/muair;
matrice(1571,1571+40)=2/muair;

% air aimant noeud 1171
matrice(1171,1171-40)=(2/muair);
matrice(1171,1171-1)=(1/muair)+(1/muaimant);
matrice(1171,1171)=-((2*(3*(1/muair)+(1/muaimant))));
matrice(1171,1171+1)=2/muair;
matrice(1171,1171+40)=(1/muair)+(1/muaimant);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Matrice resultat
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

h=0.002;

matriceresultat=zeros(Nbrenoeudsmax,1);

for toto=1211:40:1531
    matriceresultat(toto,1)=brym/muaimant;
end

% noeuds 1571
matriceresultat(1571,1)=((h)*brym)/muaimant;
```

```

% noeuds 1171
matriceresultat(1171,1)=((h)*brym)/muaimant;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Calcul
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

tabpotentiel=inv(matrice)*matriceresultat;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vision tout x
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

h=0.002;
xi=0;
yi=0;
for horloge=1:23
    visiontoutx(horloge)=0+xi;
    xi=xi+h;
end
xi=xi-h;
h=0.02;
for horloge=24:40
    xi=xi+h;
    visiontoutx(horloge)=0+xi;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vision tout y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

k=0.02;
xi=0;
yi=0;
for horloge=1:18
    visiontouty(horloge)=0+yi;
    yi=yi+k;
end

yi=yi-k;
k=0.002;
for horloge=19:77
    yi=yi+k;
    visiontouty(horloge)=0+yi;
end

k=0.02;
for horloge=78:94
    yi=yi+k;
    visiontouty(horloge)=0+yi;
end

for compteur=1:92
    visiony2(compteur)=visiontouty(compteur+1);
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vision by
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
% Calcul du champs dans l'air
% noeuds 2 à 22 jusqu'a 1142 et 2602 à 2622 jusqu'a 3742
h=0.002;
noeud=2;
for toto=1:2
    for compt=1:29
        for tutu=2:22
            tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
                tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));

            noeud=noeud+1;
        end
        noeud=noeud+19;
    end
    noeud=noeud+1440;
end

% noeuds de 1172 à 1182 jusqu'à 2582
h=0.002;
noeud=1172;
for compt=1:36
    for tutu=1172:1182
        tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
            tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));
        noeud=noeud+1;
    end
    noeud=noeud+29;
end

% noeuds de 1602 à 1611 jusqu'à 1731
h=0.002;
noeud=1602;
for compt=1:4
    for tutu=1602:1611
        tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
            tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));
        noeud=noeud+1;
    end
    noeud=noeud+30;
end

% Noeuds de 1 à 1121
h=0.002;
noeud=1;
for compt=1:2
    for tutu=1:40:1121
        tableauxnoeuds(noeud,7)=-((2*tabpotentiel(noeud+1,1))/(2*h));
        noeud=noeud+40;
    end
    noeud=noeud+1440;
end

% Noeuds de 1601 à 1721
h=0.002;
noeud=1601;
for tutu=1601:40:1721
    tableauxnoeuds(noeud,7)=-((2*tabpotentiel(noeud+1,1))/(2*h));
    noeud=noeud+40;
end

% Noeuds de 24 à 39 jusqu'a 3759
```

```
h=0.02;
noeud=24;
for compt=1:94
    for tutu=24:39
        tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
            tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));
        noeud=noeud+1;
    end
    noeud=noeud+24;
end

% Noeuds de 40 à 3760
h=0.02;
noeud=40;
for tutu=40:40:3760
    tableauxnoeuds(noeud,7)=-((2*tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));
    noeud=noeud+40;
end

% Noeuds de 23 à 3743
h=0.002;
h1=0.02;
noeud=23;
for tutu=23:40:3743
    tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
        tabpotentiel(noeud-1,1))/(h1+h));

    noeud=40+noeud;
end

% Calcul du champs dans le fer
% noeuds 1802 à 1810 jusqu'à 2530
h=0.002;
noeud=1802;
for hor=1802:40:2522
    for toto=1802:1:1810
        tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
            tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));

        noeud=noeud+1;
    end
    noeud=noeud+31;
end

% Noeuds de 1801 à 2521
h=0.002;
noeud=1801;
for tutu=1801:40:2521
    tableauxnoeuds(noeud,7)=-((2*tabpotentiel(noeud+1,1))/(2*h));
    noeud=noeud+40;
end

% Noeuds de 1761 à 1771
h=0.002;
noeud=1761;
tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(1762,1)+tabpotentiel(1762,1))/(2*h));
for compteur=1762:1771
    noeud=noeud+1;
    tableauxnoeuds(noeud,7)=-((tabpotentiel(noeud+1,1)-
        tabpotentiel(noeud-1,1))/(2*h));
end

% Noeuds de 1811 à 2531
```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
h=0.002;
k=0.002;
noeud=1811;
for tutu=1811:40:2531
    tableauxnoeuds (noeud,7)=-((-tabpotentiel (noeud-1,1)/h)-(h/(2*k^2))*
        tabpotentiel (noeud-40,1)+((1/h)+(h/k^2))*tabpotentiel (noeud,1)-(h/(2*k
        ^2))*tabpotentiel (noeud+40,1));

    noeud=noeud+40;
end

% Noeuds de 2561 à 2571
h=0.002;
k=0.002;
noeud=2561;
tableauxnoeuds (noeud,7)=-((tabpotentiel (2562,1)+tabpotentiel (2562,1))/(2*h);
for tutu=2561:1:2571
    noeud=noeud+1;
    tableauxnoeuds (noeud,7)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-
        tabpotentiel (noeud-1,1))/(2*h);
end

% Calcul du champ dans l'aimant
% noeuds de 1202 à 1210 jusqu'à 1530
h=0.002;
noeud=1202;
for hor=1202:40:1522
    for toto=1202:1:1210
        tableauxnoeuds (noeud,7)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-
            tabpotentiel (noeud-1,1))/(2*h));
        noeud=noeud+1;
    end
    noeud=noeud+31;
end

% Noeuds de 1201 à 1521
h=0.002;
noeud=1201;
for tutu=1201:40:1521
    tableauxnoeuds (noeud,7)=-((2*tabpotentiel (noeud+1,1))/(2*h));
    noeud=noeud+40;
end

% noeuds de 1561 à 1571
h=0.002;
noeud=1561;
tableauxnoeuds (noeud,7)=-((2*tabpotentiel (noeud+1,1))/(2*h);
for noeud=1562:1571
    tableauxnoeuds (noeud,7)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-
        tabpotentiel (noeud-1,1))/(2*h);
end

% noeuds de 1161 à 1171
h=0.002;
noeud=1161;
tableauxnoeuds (noeud,7)=-((2*tabpotentiel (noeud+1,1))/(2*h);
for noeud=1162:1171
    tableauxnoeuds (noeud,7)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-
        tabpotentiel (noeud-1,1))/(2*h);
end

% Noeuds de 1211 à 1531
h=0.002;
```

```

k=0.002;
noeud=1211;
for noeud=1211:40:1531
    tableauxnoeuds (noeud ,7)=-((- tabpotentiel (noeud -1,1)/h)-
    (h/(2*k^2))*tabpotentiel (noeud -40,1)+((1/h)+(h/k^2))*tabpotentiel (noeud ,1)
    -(h/(2*k^2))*tabpotentiel (noeud +40,1));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Visualisation du champs bx dans toute la structure
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    compt=0;
    for tutu=1:94
        for toto=1:40
            compt=compt+1;
            visiontoutby (tutu , toto)=tableauxnoeuds (compt ,7);
        end
    end

    figure (101)
    hold on
    surface (visiontoutx , visiontouty , visiontoutby )
    colorbar

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Visualisation du champs by dans le fer
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% vision x fer
    for compt=1:11
        visionferx (compt)=visiontoutx (compt);
    end

% vision y fer
    for compt=1:21
        visionfery (compt)=visiontouty (compt+44);
    end

% valeur du champs by dans le fer
    noeud=1760;
    for tutu=1:21
        for toto=1:11
            noeud=noeud+1;
            visionferby (tutu , toto)=tableauxnoeuds (noeud ,7);
        end
        noeud=noeud+29;
    end

    figure (102);
    hold on;
    surface (visionferx , visionfery , visionferby , 'LineStyle' , 'None');
    colorbar;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Exploitation
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
tutu=0;
toto=0;
k=0.002;
h=0.002;

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
for compteur=1:10
    noeuds(compteur,1)=compteur;
end

%Horizontales
% air
bnairhor1(1,1)=-((tabpotentiel(1762,1)+tabpotentiel(1762,1))/(2*h));
for compteur=1:9
    bnairhor1(compteur+1,1)=(tabpotentiel(1761+tutu,1)
    -tabpotentiel(1763+tutu,1))/(2*h);
    tutu=tutu+1;
end

htairhor1(1,1)=-(1/muair)*(-(tabpotentiel(1761-40,1)/k)+
((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel(1761,1)));
for compteur=1:9
    htairhor1(compteur+1,1)=-(1/muair)*(-(tabpotentiel(1762-40+toto,1)/k)+
(((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel(1762+toto,1))-
((k/(2*h^2))*(tabpotentiel(1762-1+toto,1)+tabpotentiel(1762+1+toto,1)))));
    toto=toto+1;
end

% fer
tutu=0;
toto=0;
bnferhor1(1,1)=-((tabpotentiel(1762,1)+tabpotentiel(1762,1))/(2*h));
for compteur=1:9
    bnferhor1(compteur+1,1)=(tabpotentiel(1761+tutu,1)-
    tabpotentiel(1763+tutu,1))/(2*h);
    tutu=tutu+1;
end

htferhor1(1,1)=-(1/mufer)*((tabpotentiel(1761+40,1)/k)-
(((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel(1761,1)));
for compteur=1:9
    htferhor1(compteur+1,1)=-(1/mufer)*((tabpotentiel(1762+40+toto,1)/k)-
(((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel(1762+toto,1))+
((k/(2*h^2))*(tabpotentiel(1762-1+toto,1)+tabpotentiel(1762+1+toto,1)))));
    toto=toto+1;
end

figure(103)
plot(noeuds,htairhor1,'b-',noeuds,htferhor1,'r-')
title('htair en bas');
legend('htair','htfer',-1);
grid

figure(104)
plot(noeuds,bnairhor1,'b-',noeuds,bnferhor1,'r-')
title('bnair en bas');
legend('Bnair','Bnfer',-1);
grid

% Verticales
% Bn air et fer
h=0.002;
k=0.002;
compt=1;
for noeud=1811:40:2531
    htairver(compt,1)=-(1/muair)*((tabpotentiel(noeud+1,1)/h)-
(((1/h)+(h/(k^2)))*tabpotentiel(noeud,1))+((h/(2*k^2))
*(tabpotentiel(noeud-40,1)+tabpotentiel(noeud+40,1))));
```



```

    htferver (compt,1)=-((1/mufer)*(-(tabpotentiel (noeud-1,1)/h)+
    (((1/h)+(h/(k^2)))*tabpotentiel (noeud,1))-((h/(2*k^2))
    *(tabpotentiel (noeud-40,1)+tabpotentiel (noeud+40,1))));
    compt=compt+1;
end

% Ht air et fer
compt=1;
for noeud=1811:40:2531
    bnairver (compt,1)=((tabpotentiel (noeud+40,1)-tabpotentiel (noeud-40,1))
    /(2*k));
    bnferver (compt,1)=((tabpotentiel (noeud+40,1)-tabpotentiel (noeud-40,1))
    /(2*k));
    compt=compt+1;
end

for compteur=1:19
    noeudsver (compteur,1)=compteur ;
end

figure(105)
plot (noeudsver, htairver, 'b-', noeudsver, htferver, 'r-');
title ('htair sur le coté');
legend ('htair', 'htfer', -1);
grid

figure(106)
plot (noeudsver, bnairver, 'b-', noeudsver, bnferver, 'r-');
title ('bnair sur le coté');
legend ('Bnair', 'Bnfer', -1);
grid

% horizontale haut

% Bn air et fer
h=0.002;
k=0.002;
compt=1;
noeud=2561;
htairhor2 (compt,1)=(1/muair)*((tabpotentiel (noeud+40,1)/k)-
    (((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel (noeud,1)));
htferhor2 (compt,1)=(1/mufer)*(-(tabpotentiel (noeud-40,1)/k)+
    (((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel (noeud,1)));
for noeud=2562:1:2570
    compt=compt+1;
    htairhor2 (compt,1)=(1/muair)*((tabpotentiel (noeud+40,1)/k)-
    (((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel (noeud,1))+((k/(2*h^2))
    *(tabpotentiel (noeud+1,1)+tabpotentiel (noeud-1,1))));
    htferhor2 (compt,1)=(1/mufer)*(-(tabpotentiel (noeud-40,1)/k)+
    (((1/k)+(k/(h^2)))*tabpotentiel (noeud,1))-((k/(2*h^2))
    *(tabpotentiel (noeud-1,1)+tabpotentiel (noeud+1,1))));
end

% Ht air et fer
h=0.002;
k=0.002;
compt=1;
bnairhor2 (compt,1)=-((tabpotentiel (2561+1,1)+tabpotentiel (2561+1,1))/(2*h));
bnferhor2 (compt,1)=-((tabpotentiel (2561+1,1)+tabpotentiel (2561+1,1))/(2*h));
for noeud=2562:1:2570
    compt=compt+1;
    bnairhor2 (compt,1)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```

        tabpotentiel (noeud-1,1)/(2*h));
        bnferhor2 (compt,1)=-((tabpotentiel (noeud+1,1)-
        tabpotentiel (noeud-1,1))/(2*h));
    end

    figure(107)
    plot (noeuds , htairhor2 , 'b-' , noeuds , htferhor2 , 'r-' );
    title ('htair en haut ');
    legend ('htair' , 'htfer' , -1);
    grid

    figure(108)
    plot (noeuds , bnairhor2 , 'b-' , noeuds , bnferhor2 , 'r-' );
    title ('Bnair en haut ');
    legend ('Bnair' , 'Bnfer' , -1);
    grid

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Densité de Force
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% tenseur de Maxwell

% en bas
for toto=1:10
    maxwellnormal (toto ,1)=-((1/2)*(((bnairhor1 (toto ,1))^2)/muair)-
    ((muair*(htairhor1 (toto ,1))^2)));
    maxwelltangenciel (toto ,1)=-bnairhor1 (toto ,1)*htairhor1 (toto ,1);
    maxwellsum (toto ,1)=sqrt ((maxwellnormal (toto ,1))^2+(maxwelltangenciel
    (toto ,1))^2);
    energie (toto ,1)=-((1/2)*(((1-(1/murfer))*(((bnairhor1 (toto ,1))^2)/muair))
    +((murfer-1)*muair*(htairhor1 (toto ,1))^2)));
end

figure(109)
plot (noeuds , maxwellnormal , 'b-' , noeuds , maxwelltangenciel , 'r-' , noeuds ,
maxwellsum , 'g-');
title ('Densité de force surfacique : maxwell en bas ');
legend ('Maxwell normal' , 'Maxwell tangenciel' , 'Maxwell sum' , -1);
grid

figure(110)
plot (noeuds , energie , 'b-'); %noeuds , energie , 'r-');
title ('Densité de force surfacique : Energie en bas ');
% legend ('Maxwell' , 'Dérivée de l' 'Energie' , -1);
grid

% en haut
for toto=1:10
    maxwellnormal2 (toto ,1)=(1/2)*(((bnairhor2 (toto ,1))^2)/muair)
    -((muair*(htairhor2 (toto ,1))^2)));
    maxwelltangenciel2 (toto ,1)=bnairhor2 (toto ,1)*htairhor2 (toto ,1);
    maxwellsum2 (toto ,1)=sqrt ((maxwellnormal2 (toto ,1))^2+(maxwelltangenciel2
    (toto ,1))^2);
    energie2 (toto ,1)=(1/2)*(((1-(1/murfer))*(((bnairhor2 (toto ,1))^2)/muair))+
    ((murfer-1)*muair*(htairhor2 (toto ,1))^2)));
end

figure(111)
plot (noeuds , maxwellnormal2 , 'b-' , noeuds , maxwelltangenciel2 , 'r-' , noeuds
, maxwellsum2 , 'g-');

```

```

title('Densité de force surfacique : maxwell en haut');
legend('Maxwell normal','Maxwell tangentiel','Maxwell sum',-1);
grid

figure(112)
plot(noeuds ,energie2 , 'b-');          %,noeuds ,energie , 'r-');
title('Densité de force surfacique : Energie en bas');
% legend('Maxwell','Dérivée de l''Energie',-1);
grid

% en côté
for toto=1:19
    maxwellnormal3(toto,1)=(1/2)*((((bnairver(toto,1))^2)/muair)-
    ((muair*(htairver(toto,1))^2)));
    maxwelltangentiel3(toto,1)=-bnairver(toto,1)*htairver(toto,1);
    maxwellsum3(toto,1)=sqrt((maxwellnormal3(toto,1))^2+(maxwelltangentiel3
    (toto,1))^2);
    energie3(toto,1)=(1/2)*(((1-(1/murfer))*(((bnairver(toto,1))^2)/muair))+
    ((murfer-1)*muair*(htairver(toto,1))^2));
end

figure(113)
plot(noeudsver ,maxwellnormal3 , 'b-',noeudsver ,maxwelltangentiel3 , 'r-',noeudsver
,maxwellsum3 , 'g-');
title('Densité de force surfacique : maxwell en bas');
legend('Maxwell normal','Maxwell tangentiel','Maxwell sum',-1);
grid

figure(114)
plot(noeudsver ,energie3 , 'b-');          %,noeuds ,energie , 'r-');
title('Densité de force surfacique : Energie en haut');
% legend('Maxwell','Dérivée de l''Energie',-1);
grid

% calcul force global avec dérivée de l'énergie

    energieglobale1=0;
    energieglobale2=0;
    for toto=1:10
        energieglobale1=energieglobale1+energie(toto,1);
        energieglobale2=energieglobale2+energie2(toto,1);
    end
    energieglobale=(((energieglobale1/10)*0.02)+((energieglobale2/10)*0.02))*2

    maxwellglobale1=0;
    maxwellglobale2=0;
    maxwellglobale3=0;
    for toto=1:10
        maxwellglobale1=maxwellglobale1+maxwellnormal(toto,1);
        maxwellglobale2=maxwellglobale2+maxwellnormal2(toto,1);
    end
    for toto=1:19
        maxwellglobale3=maxwellglobale3+maxwelltangentiel3(toto,1);
    end

    maxwellglobale=(((maxwellglobale1/10)*0.02)+((maxwellglobale2/10)*0.02)
    +(maxwellglobale3/19)*0.04)*2

```

E. Exemple de code utilisant une formulation forte

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Tracé du champ entier en bas Ht air et Ht fer
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

noeuds2=[1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19];
htairhorlcourbe=[142.2271190938912;138.50996870285294;127.34269671092026;
111.83074762657758;94.06842036697704;75.34160874695286;56.35615582559547;
37.43493878982799;18.66486947873139;0;-18.66486947873139;-37.43493878982799;
-56.35615582559547;-75.34160874695286;-94.06842036697704;-111.83074762657758;
-127.34269671092026;-138.50996870285294;-142.2271190938912];
htferhorlcourbe=[142.2271190914549;138.50996868221117;127.34269672071817;
111.83074764285868;94.06842038244375;75.34160874081334;56.356155823618856;
37.43493878894893;18.664869482004075;0;-18.664869482004075;-37.43493878894893;
-56.356155823618856;-75.34160874081334;-94.06842038244375;-111.83074764285868;
-127.34269672071817;-138.50996868221117;-142.2271190914549];
figure(115)
hold on
plot(noeuds2,htairhorlcourbe,'k s -','markerfacecolor','k','markersize',12,
'linewidth',3)
plot(noeuds2,htferhorlcourbe,'c v --','markerfacecolor','c','markersize',6,
'linewidth',1)
xlabel('Nodes','FontName','Times New Roman','FontSize',22)
ylabel('Ht (A/m)','FontName','Times New Roman','FontSize',22)
set(gca,'FontName','Times New Roman','FontSize',2)
set(gcf,'color','w')
legend('Air','Iron',-1)
grid
```

Annexe F

Résultats obtenus en différences finies

Pour voir l'influence de l'utilisation d'une forme forte sur le domaine entier, nous comparons les modules du champ d'induction magnétique. Les Figures F.1, F.2 et F.3 montrent le champ respectivement calculé avec la forme forte et le potentiel scalaire, la forme forte et le potentiel vecteur et la formulation en potentiel vecteur et avec la méthode des éléments finis quand l'aimant est au centre du domaine.

Les Figures F.4, F.5 et F.6 donnent l'allure du champ magnétique dans le domaine entier quand l'aimant est décalé de 4 cm par rapport au centre de la structure.

Les Figures F.7, F.8 et F.9 donnent l'allure du champ magnétique dans le domaine entier quand l'aimant est décalé de 6 cm par rapport au centre de la structure.

Ces résultats montrent la forme forte avec la méthode des différences finies et donnent des résultats cohérents dans le domaine entier tout en respectant les conditions de passage entre deux milieux de perméabilité magnétique différente.

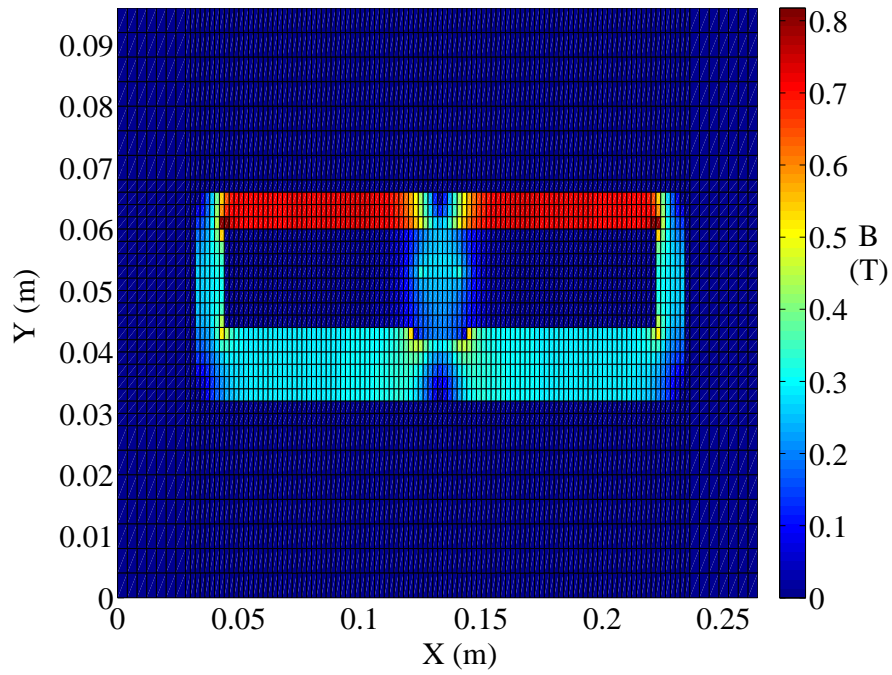


FIG. F.1 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant centré et avec le potentiel scalaire

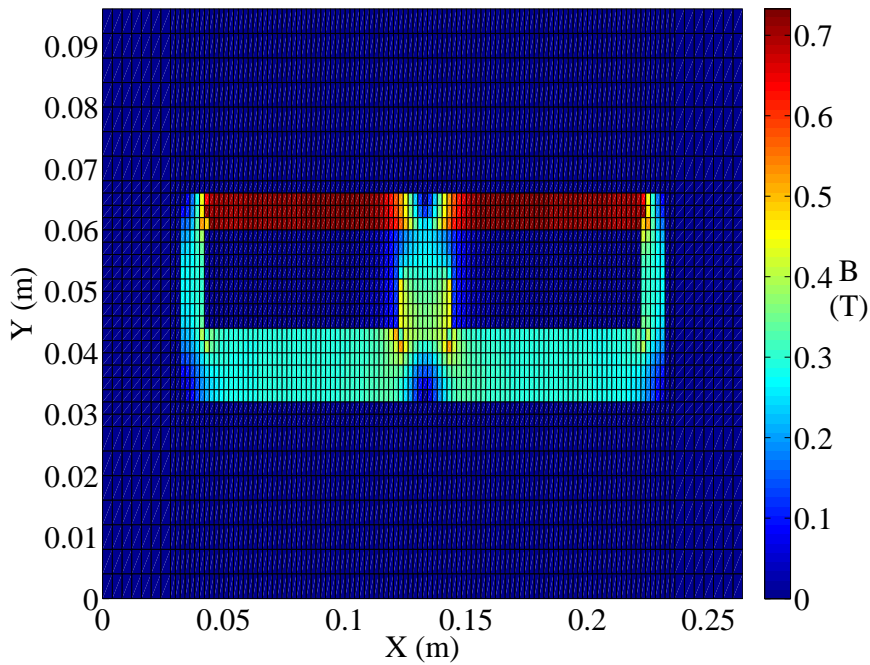


FIG. F.2 – Module du champ d'induction magnétique l'aimant centré et avec le potentiel vecteur

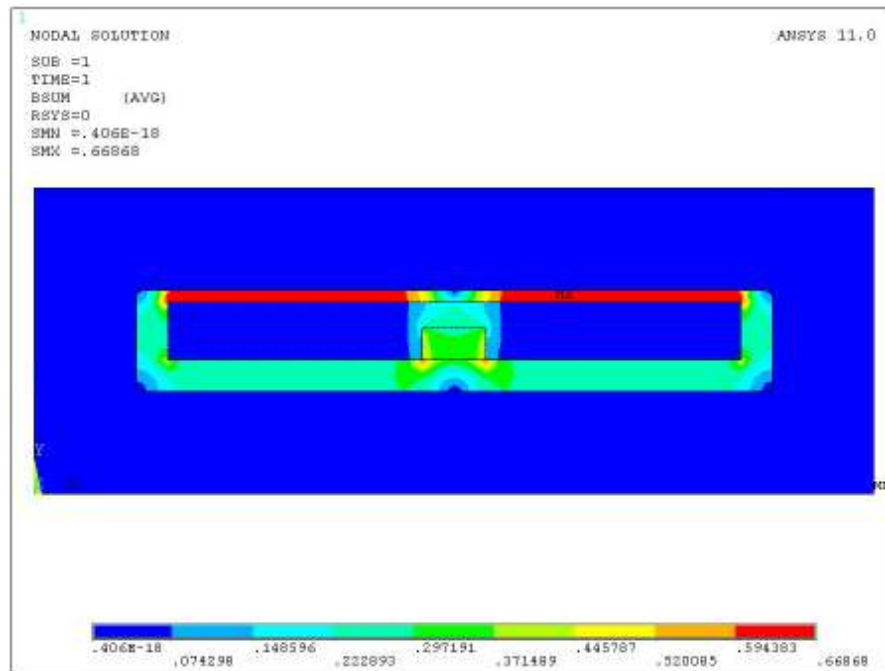


FIG. F.3 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant centré et en éléments finis

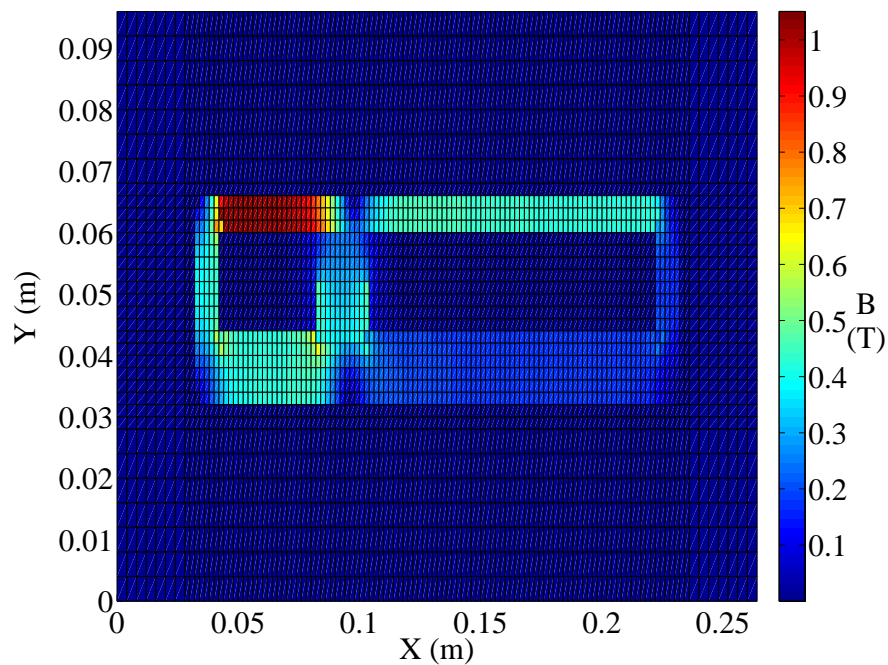


FIG. F.4 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et avec le potentiel vecteur en différences finies

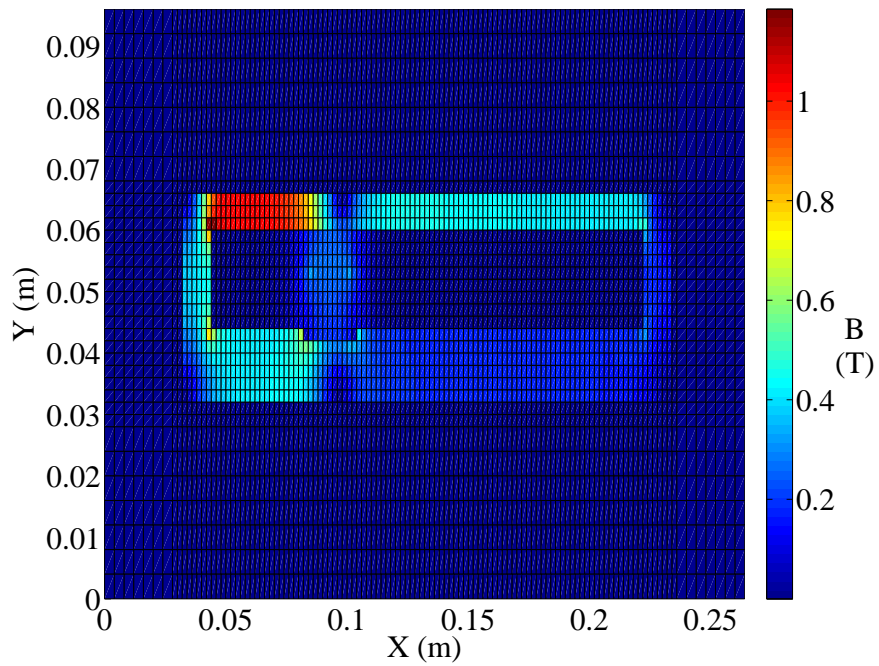


FIG. F.5 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et avec le potentiel scalaire en différences finies

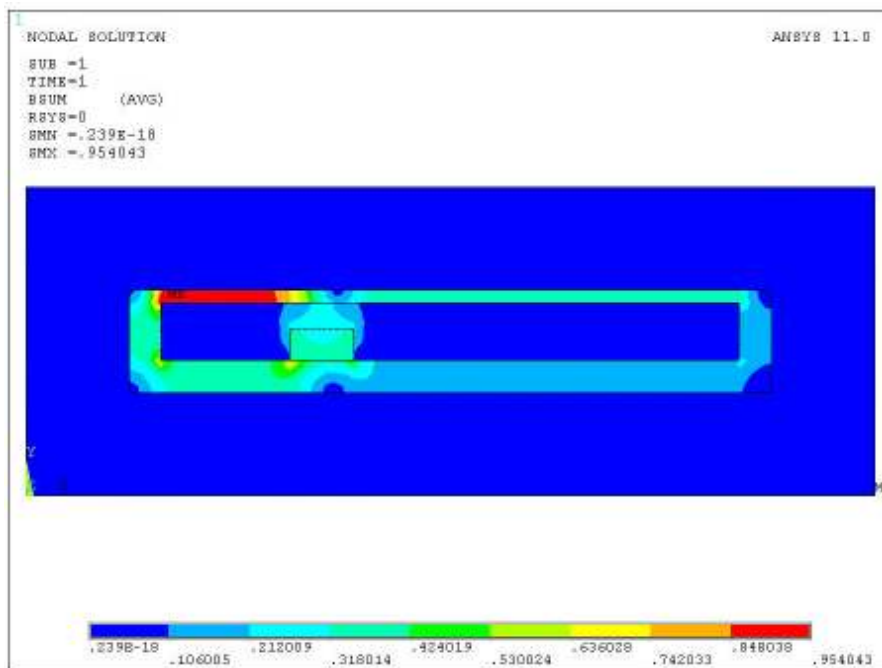


FIG. F.6 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 4 cm et ANSYS

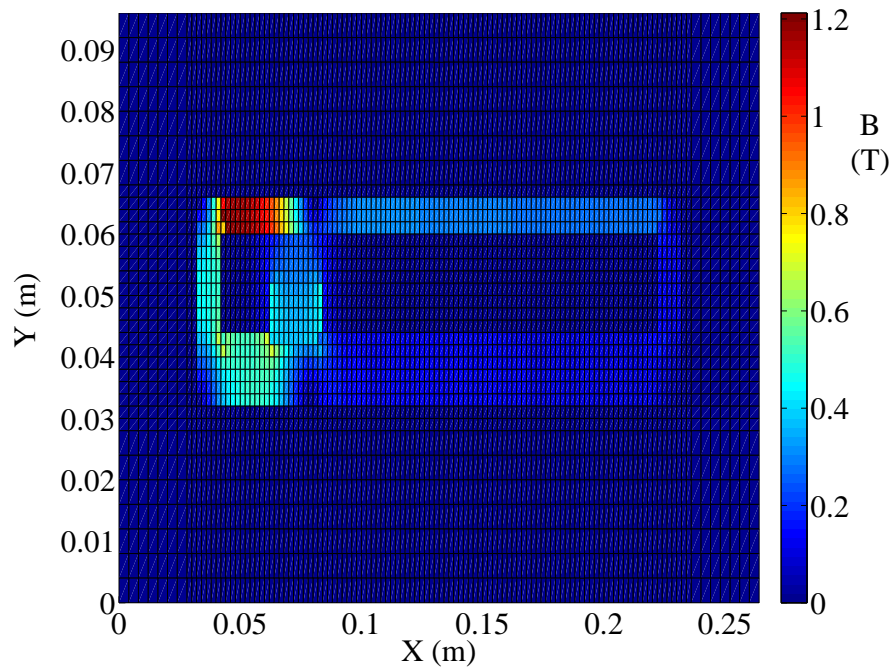


FIG. F.7 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et avec le potentiel vecteur en différences finies

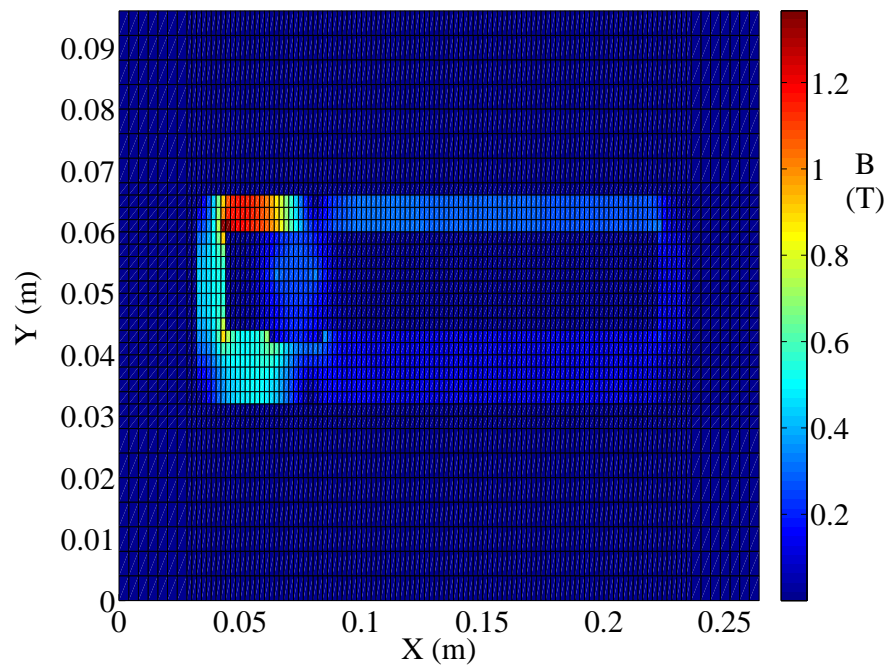


FIG. F.8 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et avec le potentiel scalaire en différences finies

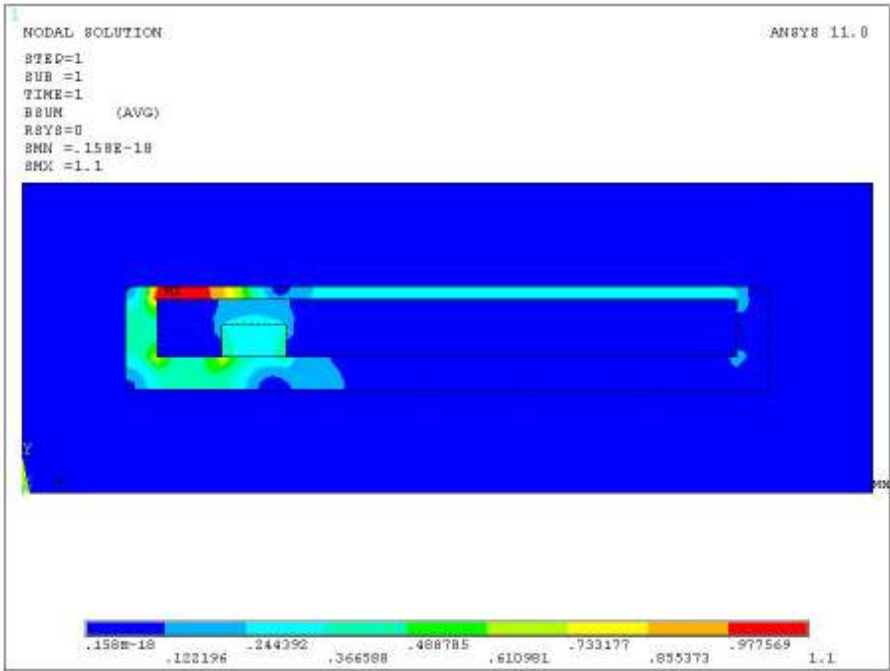


FIG. F.9 – Module du champ d'induction magnétique avec l'aimant à 2 cm et ANSYS

Bibliographie

- [Aba00] J. Abadie, *Etude et réalisation de micro-actionneurs intégrés à base d'Alliage à mémoire de Forme - Application à la microrobotique et aux micro-systèmes*, Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, 2000.
- [Abi07] Abiomed, « Coeur artificiel total abiocor », www.abiomed.com, 2007.
- [Acc00] D. Accoto, M. Carrozza et P. Dario, « Modelling of micropumps using unimorph piezoelectric actuator and ball valves », *J. Micromech. Microeng.*, vol. 10, pp. 277–81, 2000.
- [Age08] Agence de la biomedecine, « Chiffre de la transplantation », <http://www.agence-biomedecine.fr>, 2008.
- [Ama01] S. Amae, M. Wada, Y. Luo, H. Nakamura, S. Yoshida, T. Kamiyama, T. Yambe, T. Takagi, S. Nitta et R. Ohi, « Development of an implantable artificial anal sphincter by the use of the shape memory alloy », *ASAIO J.*, vol. 47, n° 4, pp. 346–50, 2001.
- [Amo03] M. Amoura, N. Zeraibi et M. Gareche, « Modélisation expérimentale et théorique d'une substance complexe. », dans *16ème congrès Français de Mécanique*, septembre 2003.
- [Ans07] Ansys Inc, « Ansys electromagnetic field analysis guide », 2007.
- [Aro89] K. Arom, D. Nicoloff, T. Kersten, W. Northrup 3d, W. Lindsay et R. Emery, « Ten years' experience with the St. Jude Medical valve prosthesis », *The Annals of Thoracic Surgery*, vol. 47, n° 6, pp. 831–837, 1989.
- [Ass07] Association de cardiologie : Zik'O'Coœurs, « Présentation jarvik 2000 », <http://www.jarvikheart.com/>, 2007.
- [Bar06] O. Barre et P. Brochet, « Discrimination de différentes formulations du calcul de la force magnétique : Approches théorique, numérique et expérimentale », *Revue internationale de génie électrique*, vol. 9, n° 1, pp. 87–113, 2006.
- [Ben01] K. B. Benhadji, « Convection thermo-solutale au sein d'une cavité poreuse saturée par un fluide non newtonien binaire », Rapport technique, Novembre 2001.
- [Ben03] M. Benedetti, « Rapport de dea : Contribution à l'étude des fluides magnétorhéologiques. », Rapport technique, Toulouse, juin 2003.

- [BJ97] R. Bozeman Jr, J. Akkerman, G. Aber, G. Van Damm, J. Bacak, P. Svejovsky et R. Benkowski, « Axial pump », décembre 2 1997, uS Patent 5,692,882.
- [Bou07] E. Bourdin, J. Charmasson et J. Baglio, « Mesure de viscosités par relaxation d'anisotropie dans un ferrofluide. », Rapport technique, Février 2007.
- [Bul99] W. Bullough, *Adaptronics and Smart Structures : Basics, Materials, Design, and Applications, Chap 6.5 : Electroheological Fluid Actuators*, Springer, 1999.
- [Car59] C. J. Carpenter, « Surface-integral methods of calculating forces on magnetized iron parts », *IEE Monograph*, vol. 342, pp. 19–28, 1959.
- [Car95] M. Carrozza, N. Croce, B. Magnani et P. Dario, « A piezoelectric-driven stereolithography-fabricated micropump », *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 5, n° 2, pp. 177–179, 1995.
- [Car01] J. Carlson, W. Matthis et J. Toscano, « Smart prosthetics based on magnetorheological fluids », *Proceedings of SPIE*, vol. 4332, pp. 308–316, 2001.
- [Cha96] J.-F. Charpentier, *Modélisation des ensembles convertisseurs statiques-machines électriques par couplage des équations du champ électromagnétique*, Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, 1996.
- [Cho97] S. Chonan, Z. Jiang, J. Tani, S. Orikasa, Y. Tanahashi, T. Takagi, M. Tanaka et J. Tanikawa, « Development of an artificial urethral valve using SMA actuators », *Smart Materials and Structures*, vol. 6, n° 4, pp. 410–414, 1997.
- [Cho00] H. Choi, M. Cho, K. Kang et W. Ahn, « Electrorheological properties of a suspension of a mesoporous molecular sieve (mcm-41) », *Microporous and Mesoporous Materials*, vol. 39, n° 1-2, pp. 19–24, 2000.
- [cir07] « Circulation sanguine », <http://medmatiq.xooit.com/t664-La-circulation-sanguine-humaine.htm>, 2007.
- [Cle99] B. Clephas, *Adaptronics and Smart Structures : Basics, Materials, Design, and Applications, Chap 6.2 : Piezoelectric Actuators*, Springer, 1999.
- [Com04] A. Combes, P. Leprince et R. Choussat, « Machines d'assistance circulatoire : indications, complications et perspectives d'avenir », *Réanimation*, vol. 13, n° 2, pp. 103–111, 2004.
- [Cou83] J. Coulomb, « A methodology for the determination of global electro-mechanical quantities from a finite element analysis and its application to the evaluation of magnetic forces, torques and stiffness », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 19, n° 6, pp. 2514–2519, 1983.

-
- [Cou84] J. Coulomb et G. Meunier, « Finite element implementation of virtual work principle for magnetic or electric force and torque computation », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 20, n° 5, pp. 1894–1896, 1984.
- [DeB97] M. DeBakey et A. Gotto, *Le coeur en action*, Institut d'édition Sanofi Synthélabo, 1997.
- [Del02] A. Delehelle, « Rapport de stage de seconde année : Les fluides magnéto-rhéologiques - étude et caractérisation. », Rapport technique, Département de Génie Electrique Automatique de l'ENSEEIH, Toulouse, juin 2002.
- [Dha81] G. Dhatt et G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Les Presses de l'Université Laval Québec, 1981.
- [Dur66a] E. Durand, *Electrostatique Tome I : Les distributions*, MASSON et Cie, 1966.
- [Dur66b] E. Durand, *Electrostatique Tome II : Problèmes généraux conducteurs*, MASSON et Cie, 1966.
- [Dur66c] E. Durand, *Electrostatique Tome III : Méthodes de calcul diélectriques*, MASSON et Cie, 1966.
- [Dur68] E. Durand, *Magnétostatique*, MASSON et Cie, 1968.
- [Duv05] J. Duval, *Conception et mise en oeuvre d'un système d'actionneurs AMF répartis pour le contrôle de forme électroactif de voilures aéronautiques*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [Gen02] S. Genc et P. Phue, « Rheological properties of magnetorheological fluids », *Smart Materials and Structures*, vol. 11, pp. 140–146, 2002.
- [Gur98] T. Gururaja et R. Panda, « Current status and future trends in ultrasonic transducers for medical imaging applications », *Applications of Ferroelectrics, 1998. ISAF 98. Proceedings of the Eleventh IEEE International Symposium on*, pp. 223–228, 1998.
- [Gué96] G. Guénin, « Alliages à mémoire de forme », *Techniques de l'ingénieur*, , n° M530, 1996.
- [Hag04] Y. Haga et M. Esashi, « Biomedical microsystems for minimally invasive diagnosis and treatment », *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, n° 1, pp. 98–114, 2004.
- [Hao01] T. Hao, « Electrorheological fluids », *Advanced Materials*, vol. 13, n° 24, pp. 1847–1857, 2001.
- [Har04] H. Hartshorne, C. Backhouse et W. Lee, « Ferrofluid-based microchip pump and valve », *Sensors & Actuators : B. Chemical*, vol. 99, n° 2-3, pp. 592–600, 2004.
- [Her03] J. Herreros, « Asistencia mecánica circulatoria. Tratamiento temporal o definitivo de la insuficiencia cardíaca terminal. », 2003.
-

- [Hes99] J. Hesselbach, *Adaptronics and Smart Structures : Basics, Materials, Design, and Applications, Chap 6.4 : Shape Memory Actuators*, Springer, 1999.
- [Hun92] I. Hunter et S. Lafontaine, « A comparison of muscle with artificial actuators », *Solid-State Sensor and Actuator Workshop, 1992. 5th Technical Digest., IEEE*, pp. 178–185, 1992.
- [Ike90] T. Ikeda, *Fundamentals of Piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [Iku88] K. Ikuta, M. Tsukamoto et S. Hirose, « Shape memory alloy servo actuator system with electric resistance feedback and application for active endoscope », *Robotics and Automation, 1988. Proceedings., 1988 IEEE International Conference on*, pp. 427–430, 1988.
- [Inf07] Infovisual, « Anatomie du coeur », <http://www.infovisual.info>, 2007.
- [Inr07] Inria, « Illustration du coeur », <http://www-c.inria.fr/who/Marc.Thiriet/Glosr/Bio/AppCircul/AnatCoeur.html>, 2007.
- [Jar07] Jarvik Heart, « Jarvik 2000 », <http://www.zikocoeurs.asso.fr/>, 2007.
- [Jia06] W. Jiang, M. Moallem, B. Fahimi et S. Pekarek, « Qualitative Investigation of Force Density Components in Electromechanical Energy Conversion Process », *IEEE Industrial Electronics, IECON 2006-32nd Annual Conference on*, pp. 1113–1118, 2006.
- [Jin02] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley and sons, INC, 2^e édition, 2002.
- [Jol94] S. Jolivet, *Contrôle vibro-acoustique de structures élastiques minces par transducteurs piézoélectriques*, Thèse de doctorat, Université de Montpellier 2, 1994.
- [Jol99] M. Jolly, J. Bender et J. Carlson, « Properties and applications of commercial magnetorheological fluids », *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 10, n^o 1, pp. 5–13, 1999.
- [Kor98] R. Kornbluh, R. Pelrine, J. Eckerle et J. Joseph, « Electrostrictive polymer artificial muscle actuators », *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, vol. 3, 1998.
- [Lam07] Y. Lamarche, R. Cartier, A. Denault, A. Basmadjian, C. Berry, J. Laborde et R. Bonan, « Implantation of the CoreValve Percutaneous Aortic Valve », *The Annals of Thoracic Surgery*, vol. 83, n^o 1, pp. 284–287, 2007.
- [Leb04] C. Lebreton, « Alliages à mémoire de forme de type nickel titane », *Techniques de l'ingénieur*, , n^o M532, 2004.
- [Lee02] S. Lee, S. Lee, H. An, S. Cha, J. Chang, B. Kim et J. Pak, « Biomedical applications of electroactive polymers and shape memory alloys »,

-
- Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering- Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering*, vol. 4695, pp. 17–31, 2002.
- [Leo06] M. Leon, S. Kodali, M. Williams, M. Oz, C. Smith, A. Stewart, A. Schwartz, M. Collins et J. Moses, « Transcatheter Aortic Valve Replacement in Patients with Critical Aortic Stenosis : Rationale, Device Descriptions, Early Clinical Experiences, and Perspectives », *Seminars in Thoracic and Cardiovascular Surgery*, vol. 18, n° 2, pp. 165–174, 2006.
- [Lep03a] P. Leprince, N. Bonnet, A. Rama, P. Léger, V. Bors, J. Levasseur, J. Szefer, E. Vaissier, A. Pavie et I. Gandjbakhch, « Bridge to transplantation with the jarvik-7 (cardiowest) total artificial heart : a single-center 15-year experience », *Journal of Heart and Lung Transplantation*, vol. 22, n° 12, pp. 1296–1303, 2003.
- [Lep03b] P. Leprince et Gandjbakhch, « Changer de coeur : la transplantation cardiaque », *Dossier pour la science : Le coeur*, pp. 102–107, sept 2003.
- [Lep04] P. Leprince, « Assistances circulatoires : techniques nouvelles », *ITBM RBM*, vol. 25, pp. 49–53, 2004.
- [Lep05] P. Leprince, *Conception et modélisation d'actionneurs électroactif innovants pour l'assistance circulatoire*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [Lep07] P. Leprince, N. Bonnet, S. Aubert, I. Gandjbakhch et A. Pavie, « Les nouveaux systèmes d'assistance circulatoire », *Annales de cardiologie et d'angéiologie*, vol. 56, n° 2, pp. 168–171, 2007.
- [Li06] C. Li, M. Tokuda, J. Furusho, K. Koyanagi, S. Morimoto, H. Y., A. Nakagawa et Y. Akazawa, « Research and development of the intelligently-controlled prosthetic ankle joint », *Proc. of IEEE Int. Conf. on Mechatronics and Automation, Luoyang, China*, pp. 1114–1119, 2006.
- [LM75] M. Lajoie-Mazenc et R. Carlson, « Calcul du champ magnétique dans les machines électriques par résolution directe du système d'équations aux différences finies (programme difimedi) », novembre 1975.
- [LM78] M. Lajoie-Mazenc, J. Hector et R. Carlson, « Procédé d'analyse des champs électrostatique et magnétostatique dans les structures planes et de révolution : Programme difimedi », dans *COMPUMAG, Conference on the Computation of Magnetic Field*, septembre 1978.
- [Loi03] D. Loisançe, « Le coeur artificiel du mythe à la réalité », *Dossier pour la science : Le coeur*, pp. 114–120, sept 2003.
- [Lor07] Lord corporation, « Présentation des fluides magnétorehologique », <http://www.lord.com/>, 2007.
-

- [Mad04] J. Madden, N. Vandesteeg, P. Anquetil, P. Madden, A. Takshi, R. Pytel, S. Lafontaine, P. Wieringa et I. Hunter, « Artificial muscle technology : physical principles and naval prospects », *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, vol. 29, n° 3, pp. 706–728, 2004.
- [Med07] Medicine and man, « Dessin d’implantation de l’abio-cor », <http://medicineandman.com/blog/2006/09/05/abio-cor-artificial-heart-2/>, 2007.
- [MG04] J. C. Maxwell Garnett, « Colours in metal glasses and in metallic films », *Philosophical Transactions*, pp. 385–420, juin 1904.
- [Mit96] Y. Mitamura, T. Wada et E. Okamoto, « Ferromagnetic artificial cells for artificial circulation. », *ASAIO J*, vol. 42, n° 5, pp. M402–6, 1996.
- [Mit99] Y. Mitamura, H. Nakamura, E. Okamoto, R. Yozu, S. Kawada et D. Kim, « Development of the Valvo Pump : An Axial Flow Pump Implanted at the Heart Valve Position », *Artificial Organs*, vol. 23, n° 6, pp. 566–571, 1999.
- [Mit00] Y. Mitamura, K. Sekine, M. Asakawa, R. Yozu, S. Kawada et E. Okamoto, « A durable, non power consumptive, simple seal for rotary blood pumps », *ASAIO Journal*, vol. 46, n° 2, p. 157, 2000.
- [MM07] J. Murdock Murphy, *Analytical design and optimization of ultrasonic vibrational transducers for spinal surgery*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2007.
- [Mül90] W. Müller, « Comparison of different methods of force calculation », *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, n° 2, pp. 1058–1061, mars 1990.
- [Nix01] C. Nix et T. Siess, « Intracardiac blood pump », janvier 23 2001, uS Patent 6,176,822.
- [Nog96] B. Nogarede, « Moteurs piézoélectriques », *Techniques de l’ingénieur. Génie électrique*, , n° D 3765, pp. 3765–3765, 1996.
- [Nog01] B. Nogarede, « Machines tournantes, principe et constituion », *Techniques de l’ingénieur*, , n° D3411, 2001.
- [Nog05] B. Nogarede, *Electrodynamique appliquée : Bases et principes physiques de l’électrotechniques*, DUNOD, 2005.
- [Pav03] A. Pavie, P. Leger, P. Leprince et I. Gandjbakhch, « Coeur artificiel total électrique totalement implantable : « AbioCor » », *Archives des maladies du coeur et des vaisseaux*, vol. 96, n° 10, pp. 934–938, 2003.
- [Ram99] J. Ramallo, E. Johnson, B. Spencer Jr et M. Sain, « Semi-active building base isolation », *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, vol. 1, 1999.
- [Rat92] L. Ratsimandresy, *Contribution à l’étude et à la caractérisation de transducteurs ultrasonores en polymère ou en composite piézoélectrique*, Thèse de doctorat, Institut nationale des sciences appliquées de Lyon, 1992.

-
- [Rei92] K. Reichert, R. Neubauer et T. Tarnhuvud, « A new approach solving the interface error problem of finite element field calculation methods by means of fictitious interface current sheets or interface charges », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 28, n° 2, pp. 1696–1699, 1992.
- [Ren94] Z. Ren, « Comparison of different force calculation methods in 3D finite-element modelling », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 30, n° 5 Part 2, pp. 3471–3474, 1994.
- [Ren05] A. Renotte, *Conception et mise en oeuvre d'un système électroactif distribué pour la réduction de la traînée de frottement d'une voilure aéronautique*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [Reu00] H. M. Reul et M. Akdis, « Blood pumps for circulatory support », *Perfusion 2000*, pp. 295–311, 2000.
- [Rey99] D. Reynaerts, J. Peirs et H. Van Brussel, « Shape memory micro-actuation for a gastro-intestinal intervention system », *Sensors & Actuators : A. Physical*, vol. 77, n° 2, pp. 157–166, 1999.
- [Rou74a] H. Rouvière, *Anatomie humaine descriptive et topographique, Tome 1 : Tête et cou*, Masson, 1974.
- [Rou74b] H. Rouvière, *Anatomie humaine descriptive et topographique, Tome 2 : Tronc*, Masson, 1974.
- [Sad92] N. Sadowski, Y. Lefèvre, M. Lajoie-Mazenc et J. Bastos, « Sur le calcul des forces magnétiques », *J. Phys. III France*, vol. 2, pp. 859–870, 1992.
- [Sad00] M. N. O. Sadiku, *Numerical techniques in electromagnetics*, CRC, Boca Raton, 2^e édition, 2000.
- [Sai07] Saint Gobain Quartz, « Céramiques piézoélectriques », www.quartz.saint-gobain.com, 2007.
- [Sek01] K. Sekine, M. Asakawa et Y. Mitamura, « Development of an axial flow blood pump : Characteristics of a magnetic fluid seal », *Journal of Artificial Organs*, vol. 4, n° 3, pp. 245–251, 2001.
- [Sou01] J. Souquet, « State of the art in digital broadband medical ultrasound imaging », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IV Physics*, vol. 2, n° 8, pp. 1091–1098, 2001.
- [ST 07] ST Jude Medical, « Valve aortique st jude », www.sjm.com, 2007.
- [Syn07] Syncardia, « Coeur artificiel total cardiowest », www.syncardia.com, 2007.
- [Syp08] Sypris, « Gaussmètre f.w. bell », <http://www.sypris.com/>, 2008.
- [Tar88] T. Tarnhuvud et K. Reichert, « Accuracy problems of force and torque calculation in FE-systems », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 24, n° 1, pp. 443–446, 1988.
-

- [Tex07] Texas Heart Institute, « Coeur artificiel total cardiowest », <http://texasheart.org>, 2007.
- [Tho07] Thoratec Corporate, « Assistance circulatoire thoratec », <http://www.thoratec.com>, 2007.
- [Van01] L. Vandeveld et J. Melkebeek, « A survey of magnetic force distributions based on different magnetization models and on the virtual work principle », *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 37, n° 5, pp. 3405–3409, 2001.
- [Vig05] C. Viguier, *Contribution au développement d'actionneurs électroactifs pour l'assistance circulatoire - Application à la mise au point d'une fonction antithrombotique*, Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [Vig07] C. Viguier, P. Leprince et B. Nogarede, « Etude de faisabilité d'une fonction antithrombotique électroactive pour l'assistance circulatoire », dans *C'SAME 2007, Conference proceedings*, septembre 2007.
- [Vol98] O. Volkova, *Etude de la rhéologie de suspensions de particules magnétiques*, Thèse de doctorat, Université de Nice Sophia Antipolis, 1998.
- [Wal07] Walker Scientific, « Hystérésigraphe amh20 », www.walkerscientific.com, 2007.
- [Wel74] J. Welty, *Engineering heat transfer*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [Wel99] P. Wells, « Ultrasonic imaging of the human body », *Reports on Progress in Physics*, vol. 62, n° 5, pp. 671–722, 1999.
- [Won05] K. Wong et W. Liao, « Adaptive body fitness equipment using magnetorheological fluids », dans *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2005.
- [Wor07] Worldheart, « Présentation du novacor et du novacor 2 », <http://www.worldheart.com/>, 2007.
- [Xia06] F. Xia, S. Tadigadapa et Q. Zhang, « Electroactive polymer based microfluidic pump », *Sensors & Actuators : A. Physical*, vol. 125, n° 2, pp. 346–352, 2006.
- [Yam03a] T. Yambe, Y. Shiraishi, M. Yoshizawa, A. Tanaka, K. Abe, F. Sato, H. Matsuki, M. Esashi, Y. Haga, S. Maruyama et al., « Artificial myocardium with an artificial baroreflex system using nano technology », *Bio-medicine & Pharmacotherapy*, vol. 57, pp. 122–125, 2003.
- [Yam03b] T. Yambe, M. Yoshizawa, A. Tanaka, K. Abe, S. Kawano, H. Matsuki, S. Maruyama, S. Amae, N. Wada et T. Kamiyama, « Recent Progress in Artificial Organ Research at Tohoku University », *Artificial Organs*, vol. 27, n° 1, pp. 2–7, 2003.

- [Yao02] G. Yao, F. Yap, G. Chen, W. Li et S. Yeo, « MR damper and its application for semi-active control of vehicle suspension system », *Mechatronics*, vol. 12, n° 7, pp. 963–973, 2002.