



**HAL**  
open science

# Quelques outils numériques pour la simulation et la mesure en mécanique des structures

Jean-Charles Passieux

► **To cite this version:**

Jean-Charles Passieux. Quelques outils numériques pour la simulation et la mesure en mécanique des structures. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Toulouse (Paul Sabatier), 2015. tel-01370556

**HAL Id: tel-01370556**

**<https://ut3-toulouseinp.hal.science/tel-01370556>**

Submitted on 23 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Habilitation à Diriger des Recherches

Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées

## Quelques outils numériques pour la simulation et la mesure en mécanique des structures

Jean-Charles PASSIEUX

Soutenue le 6 novembre 2015

**Jury :**

<i>Président :</i>	Olivier ALLIX	-	PR, École Normale Supérieure de Cachan
<i>Rapporteurs :</i>	François HILD	-	DR, CNRS, École Normale Supérieure de Cachan
	Nicolas MOËS	-	PR, École Centrale, Nantes
	Yves RENARD	-	PR, Institut National des Sciences Appliquées, Lyon
<i>Examineurs :</i>	Bruno CASTANIÉ	-	PR, Institut National des Sciences Appliquées, Toulouse
	Patrick LABORDE	-	PR, Université Paul Sabatier, Toulouse



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Mesure et simulation : un formalisme variationnel commun</b>	<b>5</b>
1	Calcul des structures en mécanique des solides	5
1.1	Formulation forte	6
1.2	Formulation variationnelle	6
1.3	Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation	7
2	Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques	7
2.1	Formulation forte	9
2.2	Formulation variationnelle	11
2.3	Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation	11
2.4	Choix du sous-espace d'approximation	13
<b>2</b>	<b>Réduction numérique de modèles</b>	<b>19</b>
1	Modèles réduits semi-analytiques	20
1.1	Le suivi du mouvement de corps rigide d'un impacteur	21
1.2	Estimation directe des facteurs d'intensité des contraintes (FIC)	24
2	Méthodes de bases réduites	34
2.1	Constitution de la base réduite pertinente	35
2.2	Cas du flambage local de panneaux raidis	37
2.3	Cas de l'endommagement localisé	39
3	Méthodes de séparation de variables - PGD	42
3.1	Principe	42
3.2	Application à la mesure de champs	43
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques multiéchelles</b>	<b>51</b>
1	Méthodes multigrilles	53
1.1	Multigrille localisé pour la rupture	55
1.2	Initialisation multigrille en mesure de champs	59
2	Approches locales/globales	61
2.1	Couplage local/global non intrusif	61
2.2	Mesure de champs de déplacement locale/globale	69
3	Décomposition de domaine	73
3.1	Décomposition de domaine non linéaire et non-intrusive	74
3.2	Décomposition de domaine et corrélation d'images numériques	75
<b>4</b>	<b>Intégration de la mesure et de la simulation : vers l'identification</b>	<b>81</b>
1	Régularisation de la mesure	81
2	Identification multiéchelle de paramètres de comportement	85
3	Stéréo-CIN éléments finis régularisée par la théorie des plaques et coques	90
3.1	Projet Vertex	90
3.2	Stéréo-CIN classique	91
3.3	Reformulation de la Stéréo-CIN éléments finis dans le repère monde	93
3.4	Stéréo-CIN EF avec régularisation	98
<b>5</b>	<b>Bilan et perspectives</b>	<b>103</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>



# Avant-propos

Une partie du temps de développement des produits industriels est vouée à la conception de leur structure, afin de vérifier (et/ou certifier) qu'elle puisse résister aux chargements mécaniques externes qu'elle pourrait subir au cours de son cycle de vie. Pour ce faire, la démarche s'appuie sur des essais réels instrumentés et des simulations avec des modèles analytiques et/ou numériques. Cet exercice est réalisé de l'échelle élémentaire à l'échelle de la structure complète en passant par toute une hiérarchie d'échelles, illustrées, dans un contexte aéronautique, sur la figure 1. Comme on peut le voir sur cette figure, un grand

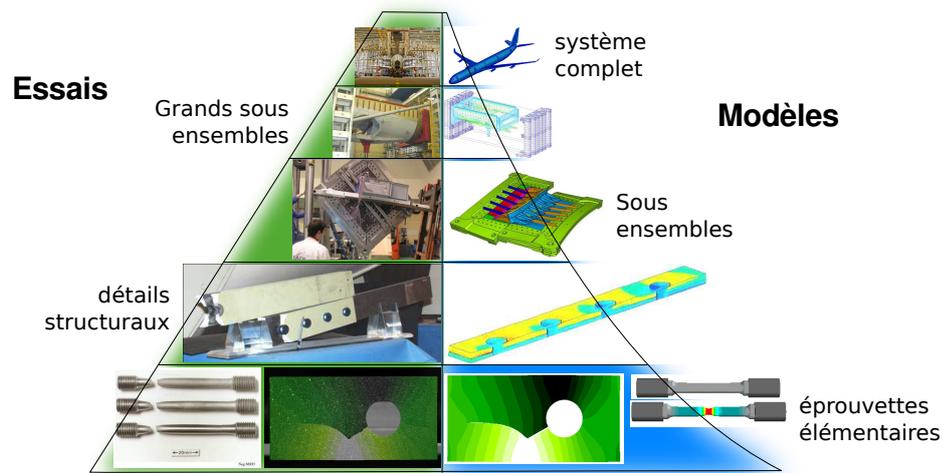


FIGURE 1 – Pyramide des essais et modèles dans l'industrie aéronautique. Les essais sont représentés à gauche et les modèles à droite. La largeur de la pyramide donne une idée du nombre d'essais et de simulations réalisés à chaque échelle.

nombre d'essais sont réalisés aux échelles inférieures. Ce nombre diminue à mesure que l'on gravit la pyramide ; le coût d'un essai allant croissant avec sa taille. Du côté des simulations, l'asymétrie de la pyramide traduit le fait que les modèles aux grandes échelles manquent, encore aujourd'hui, de caractère prédictif. Ceci est surtout dû à la complexité des modèles qui oblige les ingénieurs à recourir à des représentations simplifiées à ces échelles là.

Dans ce contexte, la recherche se focalise, entre autres, sur les objectifs suivants qui peuvent s'interpréter, plus ou moins, comme des restructurations de cette pyramide :

- réduire le nombre d'essais aux petites échelles d'où très peu d'informations sont retirées et qui sont répétées de nombreuses fois dans des grandes campagnes d'essai. D'un côté de la pyramide, l'objectif est plutôt de les remplacer partiellement par des simulations (on parle d'essais virtuels ou *Predictive Virtual Testing*). De l'autre côté de la pyramide, l'idée consiste à les remplacer par des essais mieux instrumentés aux échelles intermédiaires. Ceci est parfois possible en remplaçant des instrumentations ponctuelles classiques par des mesures de champs et/ou la multi-instrumentation. À titre d'exemple, les essais de caractérisation normalisés [ASTM D3039-00, 2000] exigent 3 essais différents instrumentés par une ou deux jauges pour déterminer les quatre paramètres élastiques de la loi de comportement orthotrope d'un composite stratifié, et qui plus est, sur des éprouvettes dont la stratification (et donc le mode de production) est différente du matériau final dont on recherche les propriétés. Grâce à la quantité d'informations qu'elles fournissent, les méthodes de mesure de champs permettent, par exemple, d'identifier ces propriétés grâce à un seul essai [Molimard et al., 2005, Lecompte et al., 2007] et ce sur une éprouvette du matériau cible.

- simplifier et automatiser autant que possible l'utilisation des modèles ou des instruments de mesure, afin de réduire les interventions coûteuses et parfois fastidieuses des opérateurs. La méthode des éléments finis étendus [Moës et al., 1999] a permis, par exemple, de faire un grand pas en ce sens, puisqu'elle permet de réduire considérablement les problématiques de remaillage dans le cas de la propagation de fissures. Toujours dans le contexte de la mécanique de la rupture, la mesure de champ intégrée [Hamam et al., 2007] est un bon candidat pour se substituer à l'instrumentation par la méthode optique (optique signifiant ici l'oeil de l'opérateur) recommandé par la norme [ASTM E647, 2000] pour l'identification des lois de propagation.
- augmenter l'efficacité numérique des modèles et des méthodes exploitant les grandes quantités de données expérimentales. Ceci afin de réduire les cycles d'optimisation et afin également de complexifier les modèles aux échelles globales pour améliorer leur caractère prédictif. C'est, entre autre, l'objectif du calcul haute performance.
- faciliter le couplage fort entre des modèles (ou des mesures) associées à des échelles différentes. Au niveau simulation, on parle de stratégies de calcul multiéchelles. Parmi ces méthodes multiéchelles certaines aujourd'hui mettent l'accent sur leur caractère pas ou peu intrusif, ce qui permet d'envisager des couplages de codes fermés avec des codes recherche.
- faciliter les couplages entre la simulation et l'expérience. L'objectif est de faciliter les échanges pour la comparaison, la validation et l'identification de modèles. Mais c'est également une façon d'enrichir les modèles avec des conditions d'analyses représentatives des essais, et c'est aussi une façon d'enrichir les essais avec des connaissances physiques lorsqu'elles sont réputées fiables.

Pour répondre aux challenges cités précédemment, de nombreux modèles (plus ou moins complexes) existent aujourd'hui pour décrire le comportement des matériaux et/ou des structures à l'échelle des phénomènes physiques, voire à l'échelle de la micro-structure. De nombreux logiciels commerciaux ont d'ailleurs démocratisé l'usage en milieu industriel de certain d'entre eux. Cependant, leur utilisation à l'échelle globale peut conduire à des problèmes de grande complexité numérique. De même, la mesure de champ de déplacement par corrélation d'images numériques (CIN) apporte des éléments de réponse à une partie de ces problématiques. Il s'agit d'une méthode optique de mesure de champs de déplacements 2D ou 3D, à la surface ou à l'intérieur de l'éprouvette imagée. Cette technique a connu un très fort développement au cours des trente dernières années, au point qu'elle devient un moyen de mesure quasi incontournable dans les laboratoires académiques, voire aujourd'hui dans l'industrie mécanique. Ceci peut s'expliquer par le fait que la corrélation d'images numériques est une méthode de mesure polyvalente, dont la résolution n'est pas associée à une échelle particulière, peu onéreuse, relativement simple d'utilisation et capable de fournir une grande quantité d'informations avec une précision tout à fait acceptable. Cette technique issue du monde de l'analyse d'image a été récemment formulée de façon variationnelle globale dans la région d'intérêt par Hild et Roux [Hild and Roux, 2006, Roux et al., 2009]. Plus qu'une simple passerelle, ce formalisme permet de créer un véritable environnement d'analyse unifié entre les mondes, jadis séparés, de la mesure et de la simulation.

Pour aller plus loin dans ce sens, et en s'appuyant sur ces outils modernes, une partie de l'effort repose donc aujourd'hui sur **le développement ou l'amélioration d'outils numériques pour la simulation, pour la mesure, et ainsi que des outils communs pour le dialogue essais-calculs**. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans ce mémoire.

Dans un premier chapitre à visée bibliographique, nous présentons la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques, en insistant sur ce formalisme variationnel commun.

Le second chapitre s'intéresse aux approches numériques, dites de réduction de modèle, cherchant à réduire la complexité numérique des modèles et à en accélérer la résolution. Les méthodes analytiques ou semi-analytiques sont présentées. Elles permettent de régulariser les problèmes, d'enrichir localement des

approximations plus classiques et de donner accès à des grandeurs physiques d'intérêt, tant en mesure qu'en simulation. Nous traitons ensuite le cas des méthodes de type bases réduites et présentons en particulier des adaptations nécessaires à leur déploiement dans un contexte non linéaire. Enfin, les méthodes de réduction de dimensionnalité par séparation de variables sont abordées au travers de la problématique de la mesure de champ.

Le troisième chapitre présente des stratégies hybrides dites multiéchelles capables de coupler de façon forte et réciproque une modélisation fine dans une (ou plusieurs) région(s) localisée(s) avec une modélisation grossière à l'échelle globale. Nous illustrons l'intérêt que représentent les méthodes multigrilles pour la simulation de la propagation de fissures en mécanique linéaire élastique et nous montrons qu'elles peuvent être utiles pour traiter des phénomènes numériques similaires dans le contexte de la corrélation d'images. Nous présentons ensuite des approches dans lesquelles une vision raffinée est utilisée localement pour améliorer une vision plus grossière à l'échelle globale en mesure et en simulation. En particulier, nous insistons sur des approches récentes qualifiées de non intrusives en ce sens qu'elles permettent de déployer des outils numériques efficaces (issus de la recherche par exemple) au sein de logiciels commerciaux fermés. Enfin, nous présentons des approches de type décomposition de domaine en s'intéressant particulièrement au cas non linéaire. Nous présentons une méthode de décomposition de domaine non linéaire qui permet de paralléliser de façon efficace un logiciel commercial séquentiel fermé. Nous montrons, pour terminer, l'intérêt que ces méthodes peuvent représenter pour la corrélation d'images numériques.

Après avoir présenté cet environnement et ces outils numériques communs à la simulation et à la mesure, le quatrième et dernier chapitre est dédié aux méthodes numériques développées pour lier de façon plus intime la mesure et la simulation. Nous évoquons le fait qu'un modèle basé sur une connaissance raisonnable de la physique peut améliorer considérablement la mesure et comment un modèle peut-être enrichi de conditions expérimentales représentatives du réel. Des méthodes d'identification à partir de mesures de champs ou directement à partir des images sont présentées. Nous montrons en quoi une méthode d'identification à partir de mesures à plusieurs niveaux de résolution peut permettre de réduire les incertitudes sur les paramètres identifiés. Nous développons enfin une formulation globale du problème de stéréo-corrélation d'images dans le but de pouvoir étendre ces notions de régularisation et d'identification au cas de la stéréo.

Le document se termine sur un bilan et quelques perspectives.

Sauf mention particulière, les travaux présentés dans ce document ont été préparés à l'Institut Clément Ader (Univ. Fédérale Toulouse Midi Pyrénées, CNRS FRE3687, INSA/UPS/Mines Albi/ISAE), dans le groupe "Modélisation des Systèmes et Micro-systèmes Mécaniques" et dans l'axe "Intégrité des Structures et des Systèmes" en collaboration avec des collègues d'autres groupes et axes de l'ICA et d'autres laboratoires.



# Mesure et simulation : un formalisme variationnel commun

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Calcul des structures en mécanique des solides</b>	<b>5</b>
1.1	Formulation forte	6
1.2	Formulation variationnelle	6
1.3	Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation	7
<b>2</b>	<b>Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques</b>	<b>7</b>
2.1	Formulation forte	9
2.2	Formulation variationnelle	11
2.3	Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation	11
2.4	Choix du sous-espace d'approximation	13

Dans ce chapitre à visée essentiellement bibliographique, on tente de présenter la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques dans un formalisme aussi proche que possible de celui utilisé pour le calcul des structures, afin de faire très tôt un parallèle fort entre le monde de la simulation et celui de la mesure.

## 1 Calcul des structures en mécanique des solides

Cette section très basique présente le problème de référence en calcul de structures. Sous l'hypothèse des petites perturbations, nous considérons l'évolution quasi-statique et isotherme d'une structure  $\Omega$ . L'état de contrainte dans  $\Omega$  est entièrement déterminé par la donnée du tenseur de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Les déformations et déplacements sont caractérisés, quant à eux, par le champ vectoriel de déplacement  $\mathbf{u}$  et celui du tenseur linéarisé des déformations  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla_s \mathbf{u}$ , ou  $\nabla_s$  désigne la partie symétrique du gradient. Cette structure est sou-

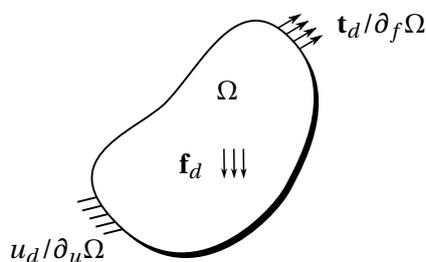


FIGURE 1.1 – Définition du problème de référence

mise à une densité d'efforts volumiques extérieure donnée  $\mathbf{f}_d$  dans le volume  $\Omega$ . Elle est également soumise à une densité d'efforts surfaciques extérieure donnée  $\mathbf{t}_d$  sur la partie de son bord  $\partial_f \Omega$  (condition de Neumann). Sur la partie complémentaire  $\partial_u \Omega$ , le déplacement  $\mathbf{u}|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{u}_d$  est imposé (condition de Dirichlet).

L'écriture de l'équilibre local conduit à rendre le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$  symétrique et à vérifier les équations suivantes :

$$\mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{t}_d \quad \text{sur } \partial_f \Omega \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale au bord  $\partial_f \Omega$  sortante.

### 1.1 Formulation forte

On fait ici la liste des équations fortes (c'est-à-dire à vérifier en tout point de  $\Omega$ ) qui caractérisent la solution du problème. On cherche donc le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  et le champ de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})$  qui vérifient les équations suivantes :

- Un champ de vecteurs  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  est dit **cinématiquement admissible** si il est compatible avec les conditions de Dirichlet sur  $\partial_u \Omega$  :

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad} = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \underline{\underline{\varepsilon}} = \nabla_s \mathbf{u}; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \partial_u \Omega \right\}$$

où  $\mathbf{H}^1(\Omega) = [H^1(\Omega)]^d$  (avec  $d$  la dimension du problème) est l'espace de définition de  $\mathbf{u}$ , il correspond physiquement aux champs de déplacement à énergie finie.

- Un champ de tenseurs  $\underline{\underline{\sigma}}$  est dit **statiquement admissible**, s'il vérifie une certaine régularité, qu'il est symétrique et qu'il vérifie l'équilibre local (1.1) et (1.2) :

$$\underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{S}_{ad} = \left\{ \underline{\underline{\sigma}} \in \mathcal{V}_\sigma \mid \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T, \quad \mathbf{div} \underline{\underline{\sigma}} + \mathbf{f}_d = \mathbf{0} \text{ and } \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{t}_d \text{ sur } \partial_f \Omega \right\}$$

où  $\mathcal{V}_\sigma$  est l'espace de définition de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , il correspond physiquement aux champs de tenseurs de contraintes à énergie finie.

- La solution du problème d'élasticité vérifie par ailleurs la **relation de comportement** qui peut s'écrire formellement :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\varepsilon}})$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  désigne, par exemple, l'opérateur de Hooke dans le cas de l'élasticité linéaire.

### 1.2 Formulation variationnelle

Bien que la solution  $(\mathbf{u}, \underline{\underline{\sigma}})$  du système d'équations précédent existe et soit unique, elle n'admet une écriture analytique que dans un certain nombre de cas de géométrie et de chargement très simples. On va donc chercher à réécrire le problème sous forme faible. La solution recherchée  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$  minimise l'énergie potentielle :

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{t}_d \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{s} \quad (1.3)$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire de  $L^2$  et  $:$  le produit doublement contracté. La formulation variationnelle du problème s'écrit comme la condition de stationnarité de  $J$  : Trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad}$ , tel que :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \quad (1.4)$$

avec  $\mathcal{U}_{ad}^0 = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial_u \Omega\}$  l'espace vectoriel associé à  $\mathcal{U}_{ad}$ .  $a$  désigne la forme bilinéaire correspondante au travail des efforts intérieurs et  $L$  la forme linéaire associée au travail des efforts extérieurs :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{t}_d \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{s}$$

### 1.3 Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation

L'espace  $\mathcal{U}_{ad}$  étant de dimension infinie, il n'est pas possible de trouver une solution numérique à ce problème. Pour ce faire, on introduit un sous-espace d'approximation  $\mathcal{U}_{ad}^h$  de dimension finie. On introduit également l'espace vectoriel associé  $\mathcal{U}_{ad}^{h,0}$ . Cet espace est, en fait, défini par le choix d'une base de fonctions d'interpolation  $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{0\dots n}$  :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

où  $n$  est la dimension du sous-espace  $\mathcal{U}_{ad}^h$ ,  $q_i$  les degrés de liberté associés. En mécanique des milieux continus, on utilise le plus souvent pour  $\phi_i$  une interpolation éléments finis, bien que des solutions alternatives à base de fonctions de plus haut degré de régularité (basées sur l'analyse isogéométrique) connaissent un intérêt grandissant [Hughes et al., 2005], notamment parce qu'elles permettent de représenter la géométrie de façon exacte, indépendamment du raffinement. L'intérêt des éléments finis réside dans le fait que les degrés de liberté  $q_i$  ne sont autres que les valeurs nodales du champ de déplacement  $\mathbf{u}^h$ . Ceci se traduit par une prise en compte très simple des conditions (aux limites en particulier) sur le déplacement et un post-traitement très simple également.

L'introduction de l'approximation éléments finis dans la formulation variationnelle (1.4) conduit à la résolution, dans le cas linéaire, du système linéaire suivant :

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{q}$  est un vecteur de dimension  $n$  dont les composantes sont les degrés de liberté  $q_i$ . L'opérateur  $\mathbf{K}$  et le second membre  $\mathbf{f}$  sont tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij} &= a(\phi_i(\mathbf{x}), \phi_j(\mathbf{x})) \\ \mathbf{f}_i &= L(\phi_i(\mathbf{x})) \end{aligned}$$

Dans la suite, nous allons voir que la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images peut être décrite de façon tout à fait analogue.

## 2 Mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques

La corrélation d'images numériques (CIN, ou *digital image correlation (DIC)* en anglais) est une méthode optique de mesure de champs de déplacements 2D ou 3D, à la surface ou à l'intérieur de l'éprouvette imagée. Apparue au début des années 80 aux États Unis [Lucas and Kanade, 1981], la méthode a été initialement utilisée pour mesurer le champ de déplacement 2D à la surface d'un objet plan avec une caméra fronto-parallèle [Sutton et al., 1983]. L'image acquise par un capteur CCD (*Charge-Coupled Device*) ou CMOS (*Complementarity metal-oxide-semiconductor*) est le plus souvent convertie en échelle de gris. On dispose alors d'une matrice 2D qui fournit la valeur de l'intensité lumineuse (exprimée en niveaux de gris) pour chaque position entière de pixels. Deux images d'un même objet prises dans deux conditions de chargement différentes, conduit à deux images (et donc matrices) différentes. En faisant l'hypothèse que cette différence est uniquement due aux déplacements et/ou aux déformations de l'objet imagé, on peut remonter aux déplacements de la surface observée, puis le cas échéant aux déformations par différenciation [Azzouna et al., 2013]. La corrélation d'images présente de grandes similarités avec d'autres méthodes issues d'autres communautés scientifiques, telles que la Speckle Velocimetry, la Particle Image Velocimetry (PIV) en mécanique des fluides [Adrian, 1984, Adrian, 2005], ou l'Image Registration en Vision par ordinateur [Fehrenbach and Masmoudi, 2008].

La corrélation d'images a connu un très fort développement au cours des trente dernières années. Ceci peut s'expliquer par le fait que la corrélation d'images numériques est une méthode de mesure polyvalente (2D, 2.5D, 3D), multiéchelle, peu onéreuse, relativement simple d'utilisation et capable de fournir une

grande quantité d'informations avec une précision acceptable. Plus précisément, ses points forts sont les suivants :

- Contrairement aux méthodes conventionnelles (extensométrie, jauges de déformations) qui ne fournissent que des informations moyennées ou ponctuelles, il s'agit ici d'une **méthode de mesure de champs** de déplacement. En effet, grâce à la résolution en constante augmentation des capteurs photographiques (5, 11, 29 millions de pixels), la corrélation d'images numériques est capable de fournir une grande quantité d'informations. Ce point est particulièrement attractif dans le cadre du recalage de modèles ou de l'identification de paramètres à partir de mesures de champs [Avril et al., 2008a].
- Cette méthode de mesure est **sans contact**, ce qui permet non seulement de ne pas modifier les propriétés du spécimen étudié (à la question du mouchetis près) qui dans le cas de matériaux souples peut-être assez sensible [Hild et al., 2009]. Elle permet également de travailler à grande distance, ce qui peut s'avérer indispensable dans certaines conditions expérimentales difficiles telles que des fortes températures, des forts champs magnétiques, des milieux corrosifs, humides...). Des microscopes longue distance peuvent être utilisés pour observer à plusieurs dizaines de centimètres une région de quelques millimètres [Sutton et al., 1999, Forquin et al., 2004].
- le coût des capteurs photographiques rendent ce **moyen de mesure très abordable**, et ce malgré l'augmentation de la résolution évoquée plus haut.
- L'acquisition d'une séquence d'images permet également de mesurer l'**évolution temporelle** d'un phénomène. Des caméras rapides permettent aujourd'hui de faire des acquisitions à plusieurs millions d'images par seconde (résolution inférieure à la  $\mu$  seconde) en conservant une définition d'image exploitable. Ceci permet à la corrélation d'images de s'adapter à des phénomènes statiques et quasi-statiques mais également dynamiques transitoires [Reu and Miller, 2008] et vibratoires [Helfrick et al., 2011, Warren et al., 2011, Wang et al., 2011].
- Si la corrélation d'images peut s'adapter à une large gamme d'échelles temporelles, elle peut également être employée sur **un large spectre d'échelles** spatiales, sous réserve que l'on soit capable de déposer ou d'utiliser un mouchetis adapté à cette échelle, on parle de grande « étendue de mesure ». En effet, contrairement à beaucoup de méthodes concurrentes, cette technique n'est pas associée à une échelle particulière. Elle peut être utilisée à l'échelle nanométrique [Chasiotis and Knauss, 2002], jusqu'à l'échelle de plusieurs mètres [Küntz et al., 2006], voire plusieurs kilomètres [Leprince et al., 2007].
- Depuis ses travaux pionniers en 2D monoculaire [Lucas and Kanade, 1981], la corrélation d'images numériques a beaucoup évolué et c'est étendue à la mesure stéréoscopique de formes et donc de champs de **déplacements 3D à la surface** d'un objet par analyse des images issues d'un banc fait de deux caméras [Luo et al., 1993, Cardenas-Garcia et al., 1995, Garcia et al., 2002] voire davantage [Orteu et al., 2011, Harvent et al., 2013] (cf. figure 1.2). Il est aujourd'hui également possible de mesurer le **déplacement 3D volumique**, on parle de Corrélation d'Images Volumiques (CIV ou *Digital Volume Correlation (DVC)*). En corrélation d'images volumiques les images sont obtenues par des techniques d'imagerie 3D parmi lesquelles on trouve par exemple la tomographie à rayons X (*CT pour Computed Tomography*) [Bay et al., 1999, Bornert et al., 2004] dont les images sont acquises dans un microtomographe, mais également en synchrotron [Rannou et al., 2010]. La CIV est également utilisée pour analyser des images de tomographie optique (*OCT pour Optical Coherence Tomography*) [Schmitt, 1998], d'imagerie par résonance magnétique (IRM) (ou *MRI pour Magnetic resonance imaging*) [Neu and Walton, 2008, Benoit et al., 2009], de laminographie [Morgeneyer et al., 2013], en rayonnement visible dans certains matériaux transparents [Germaneau et al., 2007], d'images médicales par ultrasons (échographie) [Han et al., 2012] et de microscopie confocale [Franck et al., 2007, Van Beeck et al., 2014] entre autres. Dans la plupart des cas, l'image est elle-même issue d'un problème inverse qui consiste à reconstruire la carte 3D des intensités (densités, propriétés quantiques) à partir d'un grand nombre de projections (ou radios). Elle est basée sur la transformée de Radon.

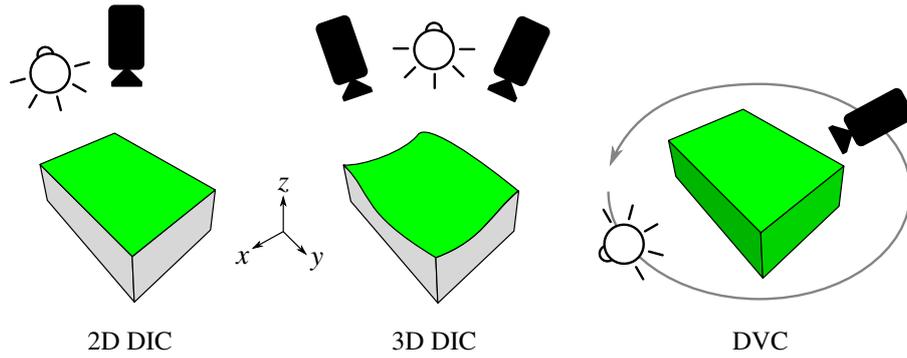


FIGURE 1.2 – illustration des trois familles de mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques : (à gauche) la mesure 2D surfacique avec capteur et source fronto-parallèles, (au centre) mesure de déplacement 3D surfacique avec au moins deux capteurs et une source, (droite) mesure de déplacement 3D volumique source et capteur de part et d'autre de la pièce imagée

Une méthode permettant d'intégrer la reconstruction et la corrélation d'images volumiques a été proposée récemment [Leclerc et al., 2014] ce qui permet de limiter considérablement le nombre de radiographies de l'échantillon sous sollicitation. Cette technique permet d'envisager, ce qui était encore hors de portée en imagerie 3D, l'étude de phénomènes temporels par corrélation volumique.

Dans cette section, nous présentons le problème de corrélation d'images numériques dans sa formulation dite *globale* telle que proposée par F. Hild et S. Roux [Besnard et al., 2006, Roux et al., 2009]. On peut montrer que cette formulation générale englobe les méthodes plus classiques dites *locales* ou basées sur des imagerie (ou subset en anglais) [Sutton et al., 1983, Sutton et al., 2009] qui sont à la base de la quasi-totalité des codes industriels de corrélation d'images encore aujourd'hui. Cette formulation générale ne se réduit pas au seul cas de la corrélation d'images 2D plane. Elle reste également valable pour la mesure de champs de déplacement 3D par corrélation d'images volumiques en remplaçant la notion de *pixel* par celle de *voxel*. En revanche, le cas particulier de la stéréo corrélation d'images sera traité dans le chapitre 4.

## 2.1 Formulation forte

Considérons deux images numériques en niveaux de gris prises avant (figure 1.3(a)) et après (figure 1.3(b)) que le sujet ait été soumis à un (incrément de) déplacement et/ou de déformation. Les couleurs n'ont pour l'instant que peu été utilisées dans la littérature, mais cette question sera cependant abordée ultérieurement. À la position du pixel  $\mathbf{x}$  dans l'image de référence, se trouve le niveau de gris  $f(\mathbf{x})$  que l'on considère attaché à l'éprouvette observée. Pour retrouver ce niveau de gris, et donc le point matériel associé sur la surface de l'éprouvette, on doit rechercher dans l'image dite sous charge  $g(\mathbf{x})$ , à la position  $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . Ainsi on écrit l'équation de conservation des niveaux de gris de la façon suivante : [Horn and Schunck, 1981]

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad (1.7)$$

ou  $\mathbf{x}$  est une position en pixels dans l'image de référence.

**Interpolation des niveaux de gris :** la résolution de la mesure est très largement inférieure au pixel, on parle de *résolution sub-pixel*. Ceci peut paraître contre-intuitif au premier abord. En réalité, un déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sub-pixel (ou plus généralement non entier) conduit à un changement du niveau de gris du voisinage de  $\mathbf{x}$ . C'est dans les niveaux de gris du voisinage de  $\mathbf{x}$  que se cache l'information du déplacement. Cette idée est illustrée sur la figure 1.4 Afin de pouvoir le mesurer, il faut introduire un schéma d'interpolation des niveaux de gris. Le choix de cet algorithme a un effet important sur les incertitudes de mesures. Dans la littérature, de nombreux schémas ont été utilisés (voir par exemple [Schreier et al., 2000, Besnard et al., 2006]). En général, on utilisera, une interpolation spline ou cubique avec des images classiques bidimensionnelles

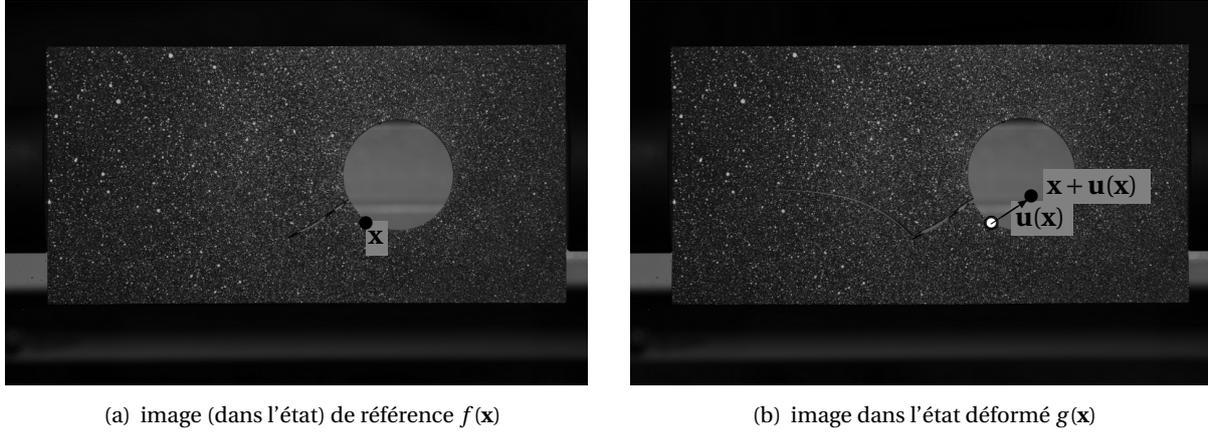


FIGURE 1.3 – Exemple de deux images en niveaux de gris correspondantes à un essai de compression sur une éprouvette entaillée en PMMA. Au pixel  $\mathbf{x}$ , le niveau de gris est  $f(\mathbf{x})$  dans l'image de référence (à gauche). Ce même niveau de gris peut être retrouvé dans l'image après déplacement  $g(\mathbf{x})$  (à droite) à la position  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$

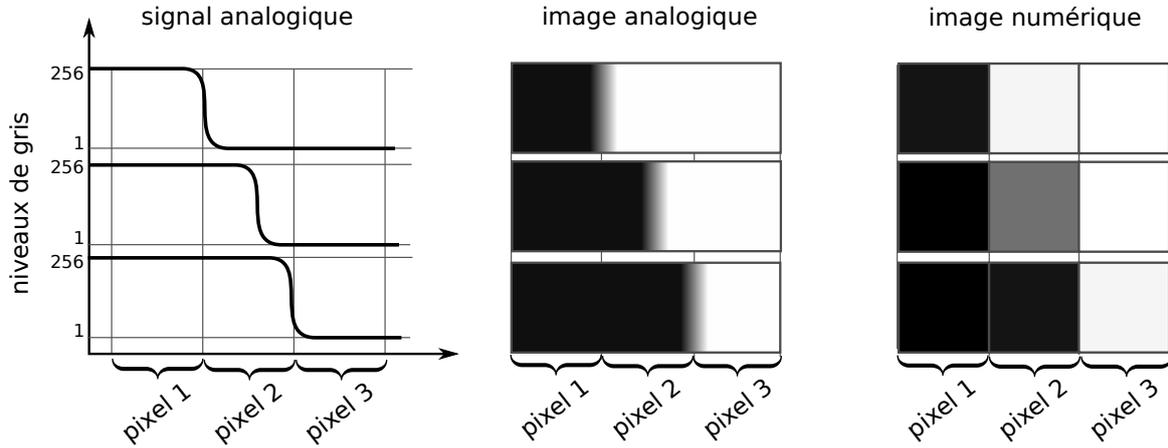


FIGURE 1.4 – Illustration de la numérisation sur 8 bits de l'image correspondante à un déplacement sub-pixel et de son effet sur les niveaux de gris.

et on se limitera à une interpolation tri-linéaire avec des images volumiques, en raison du temps de calcul.

Pour être plus précis, l'équation de conservation des niveaux de gris devrait s'écrire :

$$f(\mathbf{x}) = a \times g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) + b + \eta(\mathbf{x}) \quad (1.8)$$

ou  $a$  et  $b$  caractérisent une variation de contraste et de luminosité (non nécessairement constantes) que l'on estime et corrige pendant la mesure.  $\eta$  est, quant à lui, un bruit capteur que l'on assimile le plus souvent à bruit blanc gaussien d'écart-type de quelques niveaux de gris, même si, en pratique, il peut présenter une structure bien plus complexe à cause des artefacts de reconstruction en CIV ou même en CIN-2D à cause des vibrations du capteur [Sur and Grediac, 2014]. Le problème de corrélation d'images numériques consiste à déterminer le champ de déplacement inconnu  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega$ .  $\Omega$  désignant la région d'intérêt (ROI), définie par une sous-région de l'image. Ce problème est mal posé au sens d'Hadamard. En effet, le simple fait de chercher un champ de déplacement vectoriel à partir d'une donnée scalaire en fait un problème sous déterminé (une équation scalaire pour deux inconnues). De plus, le fait que les données soient discrètes, viole à la fois les conditions d'existence et d'unicité d'Hadamard. Par exemple une image codée

sur 8 bits de  $1024 \times 1024$  pixels a donc plus d'un million de pixels dont le niveau de gris peut prendre seulement 256 valeurs différentes. De fait, cette formulation forte n'est jamais résolue telle qu'elle. Le problème est réécrit sous la forme faible décrite dans le paragraphe suivant.

## 2.2 Formulation variationnelle

Le problème est alors écrit au sens des moindres carrés sous la forme du problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{u}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})))^2 d\mathbf{x} \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{L}^2(\Omega) = [L^2(\Omega)]^d$  (avec  $d$  la dimension du problème). Ce problème de moindres carrés est non linéaire car l'inconnue  $\mathbf{u}$  apparaît à l'intérieur de la fonction niveaux de gris de l'image  $g$ . Il est donc résolu par un algorithme itératif. Pour ce faire, un algorithme de type quasi-Newton est souvent utilisé. Il consiste à écrire le problème en incrément de déplacement  $\delta \mathbf{u}$ , tel que  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}$ , ou  $\mathbf{u}_0$  est l'estimation initiale ou le déplacement à l'itération précédente. L'incrément de déplacement est supposé suffisamment petit pour pouvoir écrire un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \approx g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})) + \delta \mathbf{u}(\mathbf{x})^T \nabla g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})) \quad (1.10)$$

Le problème linéarisé s'écrit donc :

$$\mathbf{u}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \int_{\Omega} (r_0(\mathbf{x}) - \delta \mathbf{u}^T \nabla g_0(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} \quad (1.11)$$

où  $r_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  est appelé le résidu de corrélation. Ce résidu se calcule comme une différence d'images en niveaux de gris et permet de visualiser graphiquement la (non-)vérification de la conservation des niveaux de gris. Le terme  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  s'interprète par le transport (ou l'advection) de l'image  $g$  par le champ de déplacement  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ . Il est calculé par les algorithmes d'interpolation mentionnés plus tôt.

La condition de stationnarité s'écrit alors [Fedele et al., 2013] sous la forme variationnelle suivante :

$$\text{Trouver } \delta \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad (1.12)$$

où  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  est le champ test,  $\tilde{a}$  et  $\tilde{L}$  les formes bilinéaire symétrique et linéaire suivantes :

$$\tilde{a}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^T \nabla g_0(\mathbf{x})) (\mathbf{v}^T \nabla g_0(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \tilde{L}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}^T \nabla g_0(\mathbf{x})) r_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.13)$$

Si l'algorithme converge, alors  $g_0(\mathbf{x})$  est une bonne approximation de  $f(\mathbf{x})$  en vertu du principe de conservation des niveaux de gris (1.7). En pratique cette formulation variationnelle est légèrement modifiée [Roux et al., 2009] :

$$a(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\delta \mathbf{u}^T \nabla f(\mathbf{x})) (\mathbf{v}^T \nabla f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad \text{et} \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\mathbf{v}^T \nabla f(\mathbf{x})) r_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.14)$$

l'usage du gradient de l'image de référence  $\nabla f$  n'a pas d'effet sur l'optimal  $\mathbf{u}^*$  puisqu'il est égal à  $\nabla g_0$  à convergence. Ce choix rend la forme bilinéaire indépendante de  $\mathbf{u}_0$  qui change à chaque itération du Newton. L'opérateur correspondant pourra être assemblé et factorisé une fois pour toutes. Ce gradient n'est donc estimé qu'une seule fois par différences finies par exemple.

## 2.3 Recherche de la solution dans un sous-espace d'approximation

L'espace  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  des champs de déplacement candidats  $\mathbf{u}$  est de dimension infinie. Pour résoudre ce problème, un sous-espace d'approximation  $\mathcal{V}^h \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$  doit être choisi en fonction de la connaissance que l'on

a, *a priori*, du champ de déplacement inconnu. La plupart du temps, ce sous-espace est défini par une base de fonctions d'interpolation  $\{\phi_i(\mathbf{x})\}_{0\dots n}$  de la façon suivante :

$$\delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta q_i \phi_i(\mathbf{x}) \quad (1.15)$$

ou  $n$  est la dimension du sous espace  $\mathcal{V}^h$  ou le nombre d'inconnues  $\delta q_i$  que l'on appelle degrés de liberté.

Une résolution du problème (1.12) par la méthode de Galerkin conduit à la résolution du système linéaire suivant à chaque itération :

$$\mathbf{M} \delta \mathbf{q} = \mathbf{b} \quad (1.16)$$

où  $\delta \mathbf{q}$  est un vecteur de dimension  $n$  dont les composantes sont les degrés de liberté  $\delta q_i$ . L'opérateur  $\mathbf{M}$  et le second membre  $\mathbf{b}$  sont tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= a(\phi_i(\mathbf{x}), \phi_j(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \mathbf{b}_i &= L(\phi_i(\mathbf{x})) = \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})^T \nabla f(\mathbf{x}) r_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

**Quadrature :** En calcul de structures, les fonctions à intégrer étant polynomiales de faibles degrés, ce type d'intégrale est calculé avec des méthodes de quadrature exactes (par ex. Gauss-Legendre), qui permettent de minimiser le nombre de points d'intégrations (utile surtout en non linéaire matériau). En revanche, ici, l'intégrande est le carré du gradient de l'image, c'est-à-dire une donnée connue aux pixels. L'intégrale se fait alors aux pixels, par une simple méthode des rectangles, le plus souvent.

L'opérateur  $\mathbf{M}$  a de bonnes propriétés algébriques, à commencer par sa symétrie. Elle a la forme d'une matrice de masse, dans laquelle la densité est en quelque sorte substituée par le carré du gradient de l'image de référence  $\nabla f(\mathbf{x})$ . On peut montrer que si le gradient de l'image est suffisant, cette matrice est également définie positive [Fedele et al., 2013]. Le système qui en résulte est donc symétrique défini positif 1.16. Son caractère creux et son conditionnement dépendent évidemment du choix du sous-espace d'approximation et plus précisément de ses fonctions de base.

**Algorithme :** Étant donné l'estimation initiale du déplacement  $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ , l'assemblage et la factorisation au préalable de la matrice  $\mathbf{M}$ , une itération de l'algorithme de corrélation d'images nécessite seulement

1. de construire la carte des résidus  $r_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  par interpolation de l'image  $g(\mathbf{x})$  et différence avec l'image de référence  $f(\mathbf{x})$ ,
2. d'assembler le second membre  $\mathbf{b}$
3. de résoudre le système  $\mathbf{M} \delta \mathbf{q} = \mathbf{b}$
4. de corriger l'estimation du déplacement  $\mathbf{u}_0 \leftarrow \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}$ .

Ces quatre étapes sont répétées jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. Deux indicateurs sont souvent utilisés pour estimer la convergence de cet algorithme. Le premier est basé sur la métrique que l'algorithme minimise (4.2) et consiste plus ou moins à une norme relative de la carte des résidus  $r_0(\mathbf{x})$  :

$$\eta_r^2 = \frac{1}{d} \int_{\Omega} r_0^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

ou  $d = |\max(f) - \min(f)|$  est appelée la dynamique de l'image. Cette mesure a tous les attributs d'une réelle mesure de l'erreur, mais elle mesure également les erreurs dues aux incertitudes, au bruit et également à l'erreur d'approximation du champ de déplacement. En effet, si le champ de déplacement réel n'appartient pas à  $\mathcal{V}^h$  alors la carte des résidus ne sera jamais nulle. Ainsi cette mesure d'erreur permet plus d'évaluer la qualité de la mesure à convergence. C'est une information très riche en particulier en présence de fissures, comme illustré sur la figure 1.5.

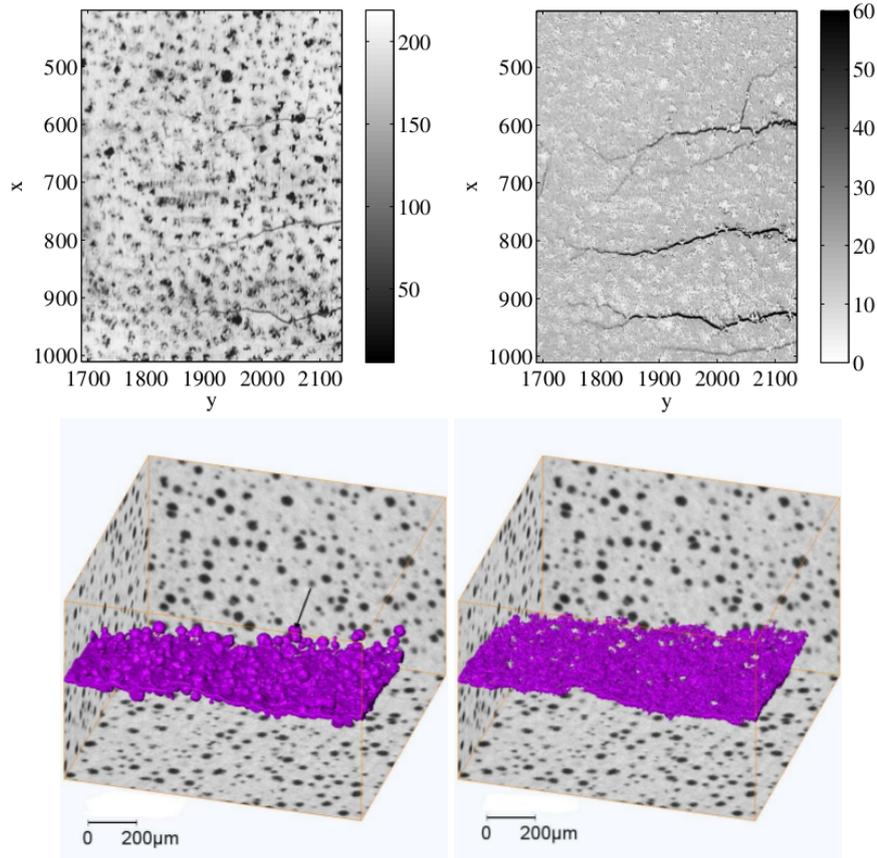


FIGURE 1.5 – En haut : image dans l'état déformé d'une éprouvette en béton armé (à gauche) et carte des résidus (à droite) après corrélation d'images avec un espace d'approximation de champ de déplacement continu. Même si l'on peut deviner la présence des principales fissures dans l'image, la carte des résidus révèle un réseau de fissures multiples beaucoup plus complexe (images issues de [Roux et al., 2009]). En bas : géométrie d'une fissure de fatigue dans une fonte à graphite sphéroïdale imagée en synchrotron, obtenue par seuillage des niveaux de gris de l'image de référence (à gauche) et par seuillage de la carte des résidus (à droite). On peut remarquer que l'information fournie par la carte des résidus a plus de sens que la simple distribution des niveaux de gris dans laquelle il est difficile de distinguer les nodules de graphites de la fissure (images issues de [Rannou et al., 2010])

En pratique pour arrêter l'algorithme, on se contente d'étudier sa stagnation, ou plutôt celle du champ de déplacement par :

$$\eta = \frac{\|\delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}_0\|} < \varepsilon_\eta$$

où  $\varepsilon_\eta$  est un petit paramètre choisi par l'utilisateur qui fixe l'arrêt de l'algorithme.

## 2.4 Choix du sous-espace d'approximation

Jusqu'ici, le choix du sous-espace d'approximation, ou plutôt de sa base  $\phi_i(\mathbf{x})$  n'a pas été précisée. Du choix de cet espace découle toute une variété de méthodes de corrélation d'images numériques dont l'usage est très dépendant de l'application visée.

**Méthodes dites *subset-based* :** Dans la littérature, ainsi que, comme dit plus haut, dans la quasi-totalité des codes de corrélation d'images commerciaux, ces fonctions sont constantes [Lucas and Kanade, 1981]

ou polynomiales [Sutton et al., 1983, Sutton et al., 1986] par morceaux sur un ensemble d'images (*subset* ou encore *zones of interest* (ZOI)). Les fonctions d'interpolations étant indépendantes d'une image à l'autre, le système (1.16) en résultant fait apparaître un opérateur  $\mathbf{M}$  diagonal par bloc; un bloc correspondant à une image. On comprend ainsi aisément l'intérêt pratique d'un tel choix qui conduit à un ensemble de systèmes linéaires locaux indépendants de petite taille (pouvant de plus être parallélisés). L'efficacité numérique (ou la rapidité de calcul) des méthodes *subset* est sans doute l'un des arguments qui justifient que les éditeurs de logiciels se cantonnent, encore aujourd'hui, aux approches *subset*. Ces méthodes viennent initialement de la communauté de l'analyse d'images [Lucas and Kanade, 1981] et sont, dans l'esprit, plutôt basées sur les images et donc les pixels. En effet, les images consistent en fait en un ensemble de pixels (souvent de forme carrée) autour du point de mesure. Le champ de déplacement mesuré n'est en réalité pas vraiment un champ mais un ensemble de points de mesure disposés de manière régulière dans l'image. Un champ de déplacement est ensuite calculé par extrapolation de ces mesures entre les points ce qui peut induire également des incertitudes. Les extensions à la stéréo-corrélation d'images [Luo et al., 1993, Garcia et al., 2002] et à la corrélation d'images volumiques [Bay et al., 1999, Bornert et al., 2004] ont été développées par la suite [Sutton et al., 2009].

**Autres types d'interpolation :** Le formalisme dit *global* de la corrélation d'images permet d'envisager des sous-espaces d'approximation mieux adaptés à la connaissance disponible *a priori* du champ de déplacement que l'on cherche à mesurer. Ci-dessous une liste non-exhaustive de fonctions d'interpolation utilisées dans la littérature :

- des **séries de Fourier** [Roux et al., 2002, Mortazavi et al., 2013] permettent de faire des mesures continues à l'échelle de la région d'intérêt  $\Omega$
- des **solutions analytiques** de problèmes **mécaniques** tels que les développements asymptotiques en pointe de fissure de la mécanique élastique linéaire de la rupture [Roux and Hild, 2006], des solutions analytiques de la théorie de poutres [Hild et al., 2011, Réthoré et al., 2010a, Blaysat et al., 2014], ou encore tout simplement des translations et rotations de corps rigide [Passieux et al., 2014].
- des **fonctions analytiques** avec un fondement **optique** tel que, par exemple, une cinématique basée sur l'amplification et le défocus [Réthoré et al., 2014] permettent d'estimer des déplacements 3D à partir d'une seule caméra. Une base représentant les déplacements apparents associés aux distorsions radiales, prismatique et de décentrage permet d'estimer ces distorsions en vue de corriger les images [Dufour et al., 2014]. Enfin, il est également possible d'utiliser une interpolation basée sur un opérateur d'homographie pour estimer les 6 modes de corps rigides d'un plan avec une seule caméra [Passieux et al., 2015a].
- l'usage de fonctions de forme **éléments finis** a été d'abord introduit en CIN [Sun et al., 2005, Hild and Roux, 2006, Besnard et al., 2006, Fehrenbach and Masmoudi, 2008]. Dans une philosophie toujours très proche de l'analyse d'images, donc des pixels, les éléments utilisés sont principalement des quadrilatères linéaires à 4 noeuds (Q4) faits d'un nombre entier de pixels. Aujourd'hui, un certain nombre de codes de corrélation d'images numériques académiques sont désormais capables de prendre en compte des maillages éléments finis non structurés (triangulaires ou quadrangulaires) [Leclerc et al., 2009][Réthoré et al., 2013][Baldi et al., 2013][Van Beeck et al., 2014][Wittevrongel et al., 2015] et [Passieux et al., 2015a]. La même technique a été transposée en 3D avec des éléments hexaédriques linéaires à 8 noeuds basés sur un nombre entier de voxels (C8) [Roux et al., 2008, Hild et al., 2009, Benoit et al., 2009]. La question de l'usage d'éléments finis stéréo-CIN est encore en partie ouverte [Besnard et al., 2012a, Réthoré et al., 2013, Beaubier et al., 2014].
- **éléments finis étendus** pour prendre en compte une discontinuité mobile du champ indépendamment du maillage. Les applications sont la mesure de bandes de cisaillement [Réthoré et al., 2007a], ou de champs de déplacement en présence de fissures [Réthoré et al., 2007b] en CIN, mais également en présence de fissures 3D en CIV [Réthoré et al., 2008a, Rannou et al., 2010].

- **séparation de variable, PGD** [Passieux and Périé, 2012] et 3D[Gomes Perini et al., 2014] (voir section 3 du chapitre 2)
- des interpolations de plus haut degré de régularité telles que des bases de **B-Splines** [Cheng et al., 2002, Réthoré et al., 2010a, Elguedj et al., 2010], des **polynômes de Hermite** [Passieux et al., 2013a] permettent d'avoir accès à un champ continu de déformation.
- l'**analyse isogéométrique**, les **NURBS** sont utilisées pour le calibrage et la mesure de forme en stéréo [Beaubier et al., 2014, Dufour et al., 2014]
- des bases de **solutions numériques pré-calculées** de problèmes mécaniques [Leclerc et al., 2009, Réthoré, 2010] peuvent également s'avérer utiles, surtout dans un contexte d'identification.

On voit ici un des grands intérêts que représente ce formalisme variationnel global de la corrélation d'images qui permet de transposer directement à la mesure certaines techniques d'approximations avancées (FEM, X-FEM, PGD, NURBS...) initialement développées en calcul des structures. Pour être tout à fait honnête, le pont ainsi établi entre simulation et mesure n'est pas à sens unique. En effet, des techniques d'approximations développées pour la mesure ont également été transposées avec succès au cadre du calcul des structures [Réthoré et al., 2010b] et [Passieux et al., 2011].

Un certain nombre de paramètres doivent cependant être considéré avec attention :

- **Le mouchetis**. Comme nous l'avons vu plus haut, l'opérateur de corrélation  $\mathbf{M}$  est symétrique défini positif si et seulement si le gradient de l'image  $\nabla f$  est suffisant. Ceci se traduit par le fait que la région imagée doit faire apparaître une texture (ou un mouchetis) aléatoire, isotrope, contrasté et adapté à l'échelle de la mesure. En effet, la taille moyenne des tâches d'un mouchetis, que l'on estime habituellement par une mesure de la taille de la figure d'autocorrélation, doit être autour d'une valeur de 4 pixels [Sutton et al., 2009]. La taille physique des taches dépend donc de la résolution des images, et donc de la résolution de mesure recherchée.  
En pratique, cette texture peut être le fruit de la microstructure de l'échantillon (notamment en CIV à partir d'images tomographiques), soit par dépôt de gouttelettes de peinture en spray (le plus souvent en CIN 2D), par marquage à la main, tampon encreur, par photolithographie, par impression laser directe. Quelques exemples de textures issues de la littérature sont présentés sur la figure 1.6. Les images étant souvent converties en niveaux de gris, l'usage de couleurs n'a pas encore fait l'objet de beaucoup d'études. Nous verrons, cependant, dans les chapitres suivants que les couleurs peuvent être très utiles dans certaines situations.
- **Distorsions des objectifs** la conservation des niveaux de gris telle qu'elle est écrite est perturbée par les distorsions de l'objectif. Ceci induit une incertitude de mesure additionnelle. Les distorsions n'ont pas un grand effet sur le champ de déformation, en revanche, elles peuvent être significatives pour la mesure de grands déplacements, ce qui est particulièrement pénalisant pour l'identification basée sur le champ de déplacement. On pourra alors soit utiliser un objectif télécentrique, soit corriger dans l'algorithme de corrélation ces distorsions [Yoneyama et al., 2006, Sutton et al., 2006, Lava et al., 2013].
- **Coût de calcul** Les méthodes subset conduisent à un système (1.16) diagonal par blocs donc hautement parallélisable. À l'inverse la corrélation éléments finis aboutit à un système couplé qui concerne toute la région d'intérêt. Ceci peut conduire à un coût de calcul non négligeable lorsque l'on recherche une mesure haute résolution. C'est d'autant plus clair lorsqu'on cherche l'échelle voxel en CIV [Leclerc et al., 2011].
- **Manipulation des images** L'interpolation des images est une des sources principales de l'incertitude de mesure. Mais elle peut également devenir une des sources principales de temps de calcul. Particulièrement en CIN-EF et CIV-EF ou l'interpolation se fait sur l'image entière avec de grandes quantités de données. On a accès aujourd'hui à des images tomographiques de taille 2000x2000x2000 voxels pour lesquelles la question du coût d'analyse est réelle.
- **Minimums locaux** Le problème de corrélation est mal posé, peu régulier et résolu par un algorithme

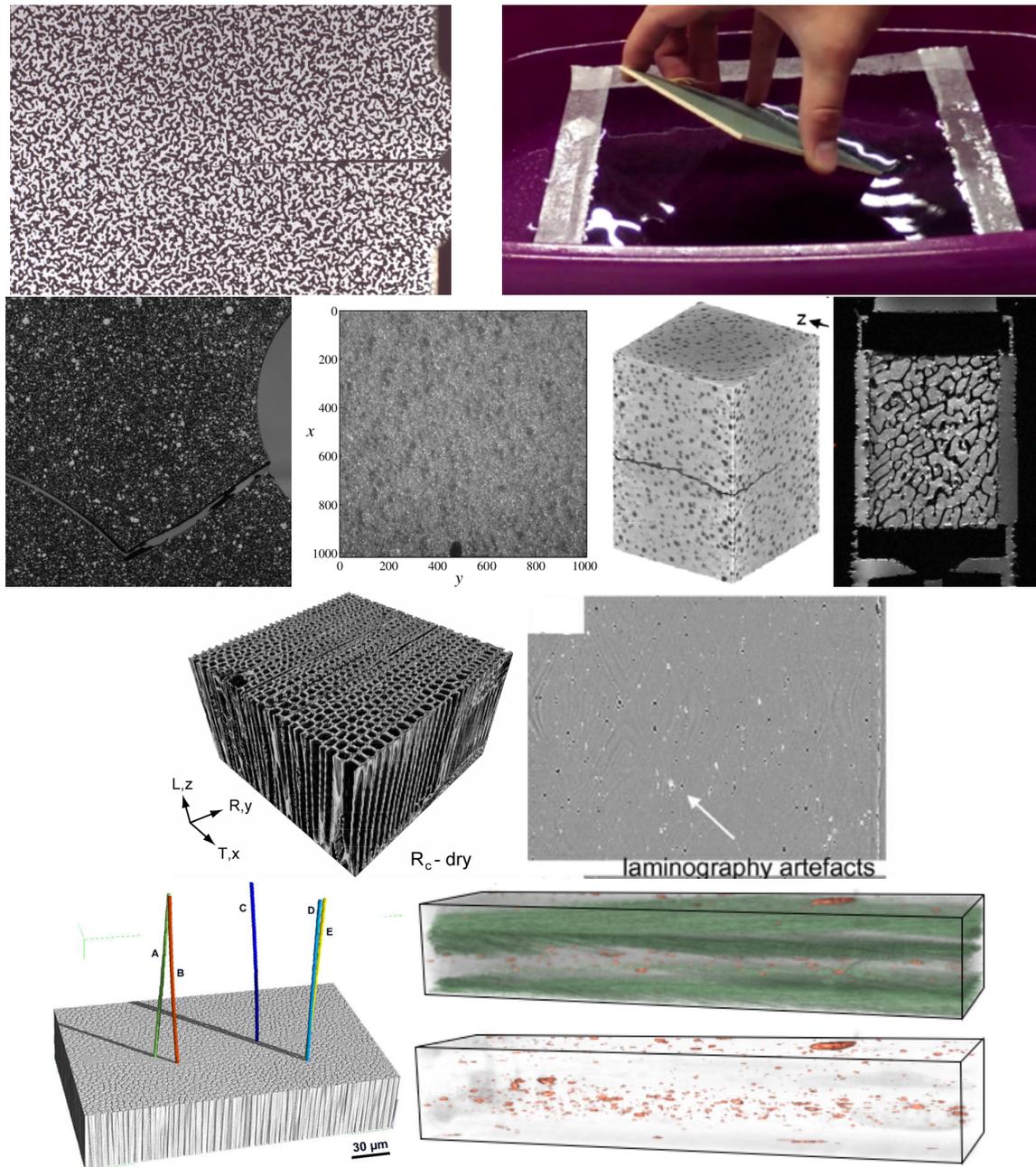


FIGURE 1.6 – Exemples de textures propices à la mesure CIN/CIV (en haut) et textures anisotropes ou peu contrastées pour lesquels la CIV reste un challenge. De haut en bas et de gauche à droite : (1) mouchetis déposé par imprimé laser à la surface d’une éprouvette en aluminium ; (2) mouchetis déposé par hydrographie [David, 2014] ; (3) mouchetis artificiel déposé à la surface de l’éprouvette en PMMA par peinture noir/blanc en spray ; (4) texture provenant de la rugosité naturelle d’un échantillon de SiC [Roux et al., 2009] ; (5) Texture naturelle d’une éprouvette fissurée de fonte à graphite sphéroïdale imagée par tomographie X en synchrotron, les nodules de graphite sont de très bons marqueurs [Rannou et al., 2010] ; (6) image IRM d’un os trabéculaire de boeuf, les travées osseuses sont très contrastées [Benoit et al., 2009] ; (7) Échantillon de bois imagé par tomographie X en synchrotron, la microstructure est contrastée, mais très anisotrope [Forsberg et al., 2008] ; (8) image laminographique sur éprouvette en alliage d’aluminium possédant une texture isotrope mais peu contrastée [Morgeneyer et al., 2013] pour laquelle une régularisation est indispensable [Taillandier-Thomas et al., 2014] ; (9) la microtomographie d’un matériau composite à fibres longues donne une texture très anisotrope [Requena et al., 2009] ; (10) qui peut être dopée par des particules d’opacifiant (ici  $\text{BaSO}_4$ ) pour améliorer la mesure CIN [Gomes Perini, 2014].

de type Newton. La question de minimums locaux et donc d'une bonne initialisation est primordiale en corrélation d'images numériques. Le plus souvent des approches mêlant de multiples résolutions et des filtres sont utilisées afin de fournir une approximation initiale pas trop éloignée de la solution.

- **Régularisation** S'agissant d'un problème mal posé, la corrélation d'images numériques a besoin d'être régularisée. La façon de régulariser des méthodes subset consiste à considérer un voisinage autour du point de mesure, ce qui introduit une longueur caractéristique. En éléments finis, c'est la taille des éléments qui introduit cette longueur. Nous évoquerons des techniques alternatives de la littérature qui permettent de dissocier le choix de cette longueur caractéristique de celui de la discrétisation spatiale du champ recherché.
- **Incertitudes de mesures** En corrélation d'images numériques, l'erreur aléatoire est prépondérante [Bornert et al., 2009, Wang et al., 2009, Sutton et al., 2009, Amiot et al., 2013]. Les sources d'incertitudes principales sont l'interpolation sub-pixel et le bruit capteur. En particulier, si l'on modélise le bruit capteur par un bruit blanc gaussien d'écart-type  $\sigma$ , on peut estimer que la perturbation  $d\mathbf{q}$  induite par le bruit sur le déplacement mesuré est corrélée et plus précisément, son noyau de corrélation est proportionnel à la matrice  $\mathbf{M}$  [Roux and Hild, 2006, Réthoré, 2010]

$$\langle d\mathbf{q} d\mathbf{q}^T \rangle = 2\mathbf{M}^{-1}\sigma \quad (1.17)$$

En pratique le bruit capteur n'est ni vraiment gaussien, ni vraiment de moyenne nulle et ceci se traduit par une incertitude sur le déplacement plus complexe [Sur and Grediac, 2014, Blaysat et al., 2015]. Ce résultat est toutefois intéressant car il permet d'estimer l'incertitude du champ de déplacement mesuré, et ce, degré de liberté par degré de liberté, lorsque le bruit capteur est la source principale d'incertitudes. Au-delà, les distorsions de l'objectif, une mauvaise qualité de mouchetis, un éclairage irrégulier, un reflet spéculaire [Poncelet and Leclerc, 2015], un mouvement de la caméra [Sur and Grediac, 2014], le flou de bougé en dynamique [Passieux et al., 2014], peuvent être également source d'incertitudes. Il existe des techniques permettant d'estimer les incertitudes de mesure principales en se basant sur des images synthétiques. La mesure étant souvent réalisée dans le but d'identifier des paramètres, la question de la propagation des incertitudes de mesure dans l'incertitude sur les paramètres identifiés est également de première importance.

**Bilan** La mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques semble être un outil de choix pour l'expérimentateur en mécanique des solides. Cependant, toutes les problématiques évoquées dans ce paragraphe doivent néanmoins être considérées si l'on souhaite continuer à en démocratiser l'usage. Chacune de ces problématiques sera évoquée tout au long du manuscrit et on apportera, dans la mesure du possible, des éléments de réponse.



# Réduction numérique de modèles

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Modèles réduits semi-analytiques</b>	<b>20</b>
1.1	Le suivi du mouvement de corps rigide d'un impacteur	21
1.2	Estimation directe des facteurs d'intensité des contraintes (FIC)	24
<b>2</b>	<b>Méthodes de bases réduites</b>	<b>34</b>
2.1	Constitution de la base réduite pertinente	35
2.2	Cas du flambage local de panneaux raidis	37
2.3	Cas de l'endommagement localisé	39
<b>3</b>	<b>Méthodes de séparation de variables - PGD</b>	<b>42</b>
3.1	Principe	42
3.2	Application à la mesure de champs	43

Les systèmes linéaires émanant de problèmes non linéaires de structures à grande échelle ou ceux issus des problèmes de CIN (non linéaire par nature) à partir d'images volumineuses, peuvent atteindre plusieurs millions voire plusieurs centaines de millions d'inconnues. Malgré les moyens de calcul actuels et les progrès dans les solveurs, l'espace mémoire et les temps d'assemblage et de résolution associés peuvent donc devenir incompatibles avec les délais de conception actuels. Plusieurs méthodes numériques ont été et sont encore développées pour répondre à cette problématique. Ce chapitre s'intéresse à la famille des méthodes de réduction de modèle.

Sous le terme de « méthode de réduction de modèle » se cache une grande variété de méthodes (numérique ou non) dont la définition peut varier selon les époques et selon les lieux. Il existe quatre grandes familles de techniques qui peuvent supporter ce qualificatif de « réduit » :

- Les **méthodes de type abaques** plus communément appelées surface de réponse, métamodèle, modèle de substitution ou d'estimation. Ce sont des méthodes qui consistent à résoudre le problème un certain nombre de fois, pour différents paramètres et à les encapsuler dans un graphique, dans une formule simple (loi d'échelle [Murphy, 1950], ou lois d'échelles étendues [Budinger et al., 2014]) ou dans une formule analytique plus complexe basée sur des séries polynomiales [Myers and Montgomery, 2002], du krigeage [Stein, 1999], des réseaux de neurones [Park and Sandberg, 1991], des fonctions à variables séparées [Chinesta et al., 2013]. Les coûts de construction de ces méta-modèles s'appuyant sur des résolutions successives, ne sont pas négligeables. Nous pourrions alors être tentés d'associer cette méthode à un autre type de réduction, comme par exemple utiliser une méthode de réduction de modèle par projection [Gogu and Passieux, 2013], de réinitialisation [Courrier et al., 2014] ou par séparation de variables [Chinesta et al., 2013] pour l'obtention d'une surface de réponse.
- Les **méthodes qui s'appuient sur des hypothèses mécaniques simplificatrices** pour réduire l'espace d'approximation. C'est le cas par exemple de l'hypothèse des contraintes/déformations planes et de l'hypothèse d'axisymétrie. C'est davantage le cas de la théorie des poutres, des plaques et coques qui présupposent une certaine cinématique dans l'épaisseur et qui aboutissent à la résolution d'une équation aux dérivées partielles différentes sur la fibre ou la surface moyenne. Ces modèles sont numériquement très efficaces et très largement utilisés dans l'industrie. En outre ils présentent l'avan-

tage d'avoir certaines dimensions (section ou épaisseur) comme paramètres, ce qui en phase de conception est un atout indéniable.

- Les **méthodes de type superéléments**, qui permettent de regrouper le comportement d'un certain nombre d'éléments dans un seul élément de type non standard, sont parfois qualifiées de méthodes de réduction de modèle. C'est principalement des méthodes basées sur la condensation statique et dynamique [Guyan, 1965]. L'idée consiste à condenser la matrice  $\mathbf{K}$  sur les degrés de liberté soumis à des conditions aux limites, ou sur les degrés de liberté de l'interface entre deux sous-domaines... degrés indicés  $b$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{q}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_b \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{K}_{bb} - \mathbf{K}_{bi}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{K}_{ib})}_{\tilde{\mathbf{K}}} \mathbf{q}_b = \underbrace{\mathbf{f}_b - \mathbf{K}_{bi}\mathbf{K}_{ii}^{-1}\mathbf{f}_i}_{\tilde{\mathbf{f}}} \quad (2.1)$$

Bien que cette technique paraisse séduisante, et même si elle présente l'avantage pour l'industriel de cacher un modèle élément fini stratégique dans une matrice condensée, elle s'avère vite limitée en pratique, puisqu'elle nécessite le calcul de l'inverse de  $\mathbf{K}_{ii}$  d'une part et qu'elle conduit à un système plein et parfois mal conditionné.

- Les **méthodes de réduction numérique** de modèle qui consistent à rechercher une approximation de l'inconnue **dans un sous-espace d'approximation de taille réduite**, souvent appelé espace d'approximation « grossier », par opposition à une approximation à base de fonctions de formes à support local, telle qu'en éléments finis, par exemple. On citera en premier lieu la méthode de Ritz qui consiste à introduire dans l'edp, une forme particulière de l'inconnue en choisissant des fonctions d'interpolation analytiques admissibles. Les méthodes de réduction de modèle par projection (en anglais *reduced basis*) consistent, quant à elles, à projeter le système linéaire issu d'une résolution éléments finis standards, sur une base réduite. Cette méthode générale englobe évidemment l'analyse modale, les bases réduites de type POD [Karhunen, 1943, Hotelling, 1933, Chatterjee, 2000, Krysl et al., 2001, Kunisch and Volkwein, 2002, Liang et al., 2002, Białecky et al., 2005, Ryckelynck, 2005] mais également certains algorithmes de réutilisation des sous-espaces de Krylov engendrés par certains solveurs itératifs [Rey and Léné, 1998, Gosselet and Rey, 2002, Gosselet et al., 2013]. Enfin, on évoquera également les méthodes de réduction de dimensionnalité basées sur la séparation de variables [Ladevèze, 1985b, Ladevèze, 1999, Ammar et al., 2006, Nouy, 2007][Ladevèze et al., 2010][Nouy, 2010, Chinesta et al., 2011, Bognet et al., 2012].

C'est à cette dernière catégorie que s'intéressera l'essentiel de ce chapitre. On détaillera des exemples de méthodes semi-analytiques de type Ritz dans la section 1, des méthodes numériques par projection sur base réduite dans la section 2 et des méthodes de réduction par séparation de variables dans la section 3. Nous tenterons, autant que possible, d'illustrer ces outils avec des applications en calcul de structures et en mesure de champs.

## 1 Modèles réduits semi-analytiques

Cette section montre l'intérêt que représente encore aujourd'hui une méthode de type Ritz en mécanique numérique et expérimentale des structures. En effet, la méthode de Ritz est une façon d'exploiter une connaissance analytique *a priori* que l'on a de la solution. On introduit l'inconnue dans la formulation variationnelle sous la forme :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

où cette fois les  $\boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{x})$  représentent un nombre réduit de fonctions analytiques connues admissibles et potentiellement globales sur  $\Omega$ . Ceci peut représenter plusieurs avantages :

- elle peut permettre de réduire considérablement l'espace d'approximation, donc de fait réduire la taille des opérateurs, puis *in fine* le coût de calcul.
- contrairement à la méthode des éléments finis pour laquelle, les degrés de liberté sont les déplacements des noeuds du maillage, les inconnues dans une méthode de Ritz contiennent une information globale. Nous montrerons qu'elles peuvent donc donner accès à une quantité mécanique d'intérêt comme par exemple la mesure de la vitesse de rotation d'un projectile [Passieux et al., 2014] et également la mesure ou la prédiction par le calcul des facteurs d'intensité des contraintes (FIC) et les FICs généralisés directement [Réthoré et al., 2010b][Passieux et al., 2011], sans post-traitement.
- dans le contexte de la mesure, la réduction de l'espace d'approximation sans réduire la description locale du champ inconnu est une excellente façon de régulariser le problème de corrélation d'images [Roux and Hild, 2006][Passieux et al., 2014]. On parle, dans la communauté de la mesure de « méthode de mesure intégrée ».

### 1.1 Le suivi du mouvement de corps rigide d'un impacteur

Une première application (voir [Passieux et al., 2014]) concerne le suivi par corrélation d'images numériques du mouvement de corps rigides d'un impacteur. Ce travail a été réalisé en réponse à une sollicitation de collègues de l'ICA à la recherche d'un moyen pour instrumenter l'impacteur du canon à air comprimé.

En effet, le contexte de cette étude est la prédiction des dommages de pales composites d'hélicoptères sous l'effet d'impact de grêle ou d'oiseaux. Les énergies en jeu sont importantes puisque la vitesse d'impact peut atteindre plusieurs centaines de mètres par seconde en raison de la vitesse de rotation du rotor. Des modèles spécifiques sont développés pour prédire l'endommagement et le délaminage [Talreja, 2008, Johnson et al., 2001, Guinard et al., 2002, Navarro et al., 2012, Fleming, 1999, Abrate, 1998]. Pour valider ces modèles, et éventuellement pour identifier certains paramètres du comportement, des essais en laboratoires sont réalisés sur canon à air comprimé, tel que celui que nous avons à l'ICA. Des techniques d'instrumentation *ad hoc* sont indispensables pour pouvoir tirer un maximum d'informations de chaque essai. Parmi les informations essentielles, celles concernant le mouvement du projectile (trajectoire, vitesse, rotation, accélération...) sont très difficilement accessibles à partir de la gamme des vitesses dites « moyennes », soit autour de  $100 \text{ m.s}^{-1}$ . En effet, l'impacteur est instrumenté par un accéléromètre [Castanié et al., 2008] pour des vitesses inférieures sur tour de chute par exemple. Des accéléromètres avec batterie et système d'acquisition peuvent également être embarqués lorsque l'impacteur a une taille suffisamment grande. Il peut être instrumenté par des techniques interférométriques type VI-SAR [Barker and Hollenbach, 1972] si des trajectoires sont particulières. Un pont de diode peut permettre de mesurer ponctuellement la vitesse préimpact.

Nous nous sommes proposé d'effectuer la mesure du mouvement de l'impacteur sphérique par corrélation d'images numériques 2D. Pour ce faire, l'essai est filmé avec une caméra numérique haute vitesse Photron APX-RS CMOS (à 36000 i/s). Compte tenu de la vitesse d'acquisition, la définition de l'image est limitée à  $128 \times 512$  pixels avec un bruit image significatif (pseudo gaussien d'écart type environ 2 niveaux de gris). Dans ces conditions il devient très délicat d'analyser les images avec un logiciel classique. Considérant la trajectoire du centre de l'impacteur plane, on se propose d'utiliser une base réduite à 5 modes correspondants aux projections dans le plan image de deux translations et trois rotations rigides de la sphère.

Avec des analyses *a priori* à partir d'images synthétisées, on peut montrer que les incertitudes de mesure sont acceptables [Passieux et al., 2014] et qu'une mesure basée sur les seules translations planes sur ou sous-estime la vitesse de façon rédhibitoire (voir figure 2.2). De plus, une démarche est proposée pour quantifier *a priori* le niveau des incertitudes de mesures à partir d'images réelles d'un tir à vide. Dans [Passieux et al., 2014], cette méthode est comparée à la mesure de vitesse initiale d'un pont de diodes, et montre que la différence entre les deux mesures est inférieure à l'incertitude. La dérivée première de la vitesse est également comparée au signal enregistré par un accéléromètre sur un essai en tour de chute basse

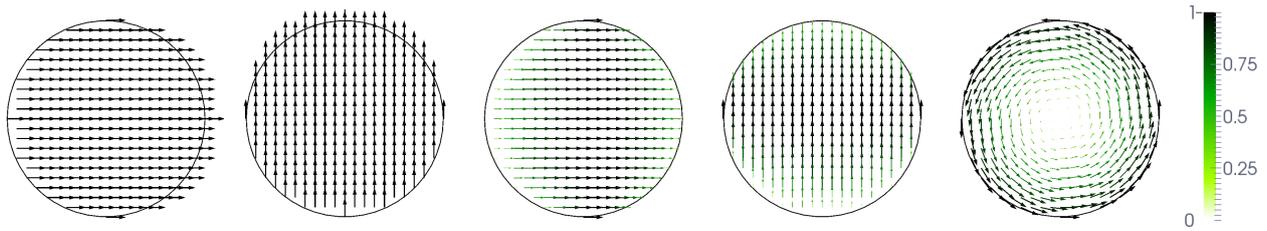


FIGURE 2.1 – Les cinq modes basés sur la projection dans le plan de deux translations (à gauche) et trois rotation de corps rigide (à droite).

vitesse et d'une autre technique d'analyse d'image (transformée de Hough [Hough, 1959]).

On illustre la méthode sur un essai d'impact frontal sur une cible cylindrique (censée représenter un bord d'attaque banalisé) en alliage d'aluminium connu (300mm de long et 18mm de diamètre). Pour cet essai, une bille en acier inoxydable (30mm de diamètre et 110g) est envoyée perpendiculairement à la barre à une vitesse initiale d'environ 70m/s ( $\approx 270$ J). Les positions mesurées de la bille sont affichées sur les images correspondantes sur la figure 2.2 à 10 instants temporels réguliers avant, pendant et après l'impact. Comme

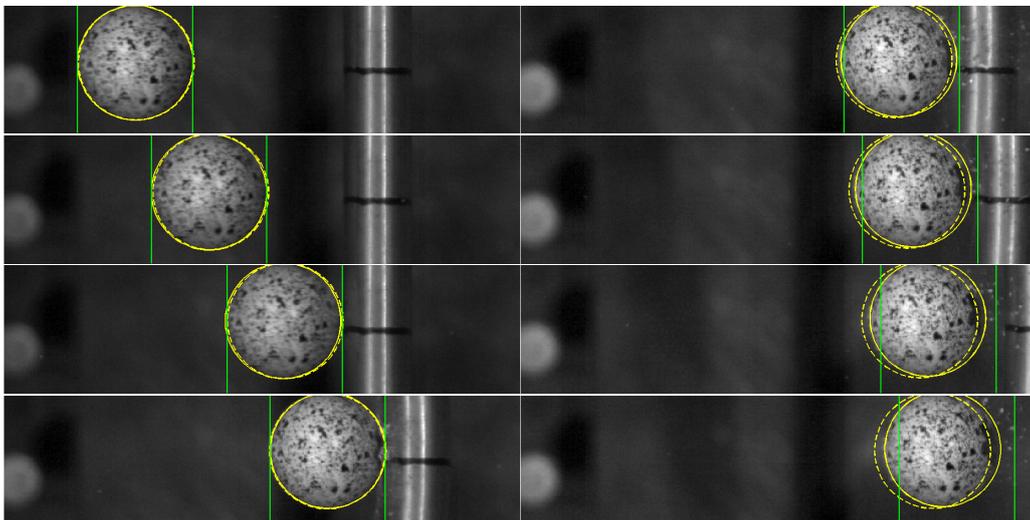


FIGURE 2.2 – Positions de la bille mesurées par la méthode de CIN proposée (trait plein) comparée à une technique basée purement sur la translation (en pointillés) et à une simulation numérique (lignes vertes) à 10 instants temporels réguliers durant 3.1ms

montré par l'analyse *a priori*, on peut constater que les positions estimées par la méthode proposée (en trait plein jaune) semblent plus pertinentes que les positions estimées par un algorithme basé sur les translations uniquement (en pointillés jaunes) plus classique [Lucas and Kanade, 1981]. Ceci est corroboré par de l'évolution des positions et vitesse angulaire dans les trois directions estimée par la méthode proposée et tracée sur la figure 2.3(haut) On peut en effet remarquer que la bille arrive avec une vitesse de rotation initiale non nulle autour de l'axe vertical de l'ordre de 5 à 10 tours par seconde. Après l'impact (zones symbolisées en vert), la rotation change de sens et s'accélère pour atteindre une vitesse de plus de 20 tours par seconde. Cette rotation se traduit par une sous-estimation de la vitesse horizontale avec une méthode basée sur les translations seulement.

Sur la figure 2.3(bas) sont représentés les évolutions de la vitesse et de l'estimation de l'effort d'impact, à partir de l'accélération et de la masse du projectile. La mesure est comparée à une simulation numérique conduite dans Abaqus Explicite avec un modèle élastoplastique de Johnson-Cook. On constate une très bonne corrélation entre les quatre impacts mesurés et ceux simulés. Dans [Passieux et al., 2014], on montre que les deux plus grands pics correspondent au retour élastique de la barre sur son premier mode de flexion

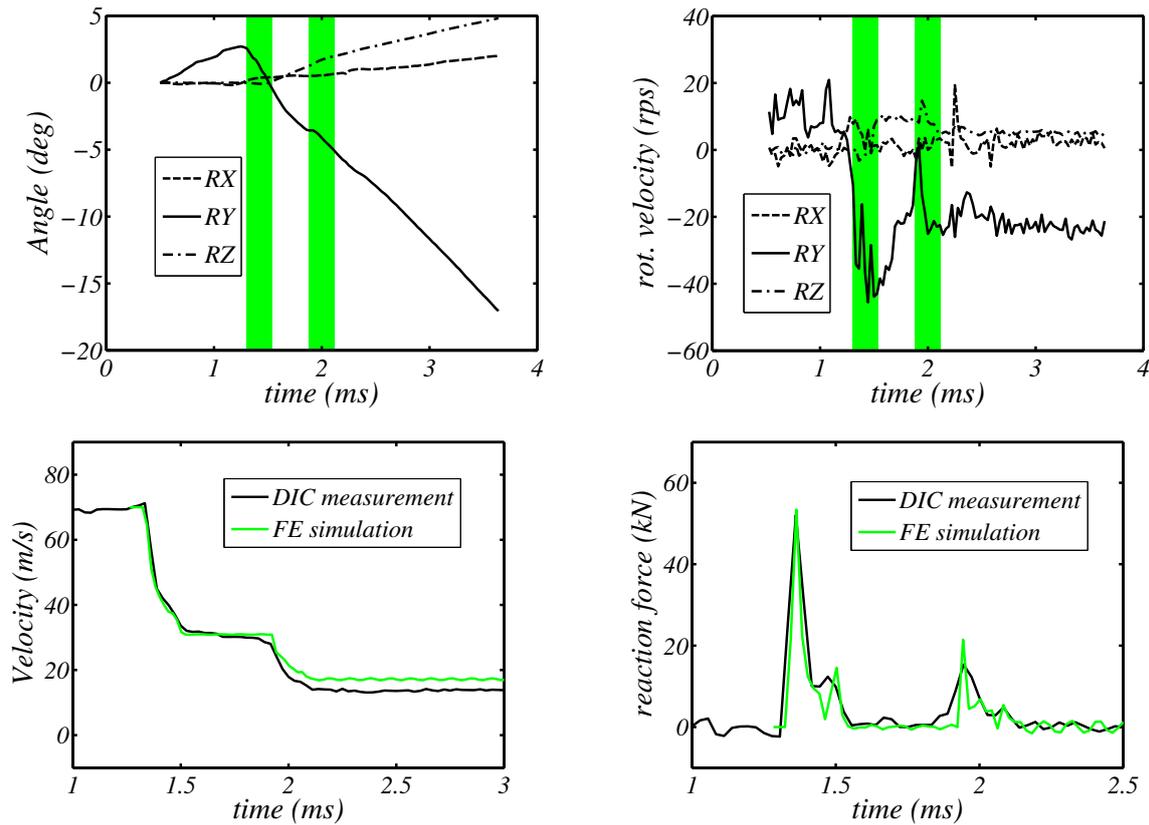


FIGURE 2.3 – Évolution des positions angulaires (à gauche) et des vitesses de rotations (à droite) pendant un impact frontal. Les bandes verticales correspondent à la zone de contact entre l'impacteur et la cible.

et les deux petits correspondent au troisième mode de flexion de la barre. Une mesure de l'intervalle de temps entre ces pics, permet de remonter à une estimation relativement précise des fréquences propres 1 et 3 de la barre.

**Remarque.** Bien que rudimentaire, cet outil est à disposition des membres du laboratoire. Il est utilisé pour l'instrumentation des essais sur le canon. Suite à la diffusion de ces travaux, cette technique a également été reprise et implantée dans un logiciel interne de Sandia National Laboratories par l'équipe de Phillip Reu pour des applications type "explosively driven events".

**Bilan** Bien que très réduite, une base de dimension 5 peut quand même s'avérer pertinente pour la mesure précise de quantités d'intérêt mécanique lorsqu'elle est basée sur la physique du phénomène. Outre les problèmes purement expérimentaux d'éclairage (avec reflet spéculaire) et d'écaillage de mouchetis, plusieurs améliorations pourront être apportées au niveau de la méthode d'analyse. Pour l'instant les images sont analysées deux à deux indépendamment. Nous pourrions, par exemple, imposer une interpolation au niveau temporel en s'appuyant sur une formulation spatio-temporelle du problème de corrélation [Besnard et al., 2011, Besnard et al., 2012b]. L'objectif est de restreindre davantage l'espace d'approximation afin de réduire encore les incertitudes de mesure. La définition de cette interpolation temporelle n'est cependant pas triviale, car l'évolution temporelle des signaux (vitesse / accélération) n'est pas régulière au moment de l'impact, et c'est justement la période d'intérêt. Une perspective d'évolution intéressante concerne également le passage à la stéréo corrélation d'images avec deux caméras rapides synchronisées [Reu and Miller, 2008, Reu, 2013] ou d'une seule caméra avec un système de miroirs [Besnard et al., 2012a]. Cette démarche pourrait permettre de remonter à la trajectoire 3D complète de l'impacteur et permettrait

surtout d'envisager de manière beaucoup plus générique des impacteurs de forme quelconques.

## 1.2 Estimation directe des facteurs d'intensité des contraintes (FIC)

Un deuxième exemple de méthode de Ritz avec des fonctions analytiques d'origine mécanique est l'utilisation du développement asymptotique en pointe de fissure donné par la mécanique linéaire élastique de la rupture. Cette double série permet d'extraire directement les facteurs d'intensité de contraintes (mais également le T-stress et les facteurs d'ordre supérieur) qui sont les quantités mécaniques sur lesquelles reposent un grand nombre de modèles de propagation de fissures [Paris et al., 1961, Chao and Reuter, 1997, Hutař et al., 2004]. L'usage de telles fonctions permet une mesure précise des FICs par corrélation d'images [Roux and Hild, 2006, Roux et al., 2009] mais aussi une prédiction directe de ces mêmes quantités par le calcul [Réthoré et al., 2010b][Passieux et al., 2011, Passieux et al., 2013b].

**Base réduite analytique** Nous considérons une fissure droite semi-infinie dans un milieu infini bidimensionnel élastique linéaire isotrope et homogène (module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$ ). Si les lèvres de la fissure sont libres, alors la solution  $\mathbf{u}_W, \underline{\underline{\sigma}}_W$  de ce problème soumis à un chargement quelconque à l'infini admet une expression analytique sous forme d'une double série dans le repère local centré sur la pointe de fissure en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  comme suit [Williams, 1957] :

$$\mathbf{u}_W(r, \theta) \equiv \sum_{i=I, II} \sum_{n=0}^{\infty} a_i^n \Phi_i^n(r, \theta) \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_W(r, \theta) \equiv \sum_{i=I, II} \sum_{n=1}^{\infty} a_i^n \Psi_i^n(r, \theta) \quad (2.4)$$

où  $a_i^n$  sont les coefficients de la combinaison linéaire et  $\Phi_i^n$  et  $\Psi_i^n$  les champs analytiques de référence :

$$\begin{aligned} \Phi_I^n(r, \theta) &= r^{n/2} \begin{bmatrix} \left( \kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \\ \left( \kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \end{bmatrix} \\ \Phi_{II}^n(r, \theta) &= r^{n/2} \begin{bmatrix} - \left( \kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \\ \left( \kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \cos \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \theta \end{bmatrix} \\ \Psi_I^n(r, \theta) &= \frac{n}{2} r^{n/2-1} \begin{bmatrix} \left( 2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta & \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \dots \\ \dots - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta & \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \end{bmatrix} \\ \Psi_{II}^n(r, \theta) &= \frac{n}{2} r^{n/2-1} \begin{bmatrix} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \dots & \left( 2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \\ \left( \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta & \dots + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \dots & \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \dots \\ \left( 2 + \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta & \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta - \dots & \left( \frac{n}{2} - 2 - (-1)^n \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta \\ \left( \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \theta & \dots - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \sin \left( \frac{n}{2} - 3 \right) \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

avec  $\kappa$  la constante de Kolossov égale à  $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformations planes et  $\kappa = ((3 - \nu)/(1 + \nu))$  en contraintes planes.

Une représentation graphique des modes  $n = 0$  à  $n = 3$  est donnée figure 2.4. On peut observer (voir [Roux et al., 2009]) que les modes impairs sont discontinus au passage de la fissure, tandis que les modes pairs sont continus. On peut également remarquer que les modes I et II à l'ordre  $n = 0$  correspondent aux translations rigides et le mode II à l'ordre  $n = 2$  correspond à la rotation de solide rigide. Les modes I et II à

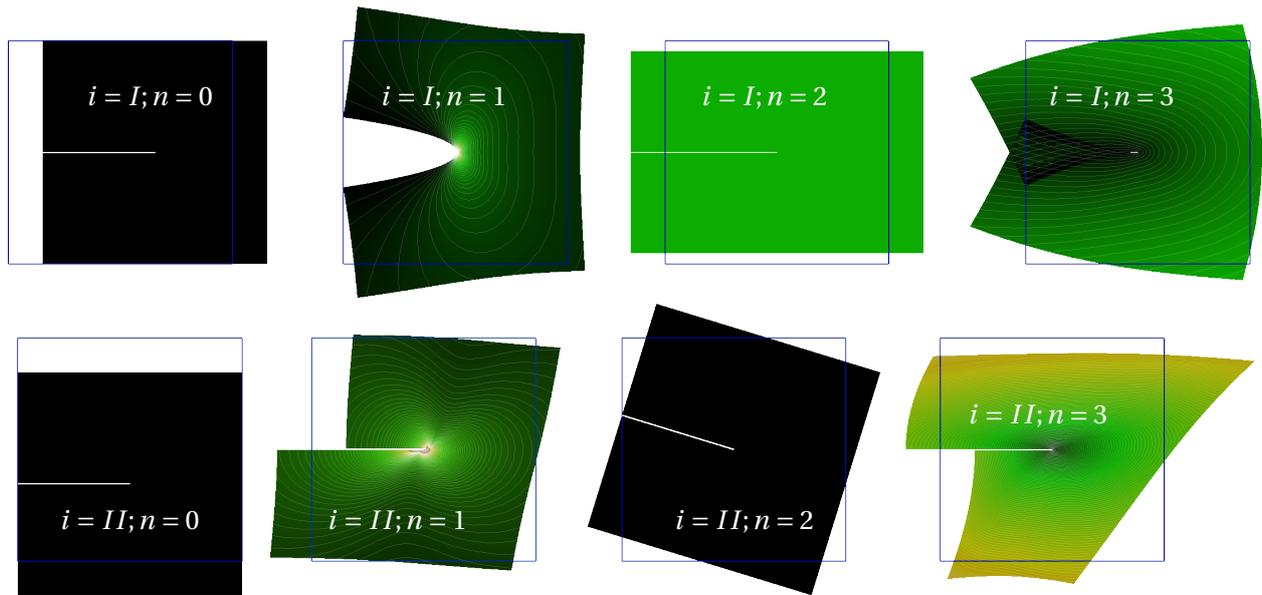


FIGURE 2.4 – Les premiers modes de la série de Williams déformés par le déplacement et colorés par le champ de contrainte équivalente de Von Mises.

l'ordre  $n = 1$  correspondent aux modes I et II classiquement utilisé en mécanique de la rupture et dont les coefficients  $a_I^1$  et  $a_{II}^1$  sont proportionnels aux facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ .

$$K_I = 2\mu\sqrt{2\pi} a_I^1 \quad \text{et} \quad K_{II} = 2\mu\sqrt{2\pi} a_{II}^1 \quad (2.5)$$

avec  $\mu$  le second coefficient de Lamé. Les termes d'ordre supérieur à  $n = 2$  sont dit *sub-singuliers* et correspondent à un effet à plus lointain permettant de décrire un chargement à l'infini plus complexe.

**Mesure robuste au bruit par CIN des FICs pour une fissure droite** L'estimation des paramètres de fissuration à partir de données expérimentales fait l'objet de nombreuses études. D'abord la mesure de la géométrie de la fissure et plus particulièrement l'estimation précise de la position du front de fissure est une tâche complexe. Différentes techniques normalisées existent telles que des méthodes électriques, celles basées sur la variation de compliance, et celle à la lunette optique (par l'oeil d'un opérateur). Des méthodes de marquage par surcharges permettent de remonter à la position de la fissure par analyse post-mortem, mais les surcharges modifient significativement le comportement en fatigue [Romeiro et al., 2004]. Ensuite, les facteurs d'intensité des contraintes (FIC) sont souvent estimés à l'aide d'un modèle élastique et de conditions aux limites représentatives (et souvent idéalisées). Si le modèle est numérique, ces paramètres sont estimés par des techniques de post-traitement décrites dans le paragraphe suivant. Pour plus de simplicité, les essais normalisés s'appuient souvent sur des modèles dont on a une solution analytique. En pratique, il est impossible d'appliquer expérimentalement les conditions aux limites de manière exacte. Les essais peuvent également être instrumentés par corrélation d'image numérique *subset* [McNeill et al., 1987, Sutton et al., 1999] ou globale [Roux and Hild, 2006, Réthoré et al., 2008a]. L'idée consiste à faire une mesure du champ de déplacement et estimer *a posteriori* les FIC par les mêmes méthodes qu'en simulation éléments finis, par projection [McNeill et al., 1987, Roux and Hild, 2006] ou par intégrales énergétiques [Réthoré et al., 2008b]. Dans [Roux and Hild, 2006, Hamam et al., 2007, Roux et al., 2009], les auteurs suggèrent d'utiliser cette base réduite directement pour mesurer le champ de déplacement d'une fissure droite au voisinage de la fissure. Une estimation précise de la position de la fissure est obtenue facilement sur la carte de résidu de corrélation d'image en faisant une première mesure à base d'éléments finis, par exemple. En effet les éléments finis imposent que le déplacement soit continu au niveau de la fissure, ce qui n'est pas

compatible avec les niveaux de gris. L'intérêt est que l'on voit donc apparaître clairement sur la carte des résidus la trace de la fissure (voir figure 1.5 au chapitre 1) et ce, ramené dans la configuration de référence. À partir de cette carte de résidu, une technique de détection de forme permet de se donner un maillage éléments finis [Réthoré et al., 2008a] ou B-splines [Réthoré and François, 2014] de la fissure, dans le cas où celle-ci n'est pas droite. La position de la pointe de fissure peut être estimée grâce à l'utilisation de termes *super-singuliers* habituellement inutiles du fait qu'ils correspondent à un déplacement infini en pointe de fissure [Hamam et al., 2007, Roux et al., 2009]. Cependant, en excluant une petite région où se concentrent les non-linéarités en pointe, il est possible de trouver suffisamment d'information pour activer ces termes. Ces termes sont utiles pour estimer la position équivalente de la pointe au sens des séries de Williams. Pour ce faire on cherche la correction de longueur de fissure  $\delta a$  afin d'annuler le terme super-singulier  $a_I^{-1}$ . Après linéarisation, on obtient [Hamam et al., 2007] :

$$\delta a = 2 \frac{a_I^{-1}}{a_I^1}$$

que l'on peut reconduire de manière itérative jusqu'à convergence. La démarche est illustrée en figure 2.5 sur un essai de propagation de fissure de fatigue en mode I sur une éprouvette en aluminium entaillée.

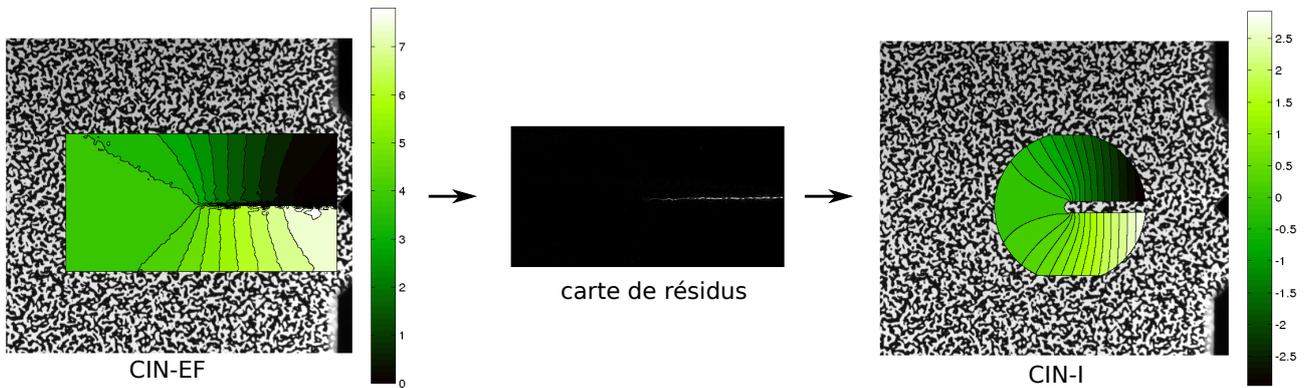


FIGURE 2.5 – Exemple de la mesure de position de pointe de fissure sur un essai CCT (Center Crack Tension Specimen) en mode I réalisé dans le cadre du stage de M2R de Julien Vignot.

**Simulation EF de la propagation de fissures en mode mixte avec extraction directe des FICs** Si la base réduite utilisée dans la section 1.1 a permis de mesurer des quantités difficilement accessibles jusque-là, l'objectif ici est davantage de simplifier l'implantation et l'utilisation des codes. En effet, cela fait de nombreuses années que l'on est capable de simuler la propagation d'une fissure en mode mixte en 2D dans un maillage élément fini de façon plus ou moins automatique [Barsoum, 1974, Ingrassia and Grigoriu, 1990, Bittencourt et al., 1996]. Cependant la communauté scientifique internationale a poursuivi l'effort pour développer des outils numériques de plus en plus simples à implanter, de plus en plus simples, robustes et rapides à exécuter pour l'utilisateur. Dans ce contexte, la méthode des éléments finis étendue X-FEM [Moës et al., 1999] a permis de faire un grand pas dans cette direction, en ce sens qu'elle permet de prendre en compte la présence d'une fissure dont la géométrie est incompatible avec le maillage éléments finis, tout en conservant une convergence EF classique.

**Remarque.** *X-FEM en deux mots : la prise en compte d'une connaissance (analytique ou numérique) a priori  $F(x)$  de la solution peut se faire grâce à la méthode de la partition de l'unité [Melenk and Babuška, 1996]. Cette méthode considère une base de fonction  $\phi_i$  formant une partition de l'unité sur  $\Omega$ , c'est-à-dire  $\sum_i \phi_i(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ . L'idée consiste alors à enrichir tous les noeuds (ou seulement*

ceux dont le support de la fonction de forme est concerné par cette connaissance a priori) de la manière suivante :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n q_i \phi_i(\mathbf{x})}_{\text{EF standard}} + \underbrace{\sum_{i \in \mathbf{I}_e} b_i \phi_i(\mathbf{x}) F(\mathbf{x})}_{\text{enrichissement}} \quad (2.6)$$

où  $\mathbf{I}_e$  sont les noeuds enrichis. Sur cette base la méthode des éléments finis étendus (X-FEM en anglais)

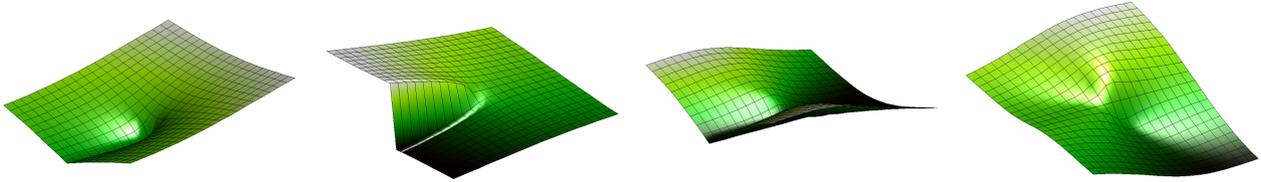


FIGURE 2.6 – Fonction asymptotiques singulières utilisées pour enrichir les noeuds proches de la pointe de fissure avec X-FEM en 2D.

[Moës et al., 1999] suggère d'ajouter comme fonctions d'enrichissements des fonctions analytiques capables de représenter la discontinuité du champ de déplacement de part et d'autre des lèvres de la fissure (à l'aide d'une fonction heaviside), mais surtout des fonctions issues du développement asymptotique en pointe de fissure pour représenter la singularité (voir figure 2.6), ce qu'une méthode éléments finis standard peine à capturer [Barsoum, 1974]. Une représentation graphique des fonctions d'enrichissement dans l'équation (2.6) est donnée sur la figure 2.7. La méthode des éléments finis généralisée (G-FEM en anglais) [Strouboulis et al., 2001]

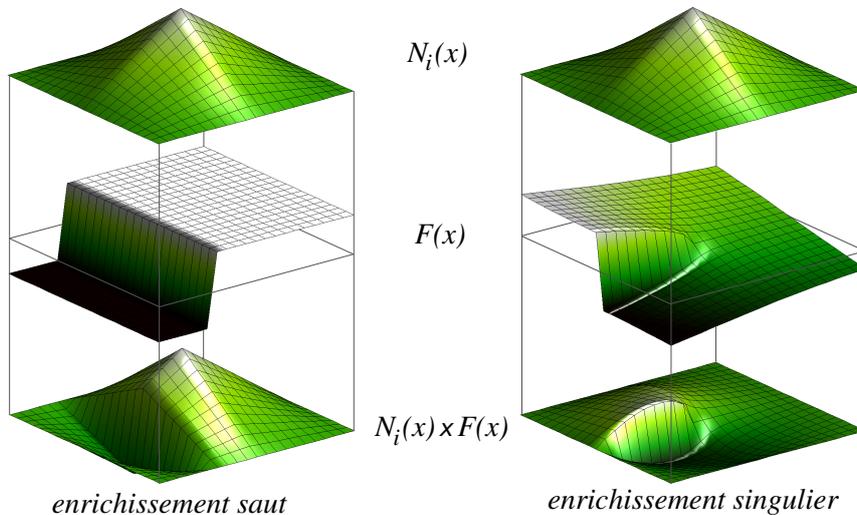


FIGURE 2.7 – Fonction de base éléments finis associé à un noeud connecté à quatre quadrilatères linéaires (en haut), fonction d'enrichissement (au milieu) et fonction d'interpolation résultant de leur produit (en bas). (Illustration inspirée de [Kim et al., 2010])

est formellement très proche d'X-FEM, à ceci près qu'elle fut initialement avec des fonctions d'enrichissement numériques pré-calculées.

Avec cette technique, on pourra alors très facilement enrichir une approximation éléments finis grossières par des fonctions beaucoup plus fines. Par exemple l'utilisation de fonction singulières dans X-FEM permet de réduire de près d'un ordre de grandeur la taille des éléments finis en pointe de fissure à précision équivalente en norme énergétique [Laborde et al., 2005]. Il faut prendre garde, toutefois, aux problèmes de conditionnement en partie dû aux éléments de transition [Chahine et al., 2008, Chahine et al., 2011] et au problème d'intégration, qui dans le cas d'une non-linéarité matérielle peut devenir important [Elguedj et al., 2006].

Avec l'avènement de maillages 3D performants, des méthodes efficaces de remaillage conforme à la fissure ont également été proposées [Chiaruttini et al., 2010] avec des versions hybrides incluant un enrichissement singulier X-FEM sur le front de fissure [Chiaruttini et al., 2011].

Malheureusement, ces méthodes ne permettent pas d'estimer suffisamment précisément les facteurs d'intensité des contraintes directement. Il est alors souvent nécessaire de passer par une étape de post-traitement, plus ou moins simple à implanter, qui permet de recalculer à partir du champ de déplacement les facteurs d'intensité des contraintes, soit par projection au sens des moindres carrés sur les modes singuliers, soit par des méthodes énergétiques type intégrale d'interaction ou forces configurationnelles (voir par exemple [Pereira and Duarte, 2005, Legrain et al., 2008]).

Des techniques d'enrichissements singuliers ont été proposées pour simuler la fissure tout en donnant un accès direct aux FICs. C'est ainsi que Karihaloo & Xiao [Liu et al., 2004] ont introduit une méthode type X-FEM (reposant sur la partition de l'unité [Melenk and Babuška, 1996]) avec un enrichissement spécifique en pointe basé sur les séries de Williams [Xiao and Karihaloo, 2003, Liu et al., 2004]. Cependant, même en désactivant les éléments finis standards au niveau de la pointe, on remarque qu'il y a une compétition entre degrés de liberté standards et enrichis qui fait que l'estimation que l'on obtient des facteurs d'intensité des contraintes n'est pas très précise et ne converge pas de façon optimale [Réthoré et al., 2010b]. Un autre type d'enrichissement en pointe alternatif à la partition de l'unité et appelé *Hybrid Crack Element* (HCE) a été proposé par Tong *et al.* [Tong et al., 1973]. Il consiste à retirer, autour de la pointe de fissure, quelques éléments d'un maillage éléments finis et à les remplacer par une distribution de contraintes normales issues des séries de Williams. Cette méthode a été étendue à l'estimation de termes d'ordre supérieur dans [Karihaloo and Xiao, 2001]. Cette dernière méthode permet d'estimer de façon très précise les facteurs d'intensité de contraintes et termes supérieurs.

Plus récemment, une méthode hybride analytique/X-FEM (HAX-FEM) a été développée avec ce même objectif [Réthoré et al., 2010b]. Cette méthode permet de coupler un modèle réduit analytique basé sur une troncature des séries de Williams autour de la pointe de fissure et un modèle X-FEM standard (avec enrichissement discontinu sur les lèvres de la fissure uniquement). Ces deux modèles continus sont couplés par la méthode Arlequin [Ben Dhia and Rateau, 2005], c'est-à-dire, en assurant la continuité du déplacement sur une zone de recouvrement sur laquelle les deux modèles se partagent l'énergie.

Nous avons proposé, dans le cadre de mon postdoc au LaMCoS, une version simplifiée d'HAX-FEM qui conserve cependant le même niveau de précision [Passieux et al., 2011]. Le domaine d'étude  $\Omega$  est décomposé en deux parties non recouvrantes  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$  auxquels sont associés des modèles respectivement X-FEM et analytique basé sur les séries de Williams (cf. figure 2.8). L'intersection des deux sous-domaines

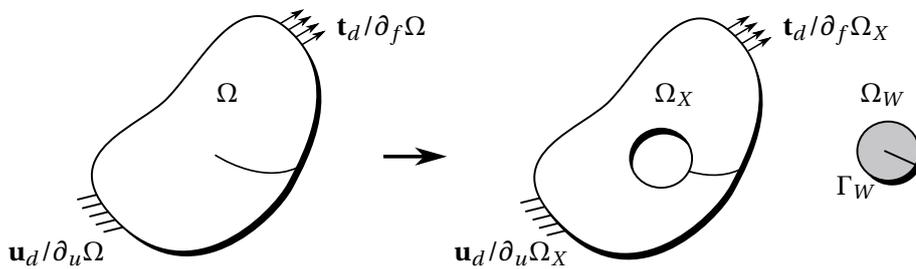


FIGURE 2.8 – décomposition du domaine en une partie élément fini (étendus ou compatibles) et en une partie analytique basée sur les séries de Williams autour de la pointe.

se réduit à une seule interface  $\Gamma_W$  (linéique en 2D). Sur chaque sous-domaine, le problème s'écrit indépendamment

$$a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = L_i(\mathbf{v}_i) \quad \forall \mathbf{v}_i \in \mathcal{Q}_i^0 \quad \forall i = X, W \quad (2.7)$$

En pratique,  $L_W(\mathbf{v}_i) = 0$  car les lèvres de la fissure sont libres. La continuité du déplacement à travers l'interface est assurée à l'aide d'un raccord intégral type Mortar [Bernardi et al., 1994, Ben Belgacem, 1999]. On

introduit pour ce faire un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}^1$  et la contrainte de continuité du déplacement est exprimée au sens du produit scalaire « travail sur l'interface » suivant :

$$\langle \mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma_W} \boldsymbol{\lambda} (\mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W) ds = 0 \quad (2.8)$$

La formulation a trois champs que l'on obtient est donc : Trouver  $(\mathbf{u}_X, \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{U}_X \times \mathcal{U}_W \times \mathcal{M}$ , tel que,  $\forall (\mathbf{v}_X, \mathbf{v}_W, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{U}_X^0 \times \mathcal{U}_W^0 \times \mathcal{M}$

$$a_X(\mathbf{u}_X, \mathbf{v}_X) + a_W(\mathbf{u}_W, \mathbf{v}_W) + \langle \mathbf{v}_X - \mathbf{v}_W, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Gamma} + \langle \mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W, \boldsymbol{\mu} \rangle_{\Gamma} = l_X(\mathbf{v}_X) \quad (2.9)$$

Après discrétisation, le système linéaire couplé s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_X & 0 & \mathbf{C}_X^T \\ 0 & \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ \mathbf{C}_X & -\mathbf{C}_W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_X \\ \mathbf{q}_W \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

dans lequel  $\mathbf{K}_X$  et  $\mathbf{K}_W$  sont les matrices de rigidité des domaines  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$  respectivement.  $\mathbf{f}_d$  est le vecteur des forces généralisées associé aux conditions de Neumann sur le domaine  $\Omega_X$ . Les vecteurs  $\mathbf{q}_X$  et  $\mathbf{q}_W$  collectent des degrés de liberté des deux domaines. Les opérateurs Mortar sont noté  $\mathbf{C}_i$  ; ils représentent l'intégrale du produit des fonctions de formes sur l'interface.

La méthode est illustrée sur le cas d'une plaque ( $\nu = 0.3$ ,  $E = 200\text{GPa}$ ) de longueur  $L = 17\text{mm}$  et de largeur  $w = 7\text{mm}$  soumise à un chargement de traction uniforme d'amplitude  $\sigma = 10\text{MPa}$ . La plaque a une fissure horizontale au centre, de longueur  $a = 3.5\text{mm}$ . Pour construire ce modèle hybride, on part d'un maillage du domaine complet. Le modèle analytique est défini par un ensemble d'éléments autour de la pointe, dans une région de rayon  $r_W$  (exprimé en nombre d'éléments pour plus de lisibilité). Ces éléments sont retirés du maillage pour construire le domaine  $\Omega_X$ . Le problème, le maillage et la solution en déplacement sont présentés sur la figure 2.9(a).

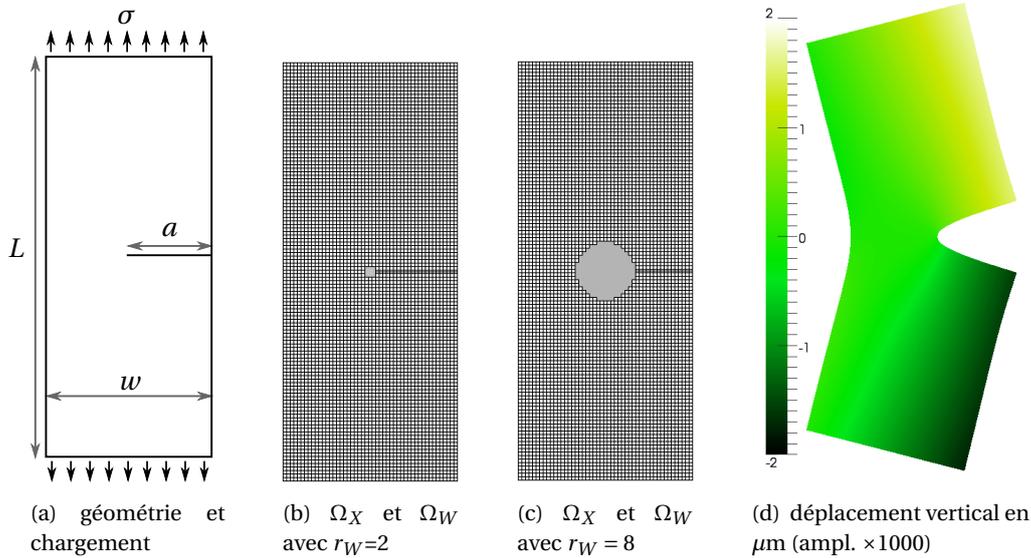


FIGURE 2.9 – Plaque fissurée en tension

Pour ce problème, une valeur analytique du facteur d'intensité en mode I, peut être calculé à partir du cas de la plaque infinie que l'on corrige par un facteur dépendant du rapport  $a/w$  [Bui, 1978]. Dans notre

1.  $M$  étant l'espace *ad hoc* que l'on choisira dans  $\mathbf{L}^2(\Gamma_W)$  même s'il peut être moins régulier en théorie car dans  $\mathbf{H}^{-1/2}(\Omega)$ . Il faut prendre soin de sa discrétisation, afin de vérifier la condition *inf-sup*. Sa discrétisation est discutée dans [Passieux et al., 2011].

cas,  $K_{I0} = 2.9637\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  sera considéré comme référence. L'évolution de la valeur de  $K_I$  normalisé par  $K_I^0$  est tracée sur la figure 2.10(gauche) en fonction de la taille du domaine analytique pour différentes valeurs de troncature des séries de Williams  $n_{max}$  avec le maillage tel que  $h/w = 2.04 \cdot 10^{-2}$ . La convergence de la méthode est donnée figure 2.10(droite). L'erreur par rapport à la valeur de référence est représentée en fonction de la finesse du maillage pour différentes valeurs de  $n_{max}$ , et pour une taille du domaine analytique de  $r_W = 2$ .

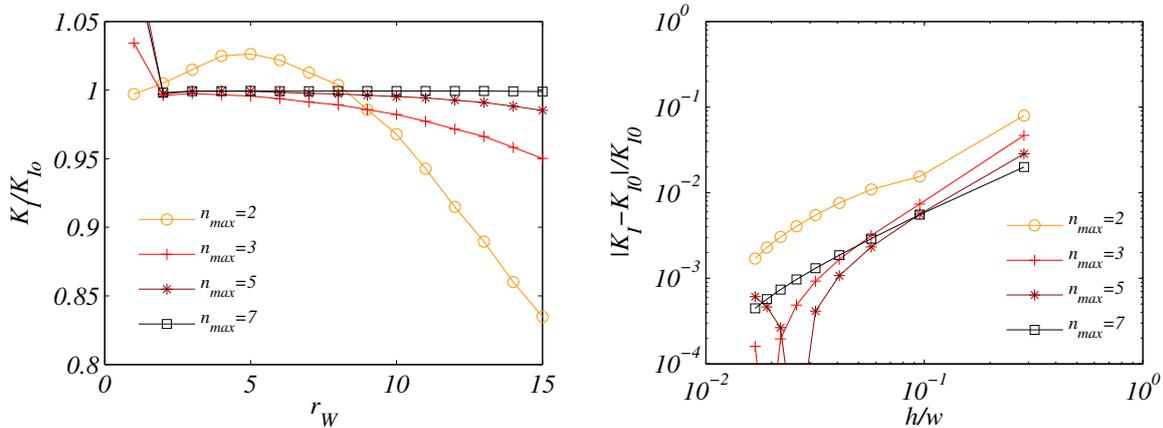


FIGURE 2.10 – Facteur d'intensité des contraintes en mode 1  $K_I$  en fonction du rayon  $r_W$  du domaine analytique (à gauche) et erreur relative par rapport à la référence  $K_{I0}$  en fonction de la taille sur maillage (à droite) pour différentes valeurs de troncature de la série  $n_{max}$ .

On retrouve le même taux de convergence (entre 1.5 et 1.25) que pour la méthode avec recouvrement [Réthoré et al., 2010b]. On montre également dans [Passieux et al., 2011] que cette méthode estime avec précision des termes d'ordre supérieur, jusqu'à l'ordre 5 avec un développement tronqué seulement à l'ordre  $n_{max} = 9$ . Bien qu'aussi précise, cette méthode est plus simple à implanter et également plus simple dans son utilisation, car deux paramètres que l'utilisateur devait choisir (la taille de la zone de recouvrement et la fonction de pondération) sont retirés. La méthode est très similaire à HCE. Elle peut être vue comme une version de l'HCE en déplacement. Le modèle analytique a, de ce fait, l'avantage de contenir directement les translations et rotations de corps rigide, alors que leur estimation *a posteriori* nécessite un post-traitement spécial avec HCE [Xiao and Karihaloo, 2007]. Le prix à payer est qu'il faut remplacer une intégrale sur l'interface avec HCE par une intégrale dans le volume. Comme nous le verrons plus tard, cette vision sans recouvrement est également plus simple à associer à un algorithme multigrille (voir Chap.3, section 1). Son extension à la mesure par corrélation d'images est également plus aisée pour le suivi de fissures non droites. C'est ce qui fait l'objet du paragraphe suivant.

**Mesure des facteurs d'intensité des contraintes pour une fissure curviligne** La mesure d'un champ de déplacement par corrélation d'images numériques en présence d'une fissure non droite peut poser des problèmes à une approche intégrée avec les séries de Williams telle que décrites plus haut. En effet elle repose sur une hypothèse de fissure droite, qui fait que l'on est tenté de réduire la taille du domaine d'intérêt pour que cette hypothèse soit valide. Bien évidemment, un développement en série pourrait également être construit pour une fissure courbe. Pour une question de généralité, et pour que l'approche reste utilisable dans le cas de fissures de formes vraiment quelconques, des approches basées sur la méthode X-FEM ont été proposées [Réthoré et al., 2007b, Réthoré et al., 2007a, Réthoré et al., 2008a, Réthoré et al., 2009]. Cependant, comme déjà dit plus haut, cette méthode ne permet pas d'avoir une estimation directe des FICs, et des techniques d'estimation *a posteriori* doivent être développées [Réthoré et al., 2005, Réthoré et al., 2008b, Réthoré et al., 2011].

Nous nous sommes proposés, à la fin de mon postdoc et à mes débuts à l'ICA, de combiner les

deux approches à l'image de ce qui est fait en simulation [Réthoré et al., 2010b, Réthoré et al., 2010c] et [Passieux et al., 2011, Passieux et al., 2013b]. Le domaine est décomposé en deux parties  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$  telles que sur la figure 2.8. On utilise un modèle éléments finis étendus ou éléments finis compatibles<sup>2</sup> pour le domaine complet. On retire alors comme en simulation un certain nombre d'éléments en pointe de fissure qui permettent de définir l'interface entre les deux domaines. Sur le domaine  $\Omega_X$  on utilise une méthode CIN-EF régularisée par la mécanique<sup>3</sup> et sur le domaine  $\Omega_W$  une méthode CIN-I type Williams, intrinsèquement régularisée par la mécanique. La continuité du déplacement à travers l'interface est assurée avec un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ . Contrairement à la simulation,  $\lambda$  n'a pas d'interprétation physique claire. Donc la continuité du déplacement peut être assurée, sans pour autant que les modèles mécaniques utilisés pour régulariser soient en équilibre. Il faut donc, en plus, assurer l'équilibre des modèles mécaniques de régularisation. Il est facile de construire l'opérateur linéaire  $\mathbf{L}_W$  qui, à tout vecteur  $\mathbf{q}_W$ , renvoie le vecteur des forces généralisées à l'interface  $\mathbf{L}_W \mathbf{q}_W$ . Il est tel que :

$$\mathbf{L}_W i_j = \int_{\Gamma} \phi_i^\lambda \mathbf{A} \varepsilon(\phi_j^W) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.11)$$

avec  $\phi^\lambda$  les fonctions de forme utilisées pour discrétiser  $\mathcal{M}$  et  $\phi^W$  les séries de Williams en déplacement.

Le problème consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathbf{u}_X^*, \mathbf{u}_W^*, \lambda^*) = \underset{\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \left( \lambda(\phi_W^2(\mathbf{u}_W) + \phi_X^2(\mathbf{u}_X)) + (1 - \lambda) \|\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{u}_X + \mathbf{L}_W \mathbf{u}_W\|^2 + \langle \mathbf{u}_X - \mathbf{u}_W, \lambda \rangle_{\Gamma} \right) \quad (2.12)$$

Après linéarisation et minimisation de (2.12), le problème consiste à résoudre un ensemble de systèmes linéaires du type : Trouver la correction  $\delta \mathbf{q}_X^k$ ,  $\delta \mathbf{q}_W^k$ ,  $\delta \lambda^k$ , telle que

$$\begin{bmatrix} \lambda \mathbf{M}_X + (1 - \lambda) \bar{\mathbf{K}}_X^T \bar{\mathbf{K}}_X & (1 - \lambda) \bar{\mathbf{K}}_X^T \mathbf{L}_W & \mathbf{C}_X^T \\ (1 - \lambda) \mathbf{L}_W^T \bar{\mathbf{K}}_X & \lambda \mathbf{M}_W + (1 - \lambda) \mathbf{L}_W^T \mathbf{L}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ \mathbf{C}_X & -\mathbf{C}_W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_X^k \\ \delta \mathbf{q}_W^k \\ \delta \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{b}_X^k - (1 - \lambda) \bar{\mathbf{K}}_X^T (\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{q}_X^k + \mathbf{L}_W \mathbf{q}_W^k) - \mathbf{C}_X^T \lambda^k \\ \lambda \mathbf{b}_W^k - (1 - \lambda) \mathbf{L}_W^T (\bar{\mathbf{K}}_X \mathbf{q}_X^k + \mathbf{L}_W \mathbf{q}_W^k) + \mathbf{C}_W^T \lambda^k \\ \mathbf{C}_X \mathbf{q}_X^k - \mathbf{C}_W \mathbf{q}_W^k \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{M}_{X,W}$  et  $\mathbf{b}_{X,W}$  les matrices de corrélation et second membres des domaines  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$ .  $\lambda$  est un paramètre scalaire de la méthode (pour plus de détails, voir la section 1 du chapitre 4)

Pour illustrer la méthode, nous considérons un exemple synthétique d'un mode I pur. Une image réelle (Fig. 2.11 (gauche)) de taille  $500 \times 500$  pixels est utilisée comme image de référence. Une image synthétique est générée<sup>4</sup> à partir de l'image de référence et du champ de déplacement correspondant à l'ouverture, en mode I, d'une fissure verticale de longueur 250 pixels dont la pointe se trouve au centre de l'image. L'amplitude est telle que le déplacement soit de l'ordre de grandeur du pixel. Le champ de déplacement correspondant est présenté sur la figure 2.11.

2. En effet, contrairement à la simulation, il est possible de détecter la forme finale de la fissure en faisant une première analyse des images à partir d'éléments finis standards comme expliqué dans la figure 2.5. L'utilisation d'une méthode éléments finis étendus n'est donc pas essentielle en mesure. Il suffit de construire un maillage éléments finis compatibles avec la forme finale et de « déboutonner » les noeuds.

3. La technique qui consiste à régulariser une mesure par un modèle mécanique fait l'objet de la section 1 du chapitre 4. En quelques mots, l'idée consiste à minimiser la somme de la fonctionnelle optique (distance quadratique de conservation des niveaux de gris) et d'une fonctionnelle mécanique (l'énergie potentielle élastique par exemple). Cette somme est pondérée par un paramètre scalaire  $\lambda$  qui donne plus ou moins de poids à l'une ou l'autre des deux fonctionnelles.

4. Il s'agit d'une équation de transport. C'est la même que celle utilisée pour calculer  $g(\mathbf{x} + \mathbf{u})$ . Ici on connaît  $f$  et on cherche  $g = f(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}))$ . Dans le cas d'un champ de déplacement inhomogène, et compte tenu du fait que le déplacement  $\mathbf{u}$  est connu dans la configuration de référence, il faudra faire attention à ce que  $\mathbf{x}_g = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})$  soit entier, puisqu'on cherche à construire  $g$  aux positions entières de pixels. On calculera donc un ensemble de positions  $\mathbf{x}$  à l'aide de quelques itérations d'un algorithme de Newton sur  $\phi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_g - \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$  [Réthoré et al., 2013]

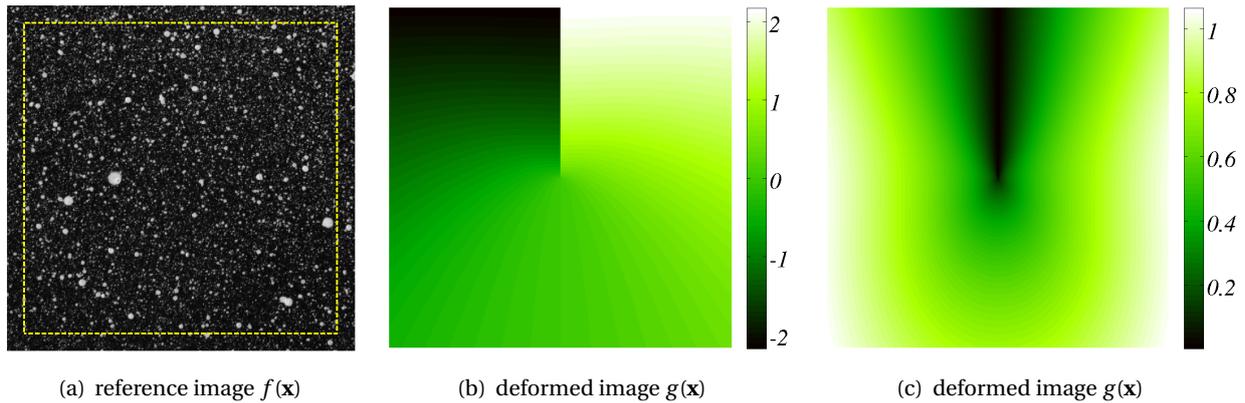


FIGURE 2.11 – Exemple d’une paire d’images en niveaux de gris

On positionne un maillage et on fait une erreur volontaire de 10 pixels sur la position de la pointe de fissure, par rapport à sa position réelle. L’objectif étant de voir avec quelle précision les méthodes estiment ce décalage. On positionne un maillage suffisamment fin sur l’image (la mesure étant régularisée, l’effet de la finesse du maillage devient mineur). Tous les éléments qui se trouvent dans un rayon de moins de  $r_W$  de la pointe de fissure sont retirés du modèle  $\Omega_X$  et servent à définir le domaine  $\Omega_W$ . L’interpolation du domaine analytique repose sur les séries de Williams de l’ordre -3 à 5. Un masque de 10 pixels de rayon est positionné sur la pointe de fissure pour les termes super-singuliers. La *mesure* est faite avec la méthode CIN-I basée sur les séries de Williams seulement, puis avec la méthode couplée. L’évolution de les valeurs adimensionnées des facteurs d’intensité des contraintes en mode I et II sont présentées sur la figure 2.12(a)(b)(c) pour CIN-I seule (en rouge) et la méthode couplée avec différentes valeurs de  $\lambda$ .

Sur les figures 2.12(a)(b), lorsque la taille du domaine analytique est suffisamment grande, l’estimation des FICS semble précise avec la méthode CIN-I seule (en rouge). En revanche, lorsque la taille du domaine  $\Omega_W$  se réduit et se rapproche de la taille du masque, l’estimation des FICs se dégrade. Au contraire, la méthode couplée fournit une estimation relativement stable, et ce quelle que soit la valeur de  $\lambda$ . Le domaine CIN-EF extérieur étant couplé de façon cinématique et statique, semble apporter suffisamment d’informations au modèle basé sur les séries de Williams. De même on trace sur la figure 2.12(c) l’estimation de la position équivalente de la pointe de fissure et on remarque également que le décalage de 10 pixels est identifié de manière plus stable avec la méthode couplée.

La même analyse est conduite à nouveau, mais en faisant varier cette fois-ci la taille du masque en pointe de fissure à taille de domaine analytique fixé ( $r_W = 64$  pixels). Cette fois, le paramètre de la taille du masque en pointe de fissure semble être un paramètre assez sensible pour la méthode CIN-I, tandis que ça n’est pas le cas de la méthode couplée. Bien entendu, cette analyse préliminaire devra être étendue au cas de fissures non droites, mais ces premiers résultats sont très encourageants. Un premier travail sur le sujet vient d’être publié très récemment qui permet de coupler une mesure éléments finis régularisée par la mécanique dont les degrés de liberté de noeuds du voisinage de la pointe sont projetés sur la base réduite de Williams [Réthoré, 2015].

**Bilan** Dans ce deuxième exemple d’approche de Ritz montre encore qu’avec une base réduite bien choisie, on peut obtenir plus d’informations qu’avec une approche plus générique type éléments finis et avec une plus grande précision, tant en simulation qu’en mesure de champ par corrélation d’images. L’espace d’approximation est réduit grâce à des hypothèses fortes sur la mécanique du champ mesuré et simulé. Le fait que la simulation et la mesure disposent d’un même formalisme permet d’envisager des méthodes de validation ou d’identification de modèle, en même temps que des façons de corriger des biais expérimentaux, tout ça grâce à une comparaison quantitative des champs mesurés et simulés

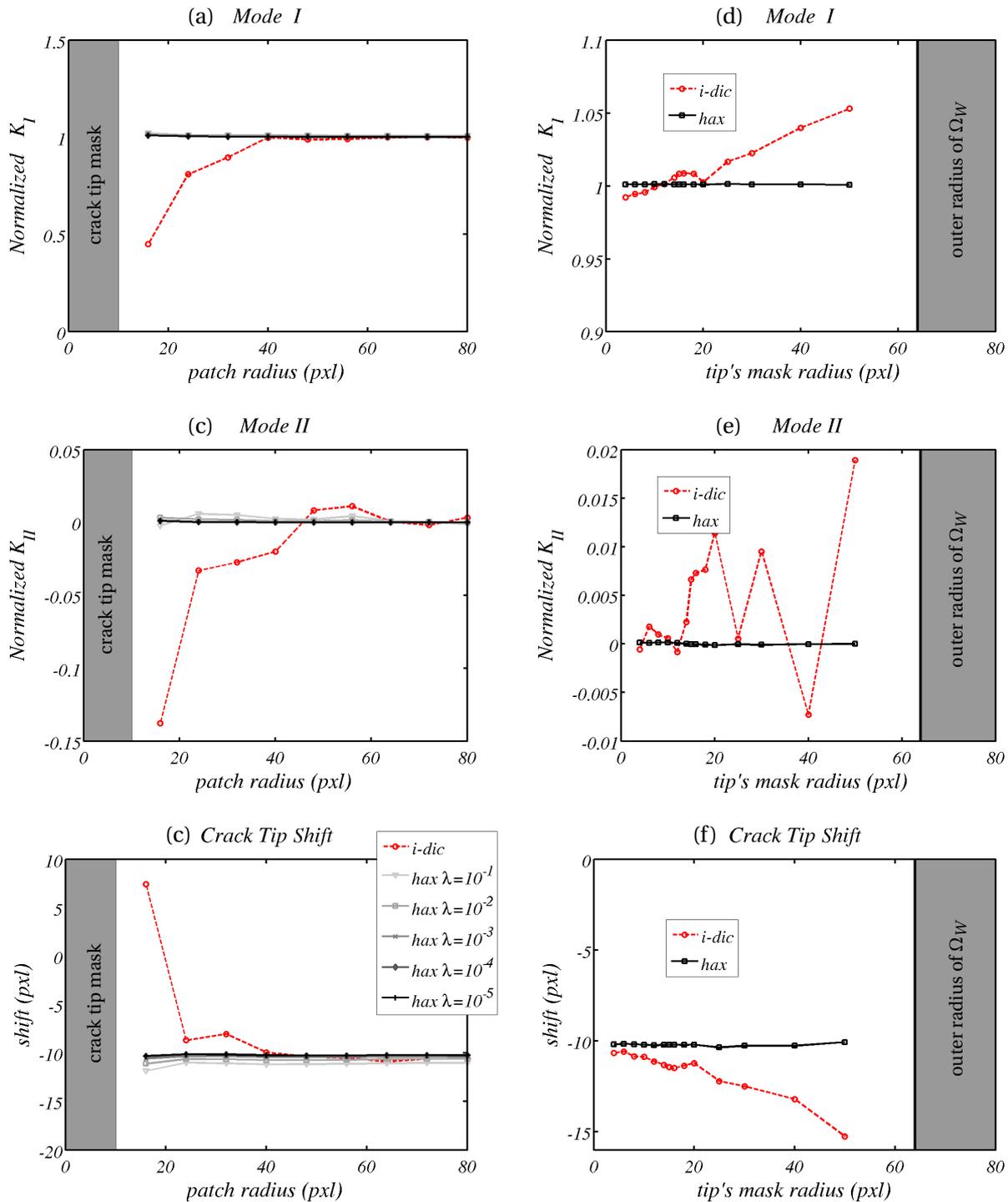


FIGURE 2.12 – Influence de la taille  $r_W$  du domaine analytique  $\Omega_W$  (à gauche) et de la taille du masque en pointe de fissure (à droite) sur la valeur normalisée du facteur d'intensité des contraintes en mode I (haut), du mode II (au centre) et sur l'estimation de la position de la pointe de fissure « *shift* » (en bas). Ces valeurs sont représentées pour la méthode CIN-I seule (*i-dic*) et avec la méthode couplée (*hax*) pour différentes valeurs du paramètre de régularisation  $\lambda$ .

[Roux-Langlois et al., 2015]. L'extension de la méthode X-FEM avec estimation directe des FIC au 3D, tant au niveau expérimental que numérique n'est pas directe puisque, malgré la présence de quelques études théoriques [Apel et al., 2008], les séries de Williams ne sont pas définies dans le cas général en 3D. Des travaux préliminaires ont été conduits dans la thèse de Clément Roux-Langlois [Roux-Langlois et al., 2015]. Le modèle analytique est basé sur les modes asymptotiques plans associés à une discrétisation unidimensionnelle (type éléments finis) le long du front de fissure. Cependant beaucoup de questions restent ouvertes (direction et vitesse de propagation, fissures débouchantes...). L'avantage est que, grâce à la corrélation d'images volumiques à partir d'images de tomographie X, on dispose aujourd'hui de données dans le volume et de distributions de FIC le long du front [Rannou et al., 2010, Lachambre et al., 2015]. Enfin, tous ces développements sont basés sur la mécanique linéaire élastique de la rupture et sont principalement utilisables dans le cadre de la propagation de fissures fragiles ou de fatigue dans des matériaux élastiques homogènes isotropes. Cependant cette méthode devrait pouvoir s'étendre au cas de matériaux anisotropes [Prabhu and Lambros, 2002], et hétérogènes [Liu et al., 2004]. Des développements asymptotiques existent également pour des fissures cohésives dans des matériaux quasi-fragiles avec [Xiao and Karihaloo, 2006] ou sans frottement [Karihaloo and Xiao, 2008]. On peut imaginer des extensions à plus ou moins long terme au cas de la dynamique transitoire [Freund, 1990] et au non linéaire [Hutchinson, 1968].

## 2 Méthodes de bases réduites

Lorsqu'une base réduite analytique n'est pas disponible pour un problème particulier, il est toutefois possible de construire une base réduite de fonction numériques pré-calculés en capitalisant sur l'expérience que l'on a d'un modèle. La différence avec les méthodes de Ritz de la section 1 réside essentiellement dans le fait que l'on dispose, cette fois, d'une connaissance numérique et non analytique de la physique. Le principe des méthodes de réduction de modèle par projection (ou méthodes de bases réduites) est donc encore de rechercher l'inconnue dans un sous-espace d'approximation de taille  $n_c$  (très) petite devant le nombre de degrés de liberté éléments finis  $n_{dof}$  du modèle initial. À partir d'une base de fonctions numériques connues et considérées comme représentatives, la solution est recherchée comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base. Cette base est décrite par les degrés de liberté d'une solution éléments finis souvent obtenue avec le même maillage. Ainsi, contrairement aux cas des bases analytiques qu'il faut intégrer numériquement, il suffit, ici, de projeter le système linéaire sur la base de vecteurs pré-existante. C'est pour ça que cette méthode s'écrit, le plus souvent, à partir de la formulation algébrique du problème (1.6).

Le sous-espace d'approximation est donc défini par la donnée d'une base de fonctions notée  $\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^{n_{dof}}$  qui permettent de définir la matrice  $\mathbf{C}$  dont les colonnes sont les  $\mathbf{c}_k$ .

$$\mathbf{C} = \left[ \begin{array}{c} [\mathbf{c}_1] \\ [\mathbf{c}_2] \\ \dots \\ [\mathbf{c}_{n_c}] \end{array} \right]$$

Une approximation de l'inconnue est alors recherchée sous la forme d'une combinaison linéaire de ces modes :

$$\mathbf{q} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}$$

où les degrés de liberté réduits  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{n_c}$  sont les coefficients de la combinaison linéaire. Le problème de la simulation 1.6 (ou de la mesure 1.16) est alors surdéterminé. On impose généralement la condition d'orthogonalité de Galerkin : le résidu  $\mathbf{r} = \mathbf{K} \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{f}$  doit être orthogonal à tout vecteur test  $\mathbf{v}$  appartenant à l'espace engendré par les vecteurs de la base réduite. Parfois le résidu est rendu orthogonal à une base réduite différente, on parle d'approche de type Petrov-Galerkin [Carlberg et al., 2011]. Ainsi le problème en projection sur la base réduite  $\mathbf{C}$  s'écrit dans le cas linéaire :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{K} \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^T \mathbf{f} \quad (2.14)$$

Dans le cas non linéaire, par linéarisation du résidu projeté, le problème tangent devient [Hurty, 1965, Krysl et al., 2001, Noor, 1980] :

$$\mathbf{C}^T \mathbf{K}_T \mathbf{C} \delta \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{C}^T \mathbf{r} \quad (2.15)$$

ou  $\delta \boldsymbol{\alpha}$  est l'incrément de l'inconnue réduite,  $\mathbf{K}_T$  la matrice de rigidité tangente et  $\mathbf{r}$  le résidu à l'itération courante.

Les systèmes projetés, étant de taille  $n_c \times n_c$ , sont *a priori* beaucoup moins coûteux à inverser que le système initial. Sans compter que la complexité de l'inversion d'un système n'est pas linéaire. Ce gain doit cependant être relativisé car :

- il reste toujours le coût de l'assemblage de l'opérateur et sa projection [Carlberg et al., 2011].
- le système obtenu est là encore potentiellement plein et donc plus coûteux à inverser qu'un système éléments finis qui a la propriété d'être creux.

L'erreur d'approximation par réduction de modèle peut être contrôlée *a posteriori* par :

$$e_{RM} = \frac{\|\mathbf{R}(\boldsymbol{\alpha})\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}$$

Dans la suite, on fera l'hypothèse que la précision de l'approximation dépend uniquement du choix de la base réduite et pas de l'erreur de discrétisation, bien qu'il soit possible de faire de l'adaptativité dans ce contexte [Carlberg, 2015].

## 2.1 Constitution de la base réduite pertinente

Jusqu'ici, la question du choix du sous-espace ou de sa base  $\mathbf{C}$  n'a pas été précisée et l'efficacité des méthodes de bases réduites en dépendent fortement. Il existe de nombreuses façons de construire une telle base. Les choix reposent sur la connaissance préalable que l'on a de la solution résultant d'une analyse modale, d'un ou plusieurs précalculs avec différents jeux de paramètres. Cette phase de construction est souvent appelée *offline* par opposition à la phase d'assemblage et de résolution du système projeté qui lui est dit *online*. Cette terminologie, issue du calcul en temps réel, s'explique par le fait que le coût de construction de la base peut être très conséquent, ce qui réduit considérablement l'intérêt de ces méthodes si cette construction n'est pas rentabilisée par la résolution de plusieurs systèmes *online* (pour plusieurs pas de temps, plusieurs jeux de paramètres...).

**Bases modales** En dynamique transitoire, on a très tôt eu recours à des bases réduites construites à partir d'une base modale tronquée [Rayleigh and Lindsay, 1877]. Ceci nécessite un calcul de valeurs/vecteurs propres dans la bande de fréquences d'intérêt en phase *offline*, seuls les modes utiles étant calculés. Le système temporel peut alors être résolu par projection sur les  $n$  premiers modes. L'intérêt de la base modale est qu'elle permet de prendre en compte toutes les déformations possibles de la structure. En ne s'intéressant qu'au bas du spectre, on ne conserve que les modes à plus haut contenu énergétique.

Hormis l'analyse modale de base, des techniques de réduction de modèle ont été proposées. Par exemple, il est possible d'améliorer le comportement haute fréquence en rajoutant des corrections statiques, voir par exemple [Dickens et al., 1997]. Il est également possible de (1) partitionner le domaine, (2) de condenser les degrés de liberté internes par condensation statique de Guyan et (3) utiliser une basse modale tronquée pour enrichir la condensation statique. C'est la méthode de Craig-Bampton [Craig and Bampton, 1968]. Ces méthodes ont également été étendues à la dynamique non linéaire, voir [Kerschen et al., 2009] par exemple.

**POD,SVD,PCA,KLD** Parmi les nombreuses possibilités proposées dans la littérature, la Proper Orthogonal Decomposition (POD<sup>5</sup>) a l'avantage de garantir une certaine optimalité. Cette technique nécessite la

5. la POD est n'est pas à proprement parlé une méthode de réduction de modèle, contrairement à l'amalgame qui est souvent fait dans la littérature. C'est davantage une façon de construire une base réduite à partir d'une information préexistante

connaissance au préalable d'une famille de  $n_s$  solution  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^{n_{dof}}$  du problème initial pour différentes valeurs de paramètres ou conditions aux limites. De même que  $\mathbf{C}$ , l'opérateur  $\mathbf{S}$  est construit à partir des vecteurs  $\mathbf{s}_k$ . Pour désigner cette famille, on parle souvent du *snapshot*, pour souligner le fait que cette donnée contient une image du modèle, c'est-à-dire de la fonction qui à un jeu de paramètres associe la solution du problème correspondant. Cette famille pourrait être utilisée directement en guise de vecteurs de base  $\mathbf{c}^k$ . Cependant, on préférera, *a minima* procéder à une orthonormalisation de Gram-Schmidt afin que le problème en projection (2.14) ne soit pas singulier. Cette procédure n'est pas optimale dans le sens où l'on n'est pas assuré d'aboutir à la base de taille la plus petite. Pour ce faire, la POD consiste à déterminer une base orthonormale  $\mathbf{c}^k$  de dimension  $n_c$  plus petite que  $n_s$  de telle sorte que la distance entre les espaces  $Im(\mathbf{C})$  et  $Im(\mathbf{S})$  soit minimale pour un nombre de vecteurs  $n_c$  donné. Ceci consiste à écrire que la base  $\mathbf{C}$  minimise la distance  $J_{n_c}$  entre le snapshot  $\mathbf{S}$  et sa projection orthogonale sur  $\mathbf{C}$  :

$$J_{n_c}(\mathbf{C}) = \|\mathbf{S} - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{S})\|_f^2 = \sum_{j=1}^{n_s} \left\| \mathbf{s}_j - \sum_{i=1}^{n_c} \mathbf{c}_i (\mathbf{c}_i^T \mathbf{s}_j) \right\|_2^2$$

sous la contrainte d'orthogonalité de  $\mathbf{C}$ . La norme matricielle  $\|\mathbf{C}\|_f^2 = tr(\mathbf{C}^T \mathbf{C})$  est appelée *norme de Frobenius*. On peut montrer [Kunisch and Volkwein, 2002] que minimiser  $J_{n_c}$  est équivalent à calculer la décomposition en valeurs singulières (SVD) <sup>6</sup> de  $\mathbf{S}$  qui, en pratique, revient à résoudre le problème aux valeurs propres de taille  $n_{dof} \times n_{dof}$  :

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^T \mathbf{c}_i = s_i^2 \mathbf{c}_i \quad (2.16)$$

avec  $s_i$  les valeurs singulières. Le problème (2.16) est souvent remplacé par le problème aux valeurs propres de taille  $n_c \times n_c$  suivant

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad \text{les vecteurs se déduisent par} \quad \mathbf{c}_i = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{S} \mathbf{v}_i \quad (2.17)$$

puisque souvent  $n_s < n_{dof}$ .

Le nombre maximal de vecteurs de base  $\mathbf{c}_i$  est égal au rang de  $r_s = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ . Évidemment, dans un contexte de réduction de modèle, l'ensemble des  $r_s$  vecteurs de base ne sont pas utilisés. Cette base est tronquée  $n_c < r_s$  et n'engendre donc plus exactement  $Im(\mathbf{S})$ . L'erreur associée peut être quantifiée par la mesure de la distance  $J(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n_c})$  dont on peut montrer [Kunisch and Volkwein, 2002] qu'elle est égale à la somme des carrés des valeurs singulières tronquées :

$$J(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{n_c}) = \sum_{i=n_c+1}^{r_s} s_i^2 \quad (2.18)$$

Ce résultat est un indicateur précieux, qui permet d'aider à choisir parmi les vecteurs propres de  $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$  les plus pertinents. En effet, on choisira seulement les vecteurs  $\mathbf{c}_i$  associés aux plus grandes valeurs singulières (en pratique, ceux tels que  $s_i / s_{max} > \varepsilon$ , avec  $\varepsilon$  un paramètre à fixer en fonction de la précision requise) car ils sont optimaux au sens de la norme de Frobenius. Souvent l'espace des solutions d'un problème pour des variations modérées des paramètres (forme, paramètres constitutifs, conditions aux limites...) a une structure assez simple. Cela se traduit par le fait que la décroissance des valeurs singulières est rapide. Cette compressibilité de l'espace d'approximation se quantifie avec la  $n$ -profondeur de Kolmogorov.

6. La POD est équivalente à la décomposition en valeurs singulières (SVD), mais aussi à la décomposition (ou transformation) de Karhunen-Loeve (KLD/KLT) et également à l'analyse en composantes principales discrète (PCA) [Liang et al., 2002]. Elle est encore connue sous le nom de transformation d'Hotelling, les modes quasi harmoniques ou encore les fonctions orthogonales empiriques. Les fonctions de base issues de cette décomposition se dénomment fonctions propres empiriques, fonctions de base empirique, fonctions orthogonales empiriques ou encore modes propres orthogonaux. Cette terminologie hétérogène s'explique par le fait que cette méthode a été utilisée, voire réinventée dans de nombreuses disciplines scientifiques, telles que l'analyse statistique de données expérimentales ou numériques [Hotelling, 1933, Karhunen, 1943, Loeve, 1955, Aubry et al., 1991], la géométrie différentielle, l'algèbre linéaire, la mécanique des fluides, l'acoustique, le traitement d'images, l'ingénierie biomédicale...

En phase *offline*, le snapshot doit être construit. Il correspond à la solution de problèmes pour un ensemble de points de l'espace paramétrique. Ces problèmes ne sont évidemment pas résolus de façon brutale. Une technique de construction type Glouton, permet de construire la base de manière itérative. Seuls les points de l'espace paramétrique pour lequel le modèle réduit actuel est insuffisant conduiront à un calcul exact. De plus, cet ensemble de points n'est pas parcouru de manière aléatoire. Pour plus d'efficacité, on lui associe un estimateur *a priori* qui permet d'identifier le prochain point dans l'espace paramétrique à utiliser pour enrichir la base [Barrault et al., 2004, Paul-Dubois-Taine and Amsallem, 2015].

**Adaptation de la base réduite en phase *online*** La stratégie *offline-online* décrite précédemment repose sur l'hypothèse que le système ne sortira pas du cadre établi à l'avance et que, dans la période *online*, on ne s'écartera jamais des frontières fixées dans l'espace paramétrique lors de la phase *offline*. Cependant, des méthodes d'enrichissement du modèle réduit « à la volée » ont été mises au point [Ryckelynck, 2002, Ryckelynck, 2005, Kerfriden et al., 2011][Kerfriden et al., 2012, Barrière et al., 2013]. L'idée est de permettre une phase d'enrichissement rapide en cas de défaillance du modèle réduit. Ceci a un intérêt pour les raisons suivantes :

- pour des applications d'optimisation et/ou des problèmes inverses, il peut arriver que l'optimisation conduise à des jeux de paramètres qui quittent les limites initialement fixées. Dans ce cas, une approche purement *offline-online* pourra être amenée à échouer. Une approche permettant de s'enrichir à la volée, apportera à l'approche une robustesse à l'utilisation qui est essentielle pour des applications industrielles.
- si le modèle réduit peut s'enrichir en phase *online*, cela peut permettre de réduire considérablement le temps de construction *offline* qui dans certains cas peut devenir excessif.
- une technique adaptative a également de l'intérêt pour alléger considérablement la phase de construction *offline* de la base réduite d'un modèle réduit *a posteriori*.

Bien que basées sur des outils similaires, entre les méthodes purement *offline-online* et celles décrites ici, il y a une différence conceptuelle. Pour les premières il s'agit d'une sorte de méta-modèle capable de résoudre des problèmes en un temps très rapide au prix d'une phase *offline* très longue et coûteuse. Ici l'objectif est davantage de construire un solveur rapide, avec une phase *offline* légère, voire inexistante. On parle aussi parfois de méthodes de réduction de modèle *a priori* [Ryckelynck, 2002, Ryckelynck, 2005].

Dans la suite, deux applications d'une stratégie de réduction de modèle *a priori* avec enrichissement à la volée sont présentées. La première concernant le post-flambement illustre le fait que l'enrichissement en phase *online* est une garantie qui permet de réduire considérablement la phase *offline* et donc de considérer en phase *online* un modèle très réduit à seulement un ou deux modes mécaniques bien choisis. La deuxième application à l'endommagement local montre que dans ce cas sévère, même avec l'enrichissement à la volée, la taille de la base augmente de manière déraisonnable si l'on utilise pas une technique de partition des inconnues en deux groupes selon que leur sensibilité aux paramètres est régulière ou non.

## 2.2 Cas du flambage local de panneaux raidis

Lorsque, pour un jeu de paramètres (ou incrément de calcul) la solution obtenue par le modèle réduit n'est pas satisfaisante au regard du critère  $e_{RM}$  par exemple, la base doit être enrichie. La façon la plus simple consiste à faire un calcul complet pour ce jeu de paramètres (ou incrément) de façon exacte avec le solveur éléments finis complet. On obtient donc un vecteur supplémentaire  $\mathbf{s}_{n_s+1}$  qui peut être utilisé pour enrichir la base  $\mathbf{C}$ , soit en l'orthogonalisant par rapport aux vecteurs de base  $\mathbf{c}_k$ , soit en recalculant une SVD à partir de  $\mathbf{S}$  augmenté de ce nouveau vecteur. Une façon plus subtile et moins coûteuse consiste à résoudre ce problème de façon très grossière avec un solveur itératif de type Krylov de façon orthogonale à la solution fourni par le modèle réduit [Kerfriden et al., 2011]. Cette correction étant  $\mathbf{K}_T$  orthogonale, peut être ajoutée directement à la base  $\mathbf{C}$ .

Comme dit plus haut, le fait de laisser à la base réduite la possibilité de s'enrichir à la volée

en phase *online* est une sécurité qui permet d'envisager des bases réduites de taille très petite. Pour le problème du post-flambement, il a été montré que des solutions analytiques ou semi-analytiques [Vescovini and Bisagni, 2012, Byklum et al., 2004] peuvent fournir des approximations de bonne qualité pour faire des analyses paramétriques ou des optimisations en phase de prédimensionnement. En particulier, en post-flambement, il est souvent fait l'hypothèse que le déplacement s'écrit comme la somme d'un terme proportionnel au mode de flambement linéaire et d'un terme correctif de faible amplitude et d'ordre plus élevé [Vescovini and Bisagni, 2012]. C'est ainsi que, dans le cadre de la thèse de Ludovic Barrière [Barrière, 2014], nous avons proposé d'utiliser une base réduite initiale bon marché construite dans cet esprit. Ainsi, outre un vecteur correspondant à la solution linéaire fondamentale  $\mathbf{q}_0$ , l'idée consiste à ne considérer que le premier mode de flambement linéaire  $\mathbf{q}_B$ . Ainsi la base réduite se réduit à deux vecteurs donc le cout de calcul associé est extrêmement réduit par rapport aux méthodes existantes [Barrière et al., 2013] :

$$\mathbf{C} = \left[ \frac{\mathbf{q}_0}{\|\mathbf{q}_0\|} ; \mathbf{q}_B \right]$$

Les corrections d'ordre supérieur sont, quant à elles, capturées par les corrections à la volée.

La figure 2.13 présente l'évolution des coefficients de la combinaison linéaire des vecteurs de la base réduite permettant de décrire la solution d'une plaque carrée raidie soumise à un chargement de cisaillement pour différents niveaux de chargement allant du domaine linéaire à près de trois fois la charge critique de flambement. On peut remarquer que le mode de flambement linéaire reste prédominant dans la description

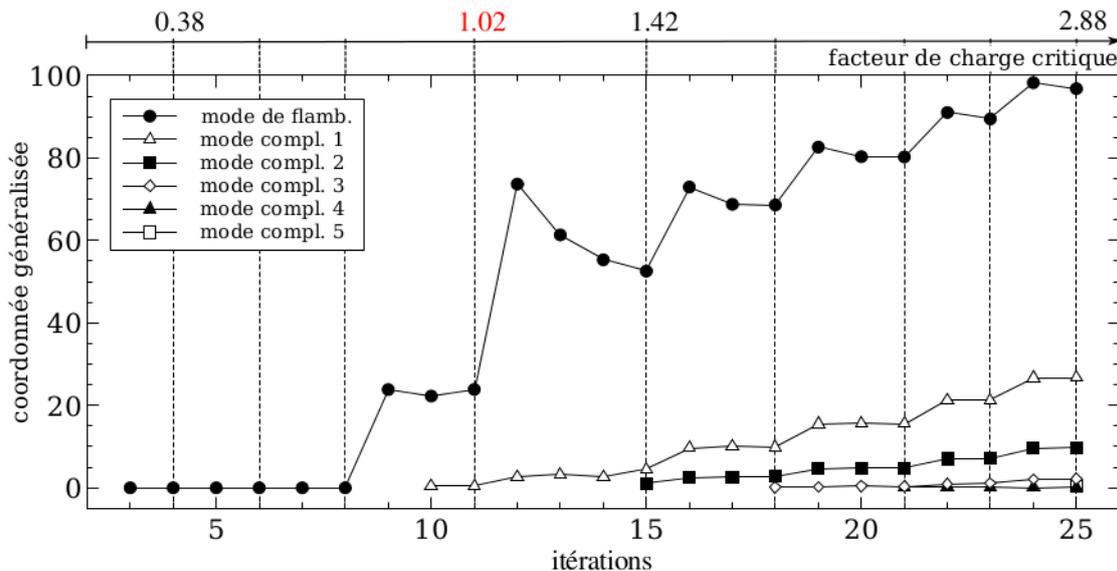


FIGURE 2.13 – Suivi des coordonnées généralisées de la partie hors plan du champ de déplacement au cours des itérations. Les lignes pointillées verticales représentent les incréments, exprimés en facteur de charge critique de flambement.

de la partie hors plan de la solution et ce jusqu'à 2.88 fois la charge critique de flambement. Il semble donc pertinent de l'inclure dans la base réduite initiale. La partie en membrane est quasiment exclusivement décrite par le mode fondamental [Barrière, 2014]. Les modes additionnels semblent également participer à la description de la solution postérieure à l'incrément pour lesquels ils ont été construits. Cela signifie qu'il est pertinent de les conserver dans la base, ce qui n'était pas évident *a priori*. Leur amplitude reste cependant faible, ce qui corrobore les observations de la littérature [Vescovini and Bisagni, 2012].

Il est intéressant de noter également qu'une base composée de seulement trois modes permet d'approximer la solution avec précision jusqu'à 1.42 fois le premier mode critique de flambement, ce qui d'un point de vue industriel est déjà intéressant.

### 2.3 Cas de l'endommagement localisé

Les problèmes de rupture fragiles ou quasi fragiles sont des applications pour lesquelles les méthodes de réduction de modèles classiques sont mises en échec. En effet, les méthodes par projection reposent sur une approximation globale du champ de déplacement. Ainsi, même les versions adaptatives [Ryckelynck, 2005, Kerfriden et al., 2011] peinent à déterminer la structure de l'espace des solutions lorsque la fissure (ou la non-linéarité locale) propage. Avec la robustesse que leur confère leur caractère adaptatif, elles sont capables de prédire le comportement et d'aboutir à une solution précise, mais elles conduisent à une base plus vraiment réduite qui fait qu'elles perdent leur efficacité. Une méthode originale appliquée au cas de la rupture fragile permet de tirer parti de l'autosimilarité de la solution en pointe de fissure [Galland et al., 2011]. En effet, dans le repère associé à la pointe de fissure, la singularité évolue de manière beaucoup plus régulière que dans le repère global. La méthode consiste donc à utiliser le morphing de maillage, afin de déplacer le maillage avec la propagation de la fissure. La solution est auto-similaire et le modèle réduit efficace. Pour aller plus loin, on pourrait également associer au problème de morphing un deuxième modèle réduit.

Dans le cadre d'une collaboration avec Pierre Kerfriden et Stéphane Bordas (de l'Université de Cardiff, à l'époque), nous avons utilisé une méthode de réduction de modèle, dans les parties du domaine « faiblement non linéaires » pour lesquelles un modèle réduit est pertinent, tandis que le reste du domaine est résolu exactement [Kerfriden et al., 2012]. Le problème est donc projeté seulement partiellement sur la base réduite. La figure 2.14 illustre cette stratégie dans le cas de l'endommagement localisé d'une structure en treillis soumis à un chargement localisé au milieu du plancher à deux incréments de chargements différents. Nous obtenons donc un modèle hybride où la zone à forte non-linéarité (en noir) est conservée et donc résolue de façon exacte, alors que le reste du domaine (en vert) est recherché en projection sur la base réduite.

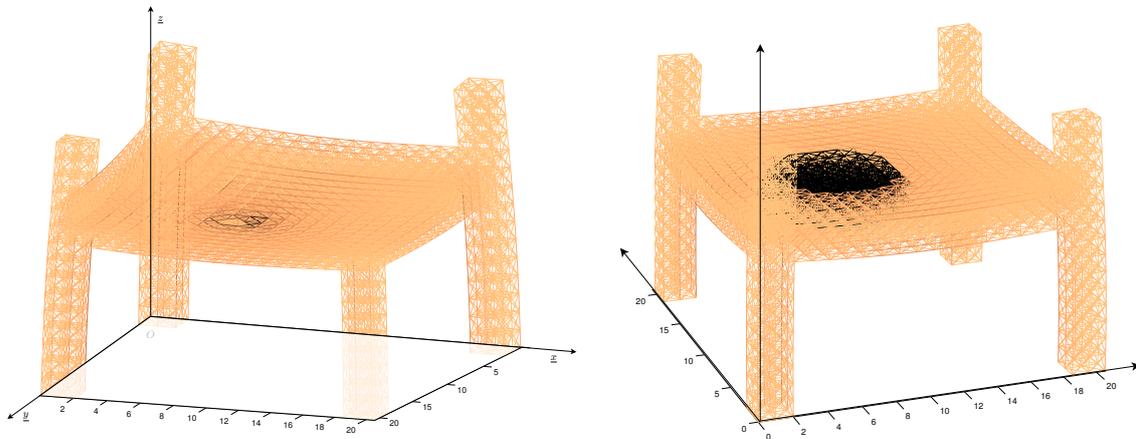


FIGURE 2.14 – Exemple d'une structure en treillis endommageable. À gauche : Endommagement localisé sous le chargement à droite (plus l'endommagement d'une barre est proche de 1, plus la couleur est foncée). À droite décomposition du domaine en partie locale et globale (on représente en noir les éléments dont l'un des noeuds n'est pas réduit)

Techniquement, le principe de la stratégie locale/globale est de séparer le vecteur des inconnues nodales en deux parties, l'une d'entre elles seulement étant recherchée sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{c}_k$  de la base réduite. Soit  $\widetilde{\delta\mathbf{q}}$  une re-numérotation du vecteur correction inconnue  $\delta\mathbf{q}$  (taille  $n_{dof}$ ) de manière à regrouper les  $n_r$  degrés de liberté réduits (indiqué  $r$ ) et les  $n_t$  résolus totalement (indiqué  $t$ ) :

$$\widetilde{\delta\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\delta\mathbf{q}}_r \\ \widetilde{\delta\mathbf{q}}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{E}_f \end{pmatrix} \delta\mathbf{q} \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{E}_r \in M_{n_r, n_{dof}}([0, 1])$  et  $\mathbf{E}_t \in M_{n_t, n_{dof}}([0, 1])$  sont des opérateurs booléens qui permettent de sélectionner les degrés de liberté réduits et résolus totalement, à partir d'un vecteur de taille le nombre d'inconnues nodales total  $n_{dof}$ . À l'inverse, on peut revenir à la numérotation initiale par :

$$\delta \mathbf{q} = \mathbf{E}_r^T \widetilde{\delta \mathbf{q}}_r + \mathbf{E}_t^T \widetilde{\delta \mathbf{q}}_t \quad (2.20)$$

La partie dite réduite de l'incrément de solution est donc recherchée sous forme d'une combinaison linéaire de la base réduite globale :

$$\widetilde{\delta \mathbf{q}}_r = \mathbf{E}_r \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (2.21)$$

dans lequel  $\boldsymbol{\alpha}$  sont les coefficients de la combinaison linéaires appelés degrés de liberté réduits. En revanche, tous les degrés de liberté  $t$  sont conservés. L'incrément de déplacement est donc recherché sous la forme d'une combinaison linéaire d'une base hybride  $\mathbf{A}$  :

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_r \mathbf{C} & \mathbf{E}_t^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \delta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\alpha} \\ \widetilde{\delta \mathbf{q}}_t \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

avec le projecteur sur les degrés de liberté réduits  $\mathbf{P}_r = \mathbf{E}_r^T \mathbf{E}_r$ .

Il suffit alors de résoudre le problème tangent en projection (2.15) sur  $\mathbf{A}$ , ce qui, en développant, donne le système linéaire suivant [Kerfriden et al., 2012] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{P}_r \mathbf{K}_T \mathbf{P}_r \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{P}_r \mathbf{K}_T \mathbf{E}_t^T \\ \mathbf{E}_t \mathbf{K}_T \mathbf{P}_r \mathbf{C} & \mathbf{E}_t \mathbf{K}_T \mathbf{E}_t^T \end{pmatrix} \delta \mathbf{x} = - \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{P}_r \\ \mathbf{E}_t \end{pmatrix} \mathbf{r} \quad (2.23)$$

**Remarque.** Cette technique de projection partielle est très générale et certainement pas limitée au cas d'une séparation d'inconnues locales/globales. Par exemple, elle a été également utilisée dans [Gogu and Passieux, 2013] pour séparer les bases réduites selon les différentes directions de l'espace : une base réduite par dimension. Ceci peut s'avérer parfois utile, en particulier ici pour la construction d'une surface de réponse.

En pratique, dans ce cas, le système hybride (2.23) est condensé sur les degrés de liberté résolus totalement  $\widetilde{\delta \mathbf{q}}_t$  (cf. eq. (3.23)). Ce problème est ensuite résolu par un solveur itératif de Krylov car il s'appuie uniquement sur des produits entre le complément de Schur et le résidu condensé projeté. Ceci conduit donc seulement à l'inversion de plusieurs systèmes linéaires associés à l'opérateur  $\mathbf{C}^T \mathbf{P}_r \mathbf{K}_T \mathbf{P}_r \mathbf{C}$  sans nécessiter le calcul explicite de son inverse, tel que c'est fait en décomposition de domaine [Farhat and Roux, 1991, Mandel, 1993]. Cependant, cet opérateur étant, dans ce cas, de taille très réduite, son inverse peut également être calculée de façon explicite, sans que cela impacte l'efficacité numérique de la méthode.

L'intérêt de faire cette partition degrés de liberté réduits/résolus exactement est double :

1. Même avec une stratégie purement *a posteriori*, en excluant la zone où se concentrent les non-linéarités, on montre que l'espace des solutions pour différentes positions de la charge est de taille plus réduite. Par exemple, on trace sur la figure 2.15(gauche) la décroissance des valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{S}$  des snapshots issue de la résolution d'un seul problème avec le chargement situé au centre du plancher (en noir), ou pour deux résolutions avec deux positions différentes mais voisines du chargement (en gris). À chaque fois, les valeurs singulières sont calculées avec (trait plein) et sans (trait pointillé) la zone d'endommagement local. On remarque que les valeurs singulières décroissent beaucoup plus vite lorsqu'on retire cette zone locale.
2. Avec une stratégie *a priori*, avec enrichissement à la volée, le nombre de corrections globales nécessaires pour enrichir la base réduite est grandement diminuée avec la méthode de projection locale/globale (en vert) par rapport à une méthode de réduction de modèle globale (en bleu), voir figure 2.15(droite).

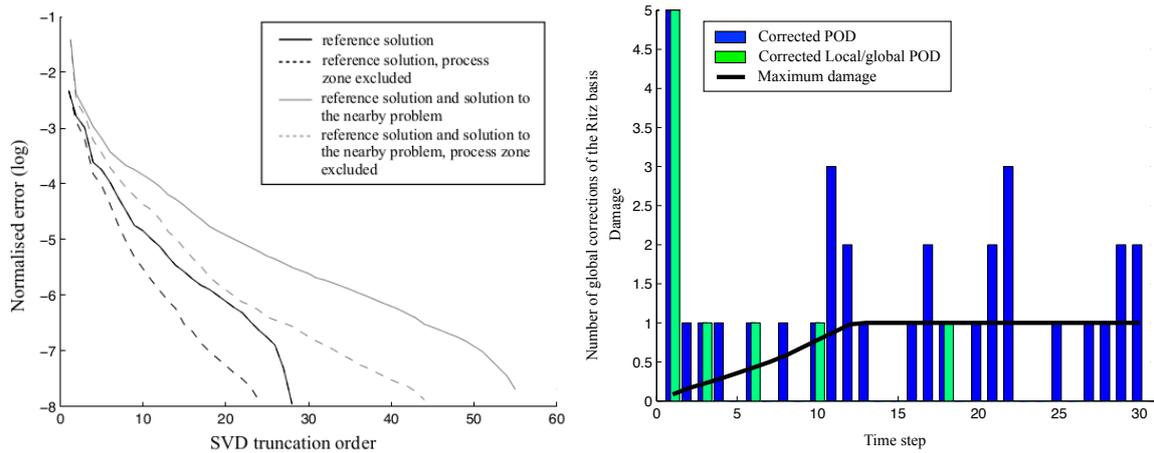


FIGURE 2.15 – Nombre de corrections globales en utilisant un modèle réduit adaptatif d’une part et un modèle local/global adaptatif d’autre part. Extrait de .

**Bilan** L’extension au non linéaire des méthodes de réduction de modèle par projection, très efficaces pour des problèmes simples et linéaires, n’est pas directe. Deux exemples d’applications non linéaires ont montré l’intérêt d’ajouter à la phase de construction *offline* une phase d’enrichissement à la volée en phase *online*. Cette stratégie permet, par exemple de réduire considérablement la taille de la base réduite initiale et donc des systèmes réduits. Ainsi la stratégie qui consiste à prendre une base réduite constituée de seulement deux modes mécaniquement pertinents s’est montrée efficace pour le calcul en post-flambement de panneaux raidis [Barrière et al., 2013][Barrière, 2014]. Elle représente une alternative à une méthode de réduction de modèle utilisant sur une base réduite certes plus complète mais qui requiert une phase *offline* importante sans réelles garanties d’une meilleure précision ou d’un coût *online* plus faible. Par ailleurs, la stratégie de réduction de modèle locale/globale augmente de façon significative l’intérêt d’utiliser une base réduite globale pour l’approximation du champ de déplacement dans le contexte de la rupture quasi fragile locale. En effet, une méthode de projection partielle permet de séparer le traitement exact des inconnues associées à la non-linéarité locale et celui du reste du domaine pour lequel un modèle réduit est pertinent. Cette stratégie permet de réduire de façon significative le nombre total d’enrichissements globaux par rapport à une projection globale classique.

Cependant, l’efficacité de ces méthodes et leur applicabilité dans un contexte industriel doit être relativisées. En effet, il s’agit d’une part de méthodes très intrusives au niveau de l’implémentation. Elles nécessitent des développements lourds à l’intérieur des codes au regard des gains obtenus. Par ailleurs, la question du contrôle de la qualité est une question essentielle. Chaque étape est source d’erreurs : l’erreur d’interpolation éléments finis, le choix de la base réduite, le choix éventuel des degrés de liberté locaux/globaux (déterminés de façon automatique, mais selon des critères plus ou moins empiriques jusqu’ici), le choix des paramètres d’incrémentations du Newton, le critère de déclenchement de l’enrichissement à la volée, la précision de convergence du Newton... Tous ces paramètres utilisateurs, rendent l’utilisation de ces outils complexe et le contrôle de la qualité des solutions obtenues non trivial. Récemment, des modèles réduits pilotés par des estimateurs d’erreurs *a posteriori* en quantité d’intérêt permettent non seulement de certifier les solutions [Florentin and Díez, 2012, Hoang et al., 2014, Hoang et al., 2015] mais également de réduire davantage la taille de la base réduite.

Les méthodes de réduction de modèle par projection réduisent la taille des systèmes linéaires à résoudre, mais leur construction peut parfois rester coûteuse, en particulier en non linéaire. Des techniques d’approximation permettent de considérer un nombre réduit de points d’intégration pour construire ces systèmes. C’est le cas notamment de la méthode dite d’*hyper-réduction* [Ryckelynck, 2005].

Enfin, il est intéressant de noter que lorsque l'espace paramétrique est grand ou que la solution varie beaucoup (ce qui est le cas de la rupture par exemple), il peut être intéressant de définir une base réduite par morceaux [Eftang et al., 2010] ou par rapport à un voisinage [Maday and Stamm, 2013] dans l'espace paramétrique. Cette stratégie est plus efficace dans la phase online car les systèmes sont de taille plus réduite. Cela correspond d'ailleurs bien à l'intuition qui veut que deux solutions correspondant à deux jeux de paramètres soient d'autant plus proches que les paramètres le sont aussi.

Enfin, il est à noter qu'une méthode de type base réduite a été utilisée également dans le contexte de la mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques pour l'identification de paramètres de comportement dans [Leclerc et al., 2009]. Les modes correspondant à la solution d'un modèle éléments finis et de ses dérivées par rapport aux paramètres matériaux recherchés.

### 3 Méthodes de séparation de variables - PGD

#### 3.1 Principe

La PGD (pour *Proper Generalized Decomposition* [Ladevèze et al., 2010]) est une technique de séparation de variables. Elle fut initialement introduite (sous le nom d'« approximation radiale ») pour les problèmes d'évolution, pour lesquels la solution recherchée est une fonction du temps et de l'espace [Ladevèze, 1985b, Ladevèze, 1985c]. La méthode consistait alors à rechercher la solution sous la forme d'une somme de produits de fonctions de variables séparées :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \cdot \lambda_i(t)$$

où  $\mathbf{v}_i$  et  $\lambda_i$  sont des fonction inconnues *a priori*. Le plus souvent, les paires de fonctions  $\{\mathbf{v}_i, \lambda_i\}$  sont calculées de façon progressive, soit à partir d'une formulation de type Galerkin [Ladevèze, 1985b, Ladevèze, 1999, Ammar et al., 2006, Pruliere et al., 2010][Passieux and Périé, 2012, Gomes Perini et al., 2014] soit minimisant un résidu [Nouy and Ladevèze, 2004][Ladevèze et al., 2009, Ladevèze et al., 2010, Passieux et al., 2010][Nouy, 2010] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \cdot \lambda_i(t)}_{\text{approximation courante fixée}} + \underbrace{\mathbf{v}_{m+1}(\mathbf{x}) \cdot \lambda_{m+1}(t)}_{\text{correction de rang 1}}$$

Même un problème linéaire d'évolution devient non linéaire du fait du produit des inconnues  $\mathbf{v}_{m+1}$  et  $\lambda_{m+1}$ . Pour résoudre ce problème on procède généralement par un algorithme de point fixe qui converge souvent rapidement, mais qu'il est de toute façon assez peu utile de résoudre précisément [Ladevèze et al., 2010, Passieux and Périé, 2012]. Différentes variantes de l'algorithme peuvent être trouvées dans la littérature, avec ou sans réutilisation et/ou remise à jour de certains termes de la décomposition existante de la solution [Nouy, 2008][Ladevèze et al., 2010][Nouy, 2010, González et al., 2010, Giraldi et al., 2013]. C'est par exemple le cas dans [Ladevèze et al., 2010] pour des problèmes d'évolution ou l'étape dite préliminaire consiste à remettre à jour l'ensemble des variables temporelles, les variables spatiales étant fixées.

Cette méthode, qui a notamment été au coeur de mes travaux de thèse [Passieux, 2008], a été étendue à des problèmes paramétriques [Pruliere et al., 2010, Chinesta et al., 2013], à des problèmes stochastiques [Nouy, 2007, Nouy, 2008], à la séparation des dimensions de l'espace [Ammar et al., 2006, Ammar et al., 2007], en CIN [Passieux and Périé, 2012, Gomes Perini et al., 2014], à la simulation de plaques [Bognet et al., 2012] et coques [Bognet et al., 2014], à certains problèmes non linéaires [Nouy and Le Maître, 2008], à l'acoustique [Barbarulo et al., 2014], à l'approximation d'images numériques [Giraldi et al., 2013], à la construction de préconditionneurs [Giraldi et al., 2014]... évidemment,

cette liste ne prétend pas à l'exhaustivité, tant le sujet est d'actualité.

**Lien avec la réduction de modèle.** Il est difficile de parler de la PGD comme d'une méthode de réduction de modèle. Il s'agit, là encore, davantage d'un solveur multidimensionnel efficace qui, par nature, donne accès, non seulement à la solution du problème, mais également à une base réduite pertinente pour la décrire<sup>7</sup>. Tout ou partie de cette base peut alors être utilisée pour résoudre un (ou plusieurs) autre(s) problème(s). Dans ce cas, on pourra effectivement parler de modèle réduit auquel on pourra facilement rajouter des corrections séparées supplémentaires [Ladevèze et al., 2009, Ladevèze et al., 2010]. Une autre façon d'associer à la PGD la notion de modèle réduit (également de surface de réponse) consiste à rajouter des dimensions pour les paramètres que l'on veut pouvoir modifier en phase *online*. La PGD va alors construire en phase *offline* la solution multidimensionnelle correspondante. La phase *online* ne consistera plus qu'à évaluer les fonctions précalculées [Chinesta et al., 2011, Chinesta et al., 2013, Niroomandi et al., 2013].

### 3.2 Application à la mesure de champs

Comme mentionné dans le chapitre 1, l'inconvénient des méthodes de CIN-EF est le coût de calcul puisque le système à résoudre à chaque itération est global, contrairement aux méthodes *subset* pour lesquelles ce système est diagonal par blocs, un bloc correspondant à une imagerie. En particulier quand la taille des images augmente (des capteurs de 29Mpixels sont aujourd'hui courants), ou lorsque l'on souhaite faire une mesure haute résolution, le temps consacré à l'inversion de ce système peut prendre une part significative sur le temps total d'analyse. Ce problème devient encore plus marqué en CIV. Dans cette section, nous présentons une méthode basée sur la PGD pour la corrélation d'images numériques haute résolution. Il s'agit d'un des premiers travaux que j'ai réalisés en arrivant à l'ICA en collaboration avec Jean-Noël Périé [Passieux and Périé, 2012].

**Principe** Techniquement, en partant de la formulation variationnelle (eq. (1.12) chapitre 1) associée à la prédiction linéaire du problème de CIN, on va rechercher l'inconnue, non plus sous forme éléments finis 2 ou 3D, mais telle que chaque composante de l'incrément de déplacement  $\delta \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  soit une meilleure approximation de rang 1, c'est-à-dire un produit de fonctions de chaque dimension [Passieux and Périé, 2012] :

$$\delta \mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x) \cdot u_y(y) \\ v_x(x) \cdot v_y(y) \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Pour une formulation PGD-Galerkin classique, le champ test associé s'écrit :

$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x^*(x) \cdot u_y(y) + u_x(x) \cdot u_y^*(y) \\ v_x^*(x) \cdot v_y(y) + v_x(x) \cdot v_y^*(y) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Ensuite, la PGD fonctionne en 3 étapes : (1) ces expressions de  $\delta \mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont introduites dans la formulation variationnelle (eq. (1.12) chapitre 1) puis (2) toutes les fonctions d'une même dimension sont regroupées entre elles

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} u_\alpha(x) \\ v_\alpha(x) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\alpha}^*(x) = \begin{bmatrix} u_\alpha^*(x) \\ v_\alpha^*(x) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma}(y) = \begin{bmatrix} u_\gamma(y) \\ v_\gamma(y) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma}^*(y) = \begin{bmatrix} u_\gamma^*(y) \\ v_\gamma^*(y) \end{bmatrix}$$

7. De ce point de vue, la PGD peut être rapprochée (conceptuellement) des solveurs de Krylov qui résolvent un système linéaire tout en fournissant une description pertinente du sous-espace de Krylov. Cette description (sous forme de vecteurs de Ritz) peut alors être utilisée pour résoudre d'autres systèmes linéaires en réutilisant cette information [Rey and Léné, 1998, Gosselet and Rey, 2002, Gosselet et al., 2013]

et enfin (3) d'écrire un système couplé de plusieurs formulations variationnelles monodimensionnelles (ou de manière plus générale, de plus faible dimensionnalité)

$$\begin{cases} \int_x \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{A}(x) \boldsymbol{\alpha} dx = \int_x \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \mathbf{B}(x) dx & \forall \boldsymbol{\alpha}^* \in L^2(\Omega_x) \\ \int_y \boldsymbol{\gamma}^* \cdot \mathbf{C}(y) \boldsymbol{\gamma} dy = \int_y \boldsymbol{\gamma}^* \cdot \mathbf{D}(y) dy & \forall \boldsymbol{\gamma}^* \in L^2(\Omega_y) \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  (respectivement  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ ) sont des intégrales par rapport à la variable  $y$  (respectivement  $x$ ) (pour les détails, voir [Passieux and Périé, 2012]).  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$  sont les domaines unidimensionnels tels que par produit tensoriel,  $\Omega = \Omega_x \otimes \Omega_y$ . La question de la séparabilité du domaine  $\Omega$  sous forme de produit tensoriel de domaines de plus faible dimension sera évoquée ultérieurement.

**Remarque.** Dans les termes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ , il y a les images et leur gradient qui elles, ne sont pas écrites sous forme séparée. Bien que des techniques efficaces permettant de représenter des images dans un espace fonctionnel réduit [Giraldi et al., 2013], nous avons choisi de ne pas approximer les images, compte tenu du fait que les niveaux de gris ont un impact très fort sur les incertitudes de mesure. Une image étant un ensemble de données pixels finies, il est tout à fait possible de construire une écriture séparée et exacte, mais non réduites. En pratique, ceci entraîne un coup de calcul plus élevé que de considérer les images non séparées.

Afin de les découpler, les deux problèmes (2.26) sont résolus de manière alternative par un algorithme de point fixe. Le problème selon  $x$  est d'abord résolu en considérant  $\boldsymbol{\gamma}(y)$  fixé, puis, dans un second temps, le problème  $y$  est résolu en fixant  $\boldsymbol{\alpha}(x)$  à sa valeur obtenue précédemment. Ces deux étapes sont répétées seulement quelques fois (paramètre  $k_{max}$ ). En effet, comme pour la simulation, la convergence fine de ce point fixe n'est pas nécessaire [Ladevèze et al., 2010, Passieux and Périé, 2012]. Sur la figure 2.16, on peut remarquer que la précision avec laquelle le point fixe est convergé n'a quasiment aucune influence sur la convergence du Newton global. En revanche, les nombreuses itérations de point fixe supplémentaires inutiles sont très préjudiciables pour le coût de calcul total [Gomes Perini et al., 2014].

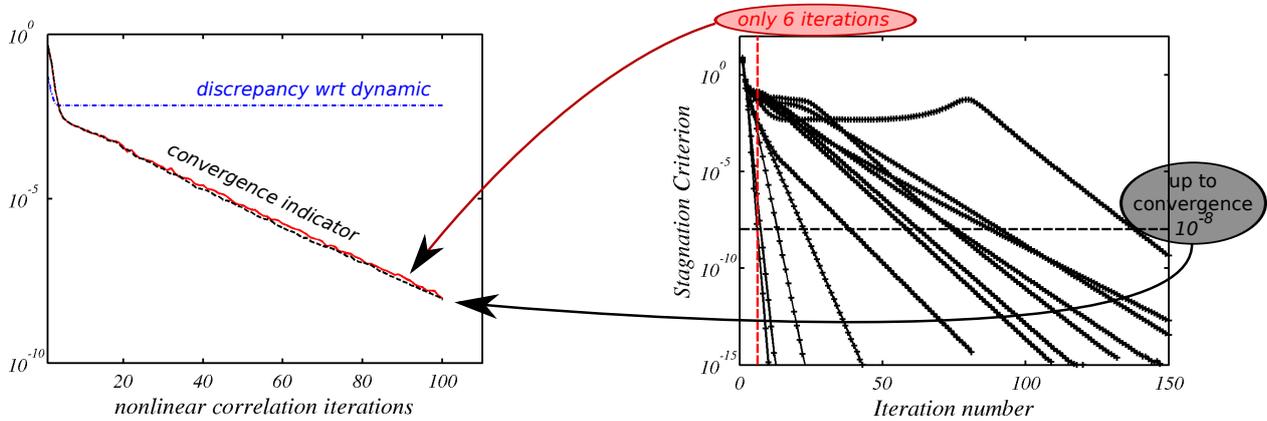


FIGURE 2.16 – Convergence du Newton global (à gauche) en fonction du critère d'arrêt des points fixes (à droite). Soit (en pointillés noir) les points fixes sont poussés jusqu'à convergence (critère de stagnation à  $10^{-8}$ ) soit le nombre d'itérations est fixé à un nombre très réduit (ici 6) quelque soit le niveau du critère de stagnation.

Jusqu'ici, tout est écrit du point de vue continu. Pour résoudre ce problème, il faut une technique de résolution approchée telle que la méthode des éléments finis par exemple, voir figure 2.17. *A priori*, les discrétisations des problèmes dans les différentes dimensions peuvent être complètement indépendantes (en type, en taille et en degrés).

**Illustration.** La méthode est illustrée avec les images d'un essai biaxial sur une éprouvette composite carbone/carbone réalisé sur la machine ASTREE au LMT-Cachan [Périé et al., 2002]. Les deux composantes

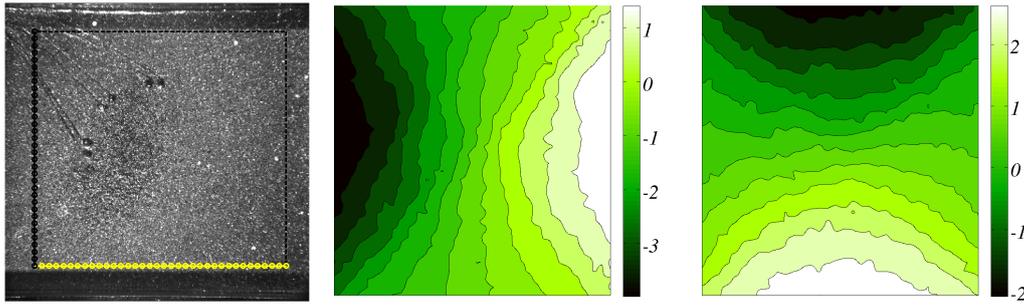


FIGURE 2.17 – A gauche, exemple de maillages unidimensionnels utilisés en CIN-PGD. A droite, les deux composantes du champ de déplacement mesuré avec la méthode CIN-PGD avec les images d'un essai biaxial sur une éprouvette en composite carbone/carbone.

du champ de déplacement mesuré par CIN-PGD sont présentées sur la figure 2.17. Ces champs sont les mêmes que ceux que l'on obtiendrait avec une méthode CIN-Q4 avec un maillage équivalent obtenu par produit tensoriel des deux maillages unidimensionnels [Passieux and Périé, 2012]. Les reconstructions des six premières meilleures approximations de rang 1 sont reportées sur la figure 2.18. Elles correspondent aux

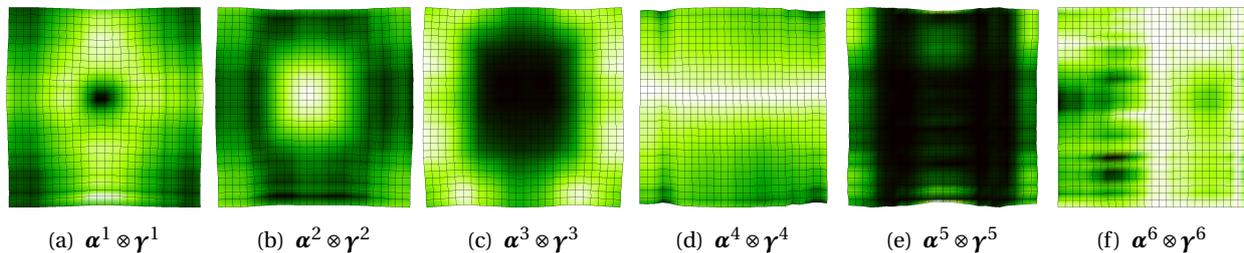


FIGURE 2.18 – Six premières meilleures approximations de rang 1 issues des 6 premières itérations du problème de corrélation.

6 premières itérations du problème de corrélation. On peut y voir que les premiers modes sont plutôt basse fréquence, tandis que les corrections d'ordre supérieur ont un contenu fréquentiel plus élevé.

**Remarque.** le choix que nous avons fait de ne faire qu'une seule approximation de rang 1 à chaque itération du Newton, peut entraîner une augmentation « artificielle » du nombre d'itérations de Newton dans le cas de champs de déplacement difficilement séparables. Dans [Passieux and Périé, 2012], un cas présentant une discontinuité inclinée montre le nombre d'itérations augmente (88 itérations pour CIN-PGD contre 25 pour CIN-Q4) par rapport à une approche EF classique. Cependant, la méthode est robuste puisqu'elle fournit une solution très proche de celles données par CIN-Q4. Nous avons remarqué en pratique que, dans certains cas, cette approximation de rang faible, qui peut ralentir la convergence, pouvait avoir un caractère régularisant dans les premières itérations de la corrélation.

**Efficacité numérique** Pour évaluer l'efficacité de la méthode CIN-PGD, une analyse à l'échelle pixel est menée sur une paire d'images synthétiques. La mesure est régularisée par une technique de type Tikhonov. On trace sur la figure 2.19, l'évolution du temps de calcul en fonction de la taille du domaine d'étude pour la méthode CIN-PGD (en noir) et la méthode CIN-Q4 (en rouge). Même si des itérations de point fixe doivent être résolues à chaque itération, le cout de calcul de CIN-PGD est bien plus faible que celui de CIN-Q4. Le gain est d'autant plus grand que la zone d'étude est grande.

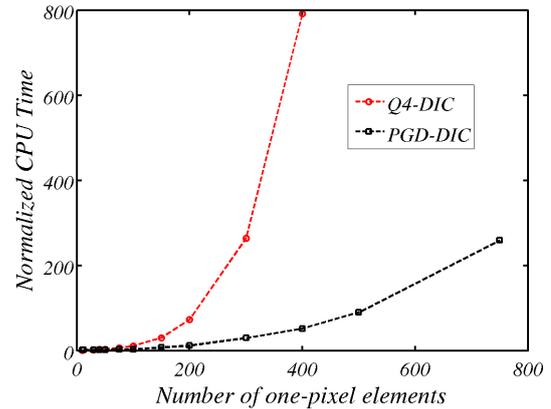


FIGURE 2.19 – comparaison des temps de calculs de CIN-Q4 et CIN-PGD

**Incertitudes de mesure** Toute méthode de mesure doit s'accompagner d'une caractérisation de sa qualité métrologique et en particulier de sa résolution. Dans le cas de la mesure de champs, la définition de la résolution de mesure est [Grédiac and Hild, 2012] « la variation de la grandeur mesurée qui produit une variation égale à un écart-type du bruit de mesure ». La résolution dépend de beaucoup de choses parmi lesquelles, le bruit capteur, l'algorithme d'interpolation sub-pixels, la taille associée à la discrétisation spatiale. En corrélation d'images numériques, l'incertitude de mesure peut être estimée par une analyse *a priori* à partir d'images synthétiques [Roux and Hild, 2006, Bornert et al., 2009, Wang et al., 2009, Amiot et al., 2013]. Une série d'images décalées d'une valeur comprise entre 0 et 1 pixel sont générées à partir d'une image de référence. Des mesures sont réalisées entre l'image de référence et ces images translatées pour les différentes valeurs du décalage et de taille des éléments. Sur la figure 2.20(gauche), on trace l'évolution du déplacement moyen et de son écart type en fonction de la taille des éléments utilisés. La figure 2.20(droite) présente le

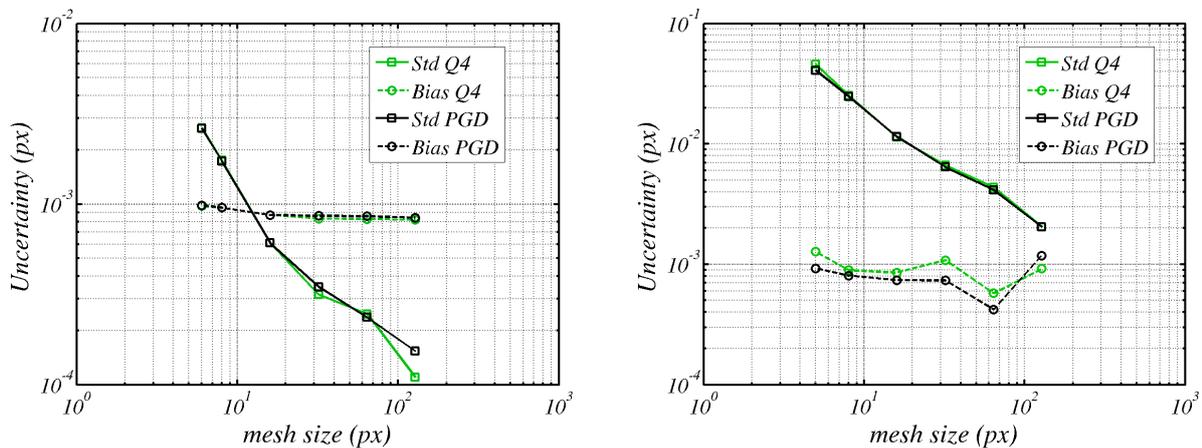


FIGURE 2.20 – Comparaison des incertitudes de mesures par rapport à l'interpolation sub-pixels et au bruit image pour CIN-Q4 (vert) et CIN-PGD (noir) sur un mouchetis synthétique de Perlin.

même résultat dans le cas où l'on simule, de plus, le bruit capteur en rajoutant à l'image synthétisée un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type 1 niveau de gris. Les résultats classiques montrent que le niveau du biais systématique ne dépend pas de la taille des éléments, ni vraiment du bruit capteur. En revanche, l'écart type, qui caractérise la résolution de la mesure, dépend fortement du bruit et de la taille des éléments. Quoi qu'il en soit, les performances métrologiques de la méthode CIN-PGD et celles de la méthode CIN-Q4 sont les mêmes, car basées sur la même hypothèse cinématique (pour peu que le nombre

d'itérations en PGD soit suffisant).

**Approche type domaine fictif pour les domaines non parallélépipédiques** Il est possible de faire une analyse PGD sur un domaine non parallélépipédique en s'appuyant sur une séparation de la fonction indicatrice du domaine d'étude [González et al., 2010]. Cependant, nous montrons que dans le cas de la CIN, une approche plus simple consiste à développer une approche type domaine fictif qui consiste à n'intégrer la fonctionnelle de corrélation que dans le domaine d'étude. Ceci est simple dans notre cas puisque nous avons choisi de ne pas séparer les images, comme expliqué plus haut. Il est ainsi possible de faire une mesure sur une région d'intérêt non parallélépipédique. C'est le cas, par exemple, de l'éprouvette trouée de la figure 2.21. La figure 2.20(gauche) présente, en haut, un maillage éléments finis non-structuré mais

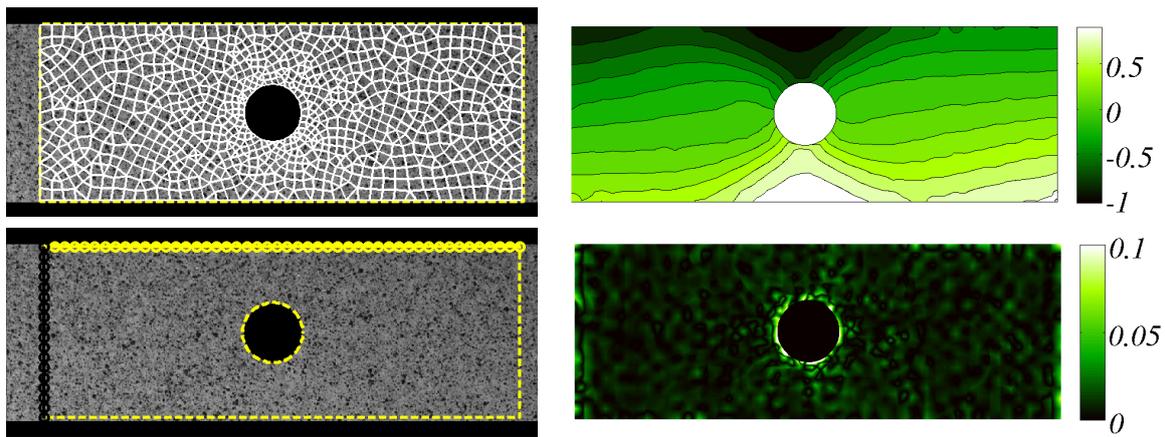


FIGURE 2.21 – Exemples de domaine  $\Omega$  non décomposé sous forme de produit tensoriel et quand même analysé avec la CIN-PGD. En haut à gauche, le maillage éléments fini compatible, en bas à gauche, le maillage PGD non compatible. En haut à droite la composante verticale du déplacement PGD et la différence avec le même champ mesure par CIN-EF compatible.

compatible avec le trou central et, en bas, le maillage utilisé en CIN-PGD qui n'est pas compatible. Sur la figure 2.20(droite), en haut, on trace la composante verticale du champ de déplacement issu de la mesure CIN-PGD, ainsi que la différence, en bas, avec la mesure CIN-EF réalisée avec le maillage EF compatible.

**Interpolations plus régulières et mesure de déformation** Comme souligné dans le premier chapitre, des fonctions à plus haut degré de régularité ont été utilisées dans la mesure CIN afin d'améliorer la qualité des dérivées du déplacement, entre autres. Par exemple des bases de B-Splines ont été utilisées avec succès pour la mesure de champs de déformation [Cheng et al., 2002, Elguedj et al., 2010]. Ces bases étant obtenues par produit tensoriel de B-Splines unidimensionnelles, il nous a donc semblé que la CIN-PGD était un algorithme particulièrement bien adapté à ce genre de fonction [Passieux et al., 2013a]

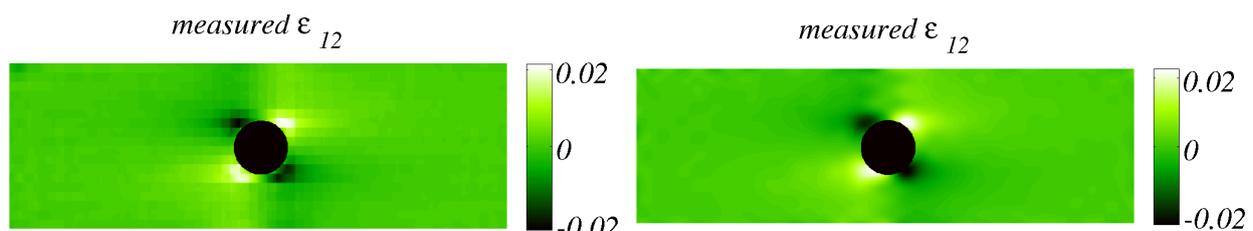


FIGURE 2.22 – Comparaison des champs de glissement obtenus par CIN-PGD avec des fonctions d'interpolation EF (à gauche) et NURBS (à droite).

**Extension à la Corrélation d'Images Volumiques** Cette méthode a également été étendue à la mesure de champ de déplacement 3D à partir d'images volumiques [Gomes Perini et al., 2014] dans le cadre de la thèse de Luis Gomes Perini [Gomes Perini, 2014]. Par exemple, la méthode est illustrée sur la figure 2.23 sur un essai de traction sur un os trabéculaire bovin, imagé en IRM. Cet essai a été initialement étudié

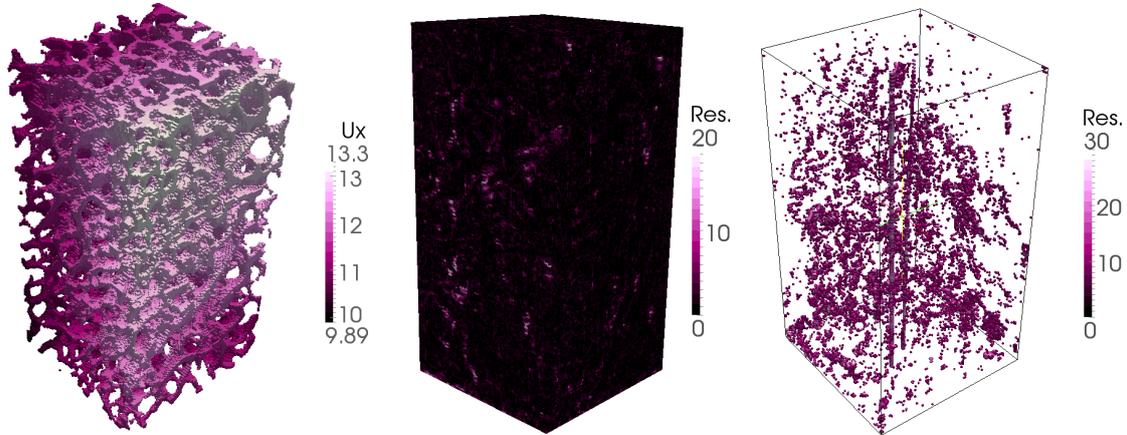


FIGURE 2.23 – Exemple de champ de déplacement mesuré dans une image IRM d'un os trabéculaire bovin. (à gauche) le champ de déplacement  $u_x$ , (au milieu) la carte de résidu  $r(x)$  et la carte de résidu seuillée qui fait apparaître l'effet des artefacts de reconstruction tomographique sur la mesure.

dans [Benoit et al., 2009]. Bien que la méthode soit simplement étendue à la mesure 3D, elle fait apparaître des gains en matière de temps de calculs moins spectaculaires qu'en CIN-2D [Gomes Perini et al., 2014, Passieux et al., 2015b]. Ceci s'explique par le grand nombre d'interpolation d'images qui finissent par être le point limitant dans le temps de calcul total.

**Bilan** Nous avons développé une méthode numérique efficace pour la résolution des problèmes de mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques éléments finis. Cette méthode présente les mêmes propriétés métrologiques que la méthode CIN-Q4. Elle a été appliquée à de nombreux cas, 2D/3D, avec ou sans régularisation, avec des régions d'intérêt parallélépipédiques ou non. Pour la discrétisation des problèmes unidimensionnels, l'usage d'éléments finis, de B-Splines, ou de polynômes d'Hermite ont été étudiés. Comme évoqué plus haut, l'efficacité numérique, si elle est spectaculaire en 2D est moins claire en 3D CIV. En effet, le gros du temps de calcul est consacré à l'interpolation des images et à leurs manipulations dans le cas 3D. Ceci fait que les gains sur la résolution des systèmes linéaires sont moins visibles. La question de l'accélération du traitement des manipulations d'images (interpolation/intégration) reste ouverte. Des éléments de réponse en ce sens seront avancés au prochain chapitre.

Bien que les questions de régularisation mécanique et d'identification de propriétés mécaniques ne soient traitées au chapitre 4, on peut d'ores et déjà dire que la régularisation mécanique telle qu'écrite dans [Réthoré, 2010, Leclerc et al., 2011] n'est pas applicable dans le contexte de la PGD. Cependant la régularisation écrite dans [Réthoré et al., 2013] est tout à fait applicable dans ce contexte.

Une telle technique de séparation de variable avec minimisation alternée pourrait enfin être appliquée aux problèmes spatio-temporels (dynamique transitoire, impact, dynamique vibratoire...). En effet, si on reformule le problème de corrélation de manière globale sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  [Besnard et al., 2011, Besnard et al., 2012b]

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = \arg \min \int_0^T \int_{\Omega} (f(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), t) - f(\mathbf{x}, 0))^2 d\mathbf{x} dt \quad (2.27)$$

dans lequel  $f$  est redéfinie comme une fonction de l'espace et du temps. On peut rechercher l'inconnue comme le produit d'une fonction spatiale et d'une fonction temporelle. Lorsqu'on l'écrit, ceci se traduit par

la résolution alternée de deux problèmes très simples et très proche des opérateurs utiles à la corrélation d'image « stationnaire ».



# Méthodes numériques multiéchelles

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Méthodes multigrilles</b>	<b>53</b>
1.1	Multigrille localisé pour la rupture	55
1.2	Initialisation multigrille en mesure de champs	59
<b>2</b>	<b>Approches locales/globales</b>	<b>61</b>
2.1	Couplage local/global non intrusif	61
2.2	Mesure de champs de déplacement locale/globale	69
<b>3</b>	<b>Décomposition de domaine</b>	<b>73</b>
3.1	Décomposition de domaine non linéaire et non-intrusive	74
3.2	Décomposition de domaine et corrélation d'images numériques	75

Les problèmes rencontrés en mécanique des structures font souvent apparaître au moins deux échelles très différentes. **L'utilisation à grande échelle de modèles ou de moyens expérimentaux considérant la physique à l'échelle la plus petite** est difficile compte tenu des moyens matériels. Dans ce cas, on s'appuie sur des stratégies de calcul haute performance sachant tirer parti des ordinateurs à architecture parallèle. Il s'agit des méthodes de décomposition de domaine telles que les méthodes de Schwarz avec recouvrement [Lions, 1987, Lions, 1990]. Leur alternatives sans recouvrement consistent à résoudre le problème condensé sur l'inconnue d'interface par un algorithme itératif de type Krylov. Les méthodes se différencient suivant que l'inconnue d'interface est primale [Mandel, 1993], duale [Farhat and Roux, 1991], mixte [Roux, 2009] ou hybride [Gosset and Rey, 2006]. Afin de leur conférer une meilleure extensibilité ces méthodes font appel à différents niveaux de problèmes [Ladevèze and Dureisseix, 2000, Farhat et al., 2001, Ladevèze et al., 2001, Dohrmann, 2003] obtenant ainsi un caractère multiéchelle. Les méthodes multigrilles globales ont pour objectif d'accélérer le solveur utilisé pour résoudre le problème global à l'échelle la plus fine [Brandt, 1984, Parsons and Hall, 1990]. Elles s'appuient également sur une hiérarchie de modèles physiques ou algébriques.

Cependant, pour de nombreuses applications, des visions simplifiées, réduites où grossières sont suffisantes pour décrire la solution à l'échelle globale, et on s'appuie sur des modèles détaillés seulement dans des zones locales potentiellement critiques. En calcul de structures, l'idée la plus simple consiste à faire une approche descendante (on parle de zoom structural), c'est-à-dire, à résoudre le problème grossier à grande échelle et se servir de la solution grossière comme conditions aux limites pour le modèle détaillé local. Le problème est qu'il n'y a pas de remontée d'informations locales à l'échelle globale. Ces méthodes ne permettent donc pas de prendre en compte l'effet du détail local sur la redistribution des efforts à l'échelle globale. Cette approximation peut conduire à des erreurs très significatives [Cresta et al., 2007, Gendre et al., 2009]. On constate donc un intérêt grandissant pour les méthodes dites multiéchelles, en ce sens qu'elles cherchent à traiter ce type de problème grâce à un réel couplage entre les différents modèles aux différentes échelles. De nombreuses techniques d'analyse se basent sur **la théorie de l'homogénéisation** [Sanchez-Palencia, 1974, Devries et al., 1989, Fish and Belsky, 1995, Ghosh et al., 1995, Fish et al., 1997, Temizer and Wriggers, 2007, Feyel and Chaboche, 2000, Yvonnet and He, 2007] qui consiste à construire des modèles analytiques ou numériques à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif permettant de définir un comportement macroscopique moyen.

Il existe également des **méthodes de correction locale** dont le principe est d'enrichir une solution grossière  $\mathbf{u}^g$  par une correction locale raffinée  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^g + \delta\mathbf{u}^f$ . Les méthodes de patch [Glowinski et al., 2005, Rezzonico et al., 2007, He et al., 2007] ou de zoom numérique [Lozinski and Pironneau, 2011] permettent d'apporter une correction discrétisée sur un maillage local raffiné à une solution décrite sur le maillage grossier. La méthode variationnelle multiéchelle (VMS [Hughes, 1995, Hughes et al., 1998]) est également basée sur ce principe, mais ici, l'échelle fine est souvent associée à une connaissance analytique (fonctions bulles s'annulant sur la frontière des éléments, fonctions de Green... ) de la solution. Les méthodes basées sur la partition de l'unité (PU-FEM [Melenk and Babuška, 1996], X-FEM [Moës et al., 1999], G-FEM [Strouboulis et al., 2001]) ont également pour principe d'ajouter à une solution grossière, une correction locale ou globale. La famille des méthodes dites "embedded discontinuity" [Ortiz et al., 1987, de Borst et al., 2001, Alfaiate et al., 2003, Ibrahimbegović and Melnyk, 2007] permettent d'ajouter des fonctions à l'interpolation éléments finis classique pour reproduire la discontinuité de la solution.

La famille des **méthodes de substitution locale** consiste à remplacer la solution globale par une solution locale raffinée  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^g|_{\Omega^c} \cup \mathbf{u}^f|_{\Omega^f}$ . Cette correction peut être réalisée à l'intérieur de chaque élément fini. C'est le cas de la projection de Dirichlet hiérarchique [Zohdi et al., 1996, Oden et al., 1999, Oden et al., 2006] avec, comme son nom l'indique, un raccord en déplacement au bord du domaine fin, mais aussi de la méthode aux échelles fortement couplées [Ibrahimbegović and Markovič, 2003, Markovič and Ibrahimbegović, 2004] avec un raccord assuré par une distribution de multiplicateurs de Lagrange à l'intérieur de chaque élément grossier. L'intérêt des méthodes de substitution par rapport aux méthodes de correction réside dans le fait qu'elles permettent de coupler des modèles de nature différente. La méthode Arlequin [Ben Dhia, 1998, Ben Dhia and Rateau, 2005, Ben Dhia and Jamond, 2010, Guidault and Belytschko, 2007, Réthoré et al., 2010b, Réthoré et al., 2010c] s'appuie sur une partition recouvrante du domaine. La taille du recouvrement, la nature de la fonction de pondération de l'énergie et le type de raccord sont des paramètres de la méthode. Le grand intérêt de cette méthode est qu'elle permet de raccorder des descriptions continues et particulières [Guidault and Belytschko, 2009, Aubertin et al., 2009, Ben Dhia et al., 2011, Prudhomme et al., 2012]. Bien que souvent résolu de manière monolithique, un solveur itératif inspiré des méthodes de décomposition de domaine peut être employé pour sa résolution [Pebrel et al., 2008a, Ben Dhia et al., 2008]. La méthode Chimère [Steger, 1991, Brezzi et al., 2001] est une méthode analogue utilisée en dynamique des fluides. Pour le couplage de modèles de mécanique des milieux continus standard, il est recommandé d'utiliser une zone de recouvrement de petite taille [Guidault and Belytschko, 2007]. Des méthodes sans recouvrement peuvent fournir des solutions de qualité équivalente [Passieux et al., 2011], les paramètres du recouvrement en moins. Cette dernière méthode s'inscrit dans le cadre du couplage local/global avec raccord intégral qui, lorsqu'il est résolu par un algorithme itératif adapté, est très peu intrusif [Whitcomb, 1991, Gendre et al., 2009, Laborde and Lozinski, 2015][Passieux et al., 2013b, Duval et al., 2015] ce qui permet de résoudre les problèmes grossiers et locaux avec des logiciels commerciaux comme Abaqus [Gendre et al., 2009] ou Code\_Aster [Duval et al., 2015]. Les méthodes multigrilles localisées font également partie de ces méthodes de substitution locale [Gravouil and Combescure, 2001, Rannou et al., 2008][Passieux et al., 2011] et peuvent elles aussi être rendues non intrusives [Passieux et al., 2013b].

Ce chapitre se compose de trois parties. La section 1 sur les algorithmes multigrilles présente une technique multigrille localisée pour la rupture et une technique d'initialisation multigrille en mesure par CIN-PGD. La section 2, quant à elle, s'intéresse aux méthodes locales/globales par substitution avec d'une part un algorithme de couplage local/global non intrusif et d'autre part, une méthode de mesure CIN-EF champ proche/champ lointain. Enfin, la dernière partie 3 présente des travaux sur le thème de la décomposition de domaine, avec une méthode de décomposition de domaine non linéaire et non intrusive pour le calcul et une méthode de décomposition de domaine duale pour la corrélation d'images éléments finis.

## 1 Méthodes multigrilles

Les algorithmes multigrilles ont été initialement introduits en mécanique des fluides pour résoudre efficacement des problèmes à grand nombre d'inconnues [Brandt, 1984] avant d'être étendues au cadre du calcul de structures par éléments finis dans [Parsons and Hall, 1990]. L'idée de base des algorithmes multigrilles est d'exploiter la propriété dite de lissage de la plupart des solveurs itératifs tels que Gauss Seidel, Jacobi, mais également certains algorithmes de Krylov (Gradient conjugué, GMRES...), mais c'est aussi le cas des solveurs de décomposition de domaine monoéchelle [Ladevèze, 1985a, Glowinski and Le Tallec, 1989, Lions, 1990]. Cette propriété de lissage se caractérise par le fait que la partie haute fréquence de la solution est obtenue au bout de quelques itérations seulement du solveur, tandis que les composantes basse fréquence nécessitent de très nombreuses itérations supplémentaires. Parsons et Hall [Parsons and Hall, 1990] proposent un exemple simple pour illustrer ce phénomène. On considère le problème de la figure 3.1 d'un milieu élastique 2D rectangulaire soumis à une charge ponctuelle. Pour résoudre ce problème on utilise

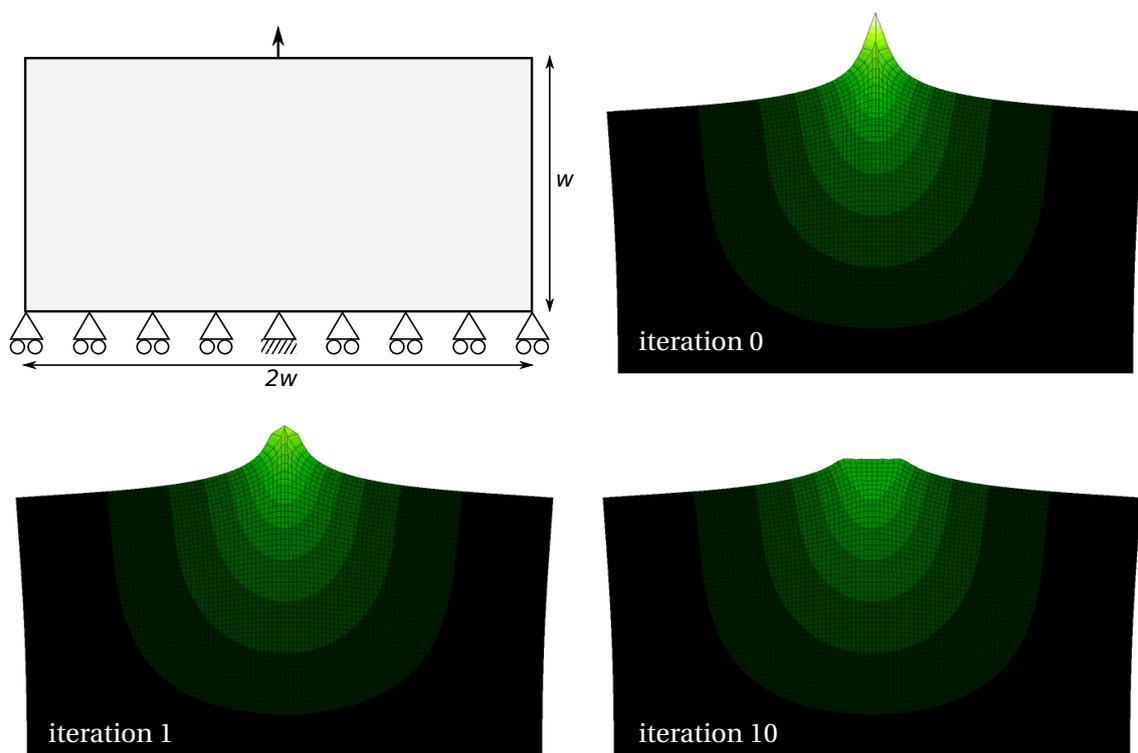


FIGURE 3.1 – Illustration de la propriété de lissage des solveurs itératifs avec l'exemple de [Parsons and Hall, 1990]. Erreur vraie  $u_\infty - u_k$  à l'initialisation et aux itérations 1 et 10 d'un PCG.

un gradient conjugué préconditionné (PCG) par Jacobi (l'inverse de la diagonale). Aux itérations  $k = 0, 1$  et  $10$  du PCG, on affiche l'erreur vraie  $u_\infty - u_k$ , la solution de référence  $u_\infty$  ayant été obtenue avec un solveur direct. Le solveur étant initialisé à zéro, l'erreur initiale (pour  $k = 0$ ) donne la solution de référence du problème  $u_\infty$ . On remarque que sous la charge ponctuelle, l'erreur initiale a un contenu très « haute fréquence » (*i.e.* l'erreur varie beaucoup d'un élément à l'autre), tandis que les variations de l'erreur dans le reste du domaine sont beaucoup plus douces. À l'issue de la première itération du solveur, l'erreur au niveau de la charge ponctuelle, sans être beaucoup réduite, est rendue plus lisse (les variations sont atténuées), tandis que dans le reste du domaine l'erreur reste inchangée. Même au bout de 10 itérations, l'erreur « basse fréquence » semble ne pas avoir changé.

En fait, s'agissant d'un algorithme ne faisant intervenir que des produits matrice vecteurs, l'information du chargement ne peut, au plus, franchir qu'une couche d'éléments par itération. Au-delà de quelques

itérations, tout l'effort va consister à déterminer la solution basse fréquence (la notion de basse fréquence étant relative à la taille des éléments), pour lequel un maillage fin n'est pas adapté. Un maillage plus grossier serait plus pertinent.

**Remarque.** On observe le même phénomène avec les méthodes de décomposition de domaine dites « mono-échelle » [Ladevèze, 1985a, Glowinski and Le Tallec, 1989, Lions, 1990] dans lesquelles, un sous-domaine n'échange des données (primales ou duales) qu'avec ses voisins directs. Dans ce cas, l'information propage d'un front de sous-domaine par itération seulement. Ces méthodes ne peuvent donc pas être extensibles puisque la vitesse de propagation de l'information dépend du nombre de sous-domaines. Nous verrons dans la section 3 qu'un problème grossier est introduit dans l'unique but de faire transiter une information réduite mais pertinente à l'échelle de la structure pour limiter cet effet.

Il existe de nombreuses variantes d'algorithmes multigrilles, mais tous reposent, plus ou moins, sur les trois principes suivants :

- **lissage** : la solution à courte longueur de variation est obtenue à l'aide de quelques itérations d'un algorithme de lissage (en général entre 5 et 10 itérations quelque soit la taille du problème).
- **restriction** : le résidu lissé est transféré (à l'aide d'un opérateur de restriction  $\mathbf{R}$ ) sur une grille grossière. Ce problème grossier est résolu par un solveur direct.
- **prolongement** : la correction grossière basse fréquence est alors interpolée sur la grille fine (à l'aide d'un opérateur de prolongement  $\mathbf{P}$ ) et sert à corriger la solution courante sur la grille fine.

Par exemple l'algorithme multigrille géométrique global CS (pour *Correction Scheme*) illustré sur la figure 3.2 fonctionne à partir de quatre étapes élémentaires : quelques itérations de lissage sont réalisées sur le problème de la grille fine  $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}$  (étape 1, ●). On obtient une approximation courante  $\mathbf{q}$ . Le résidu  $\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{q}$

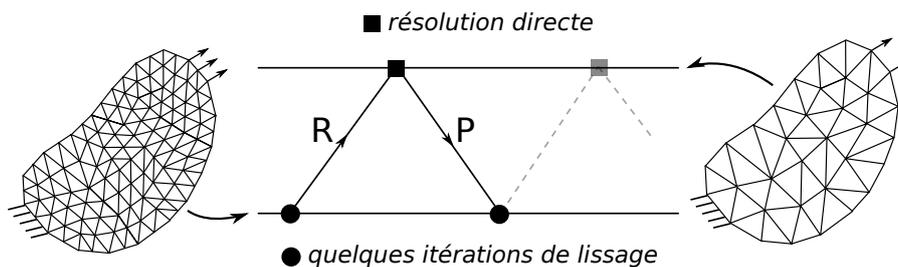


FIGURE 3.2 – Schéma de principe du cycle en  $V$  de l'algorithme multigrille CS.

grossier est restreint à la grille grossière (étape 2,  $\nearrow$ ) pour former le problème grossier  $\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{R}(\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{q})$  ( $\tilde{\mathbf{K}}$  et  $\tilde{\mathbf{q}}$  désignant respectivement l'opérateur et la correction de l'inconnue associés à la grille grossière). Ce problème est résolu (étape 3, ■) et le prolongement de la correction de solution obtenue  $\mathbf{P} \tilde{\mathbf{q}}$  est utilisée pour corriger l'approximation courante de la grille fine  $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + \mathbf{P} \tilde{\mathbf{q}}$  (étape 4,  $\searrow$ ). Cette opération peut introduire des composantes hautes fréquence, c'est pourquoi on procède à nouveau à un lissage (étape 1). Ce cycle dit en  $V$  est répété jusqu'à convergence. Si la résolution directe du problème grossier est trop coûteuse, on peut faire appel à l'algorithme multigrille de façon récursive. Ceci implique une hiérarchie de grille jusqu'à ce que la taille du problème sur la grille la plus grossière soit suffisamment petite pour un solveur direct. Plusieurs possibilités existent pour itérer à l'intérieur de cette hiérarchie de grille. Le plus simple consiste à faire un cycle en  $V$ , c'est-à-dire de la grille la plus fine jusqu'à la plus grossière et inversement. Suivant la nature des modèles sur chaque grille, il peut s'avérer utile de faire des sous-cyclages intermédiaires, on parle de  $W$ -cycles [Passieux et al., 2011].

Cet algorithme est dit géométrique dans la mesure où il implique différents niveaux de discrétisation (ou de finesse de maillage) d'un même problème ce qui conduit naturellement à l'assemblage de plusieurs opérateurs associés à chaque grille. Dans ce cas là, généralement, on s'arrange pour que d'une grille à l'autre, le rapport des tailles des éléments finis soit de l'ordre de deux. Ce choix semble assurer une certaine optimalité par rapport au temps de calcul global [Lubrecht and Venner, 2000]. Les opérateurs de restriction et de prolongement doivent vérifier des conditions de conservation. En particulier en calcul de structure,  $\mathbf{R}$  et

$\mathbf{P}$  sont construits de façon à ce que le travail des efforts intérieurs dans le déplacement soit conservé d'une grille à l'autre. Ceci implique que  $\mathbf{R} = \mathbf{P}^T$ . Ainsi seul l'opérateur de prolongement est construit. Avec des grilles incompatibles, l'opérateur de prolongement peut être simplement construit avec une technique de type Mortar [Bernardi et al., 1994]. Bien que cette solution soit théoriquement correcte, elle n'est pas utilisée en pratique car le coût de calcul associé est rédhibitoire. Le plus souvent, on s'arrange pour que les maillages soient imbriqués, de sorte que l'opérateur de prolongement soit explicite et local par élément grossier [Rannou et al., 2007].

Par opposition à l'algorithme multigrille géométrique, l'algorithme multigrille algébrique fait intervenir des opérateurs de restriction et de prolongement de synthèse, c'est-à-dire qu'ils sont construits de façon algébrique en fonction de la structure de l'opérateur fin  $\mathbf{K}$  [Briggs, 1987]. Les opérateurs grossiers ne sont pas issus de la discrétisation du problème avec un maillage plus grossier, mais seulement obtenus par projection à l'aide des opérateurs de restriction et prolongement  $\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{P}$ . Dans le cas d'un problème symétrique, on choisit également que les opérateurs inter-grille vérifient  $\mathbf{R} = \mathbf{P}^T$  pour conserver la symétrie.

On distingue encore des méthodes multigrilles globales des méthodes dites locales lorsque la grille fine recouvre seulement partiellement la grille grossière [Gravouil and Combescure, 2001, Rannou et al., 2008]. Bien que basée sur les mêmes concepts que ceux énoncés précédemment, cette technique est, dans son utilisation, assez différente. En effet, un algorithme multigrille localisé servira davantage à raffiner localement une solution grossière qu'à accélérer la résolution d'un problème de grande taille. Un cycle multigrille localisé est composé des trois étapes suivantes [Rannou et al., 2008] :

- Le problème grossier global qui s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{q}}^{k+1} = \tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{q}^k + \tilde{\mathbf{K}}_L \tilde{\mathbf{q}}^k \quad (3.1)$$

où  $\tilde{\mathbf{K}}_L$  est la matrice de rigidité du modèle grossier global, dont seuls les éléments recouverts par le modèle fin local sont assemblés. Il permet de calculer la réaction de la partie fictive sur la partie réelle dans le domaine grossier global. On rappelle que les termes avec un tilde, concernent le modèle global et ceux sans tilde, le modèle fin. Comme dans l'algorithme multigrille classique, ce problème est résolu exactement.

- La solution du problème local  $\mathbf{q}^k$  est corrigé par la prolongation de la correction grossière :

$$\mathbf{q}^k \leftarrow \mathbf{q}^k + \mathbf{P} (\tilde{\mathbf{q}}^{k+1} - \tilde{\mathbf{q}}^k) \quad (3.2)$$

- Cette correction est ensuite « lissée » par quelques itérations de lissage sur le problème local suivant :

$$\mathbf{K} \mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{f} \quad \text{avec } \mathbf{q}^{k+1}|_{\Gamma} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{q}}^{k+1}|_{\Gamma} \quad (3.3)$$

qui représente un problème classique d'élasticité avec le déplacement grossier  $\tilde{\mathbf{q}}$  imposé, au travers de l'opérateur de prolongement, sur l'interface  $\Gamma$  entre les deux modèles.

### 1.1 Multigrille localisé pour la rupture

La propagation de fissure est l'exemple typique pour lequel des échelles très différentes entrent en jeu dans un même problème. Il y a d'abord l'échelle de la structure qui peut être plusieurs ordres de grandeur plus grande que celle de la fissure qui peut être elle-même très grande devant celle de la singularité (et/ou des non-linéarités) en pointe de fissure. Comme mentionné dans le chapitre précédent, la méthode X-FEM est elle-même une méthode multiéchelle avec enrichissement local qui permet de découpler davantage encore les échelles puisqu'elle permet de gagner un ordre de grandeur sur la taille des éléments finis par rapport à une méthode éléments finis standard à précision équivalente [Rannou et al., 2007]. Mais cette méthode reste une méthode éléments finis qui nécessite un maillage suffisamment fin pour pouvoir décrire correctement le déplacement au voisinage de la pointe de fissure. Afin de répondre à cette problématique, la méthode X-FEM a été associée à une méthode de décomposition de domaine mixte multiéchelle dans

[Guidault et al., 2008]. Le problème grossier est adapté au cas particulier de la fissuration pour conserver l’extensibilité de la méthode. La méthode a également été associée à la méthode G-FEM, ce qui en fait une méthode de type Partition de l’Unité à deux niveaux [Kim et al., 2010, Pereira et al., 2012]. Un modèle global éléments finis standard est enrichi par G-FEM avec une solution locale raffinée et enrichie elle-même avec X-FEM. Dans la suite, nous nous intéressons à l’utilisation d’un algorithme multigrille dans le cadre de la mécanique de la rupture.

Une première méthode a été proposée dans [Rannou et al., 2007] avec un algorithme multigrille global géométrique de type CS. Puis il a été étendu au cadre d’une méthode multigrille localisée dans [Rannou et al., 2008]. Il s’agit d’un algorithme localisé classique. Une attention particulière doit cependant être accordée aux opérateurs inter-grille. Dans le cadre de maillages imbriqués et en présence d’enrichissements incompatibles, une méthode de construction explicite mais approchée des opérateurs est proposée [Rannou et al., 2008]. Par ailleurs, il est montré qu’il n’est pas forcément utile d’enrichir avec X-FEM toutes les grilles. Plus précisément, seules les grilles dont la taille des éléments est inférieure à la taille de la fissure sont enrichies par X-FEM. Il est montré de façon expérimentale que ce choix confère une certaine optimalité par rapport au nombre total de cycles multigrilles pour atteindre la convergence.

Dans le chapitre 2, une méthode X-FEM avec extraction directe de facteurs d’intensité des contraintes (FIC) a été présentée. Dans [Réthoré et al., 2010b][Passieux et al., 2011], il est montré que la finesse du maillage éléments finis sous-jacent avait, comme toute méthode éléments finis, un effet sur la précision de l’estimation des FIC. Ainsi il est utile de raffiner, au moins localement près de la singularité le maillage pour obtenir une solution précise. Deuxièmement, les séries de Williams, telles qu’elles sont écrites dans ce manuscrit, sont valables pour une fissure droite. Même s’il ne serait pas impossible d’écrire un développement asymptotique pour une fissure de forme analytique simple, mais non droite, il nous paraît plus générique de conserver la description valable pour une fissure droite et d’adapter la taille du patch analytique à l’échelle à laquelle cette hypothèse est valable. C’est pour ces deux raisons que, se basant sur les travaux de [Rannou et al., 2008], nous avons travaillé sur une version multigrille localisée de la méthode X-FEM avec estimation des FIC pendant mon postdoc au LaMCoS [Passieux et al., 2011]. Celle-ci permet de (1) raffiner le maillage EF au voisinage de la pointe et (2) permettre d’envisager des tailles de patch suffisamment petites pour que l’hypothèse « fissure droite » soit correcte.

La méthode s’appuie sur une hiérarchie de grilles FEM et X-FEM permettant de passer de l’échelle de la structure (potentiellement FEM) à l’échelle de la fissure pour laquelle un modèle X-FEM est approprié. Pour coupler ces grilles, l’algorithme de Rannou et al. [Rannou et al., 2008] est utilisé. À cette hiérarchie de grilles s’ajoute une dernière « grille » localisée analytique en pointe de fissure basée sur les séries de Williams (décrites au chapitre précédent), voir figure 3.3. Un algorithme multigrille spécialisé est développé pour

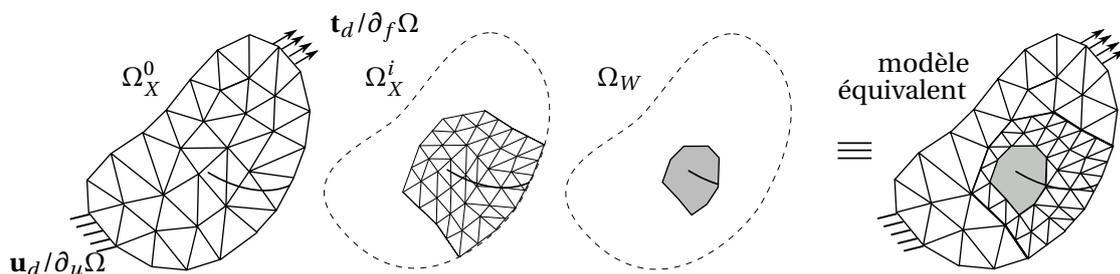


FIGURE 3.3 – Hiérarchie de grilles X-FEM et modèle analytique. Le modèle équivalent correspond à la substitution de modèles les plus grossiers par les plus fins.

pouvoir coupler la dernière grille X-FEM et ce modèle analytique en pointe de fissure. Cet algorithme est proche de l’algorithme de couplage itératif local/global [Whitcomb, 1991]. Il consiste, partant du problème (3.22) (du chapitre 2), à séparer les problèmes sur le domaine  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$ , puis à effectuer un prolongement fictif du modèle  $\Omega_X$  dans la zone recouverte par  $\Omega_W$ . Finalement, il se compose des deux étapes suivantes [Passieux et al., 2011, Passieux et al., 2013b] :

1. Problème sur la grille X-FEM la plus fine.

$$\mathbf{K}_X \mathbf{q}_X^{k+1} = \mathbf{f}_X - \mathbf{C}_X^T \Lambda^k + \mathbf{K}_{X|W} \mathbf{q}_X^k \quad (3.4)$$

dans lequel  $\mathbf{K}_{X|W}$  est l'opérateur de rigidité du prolongement fictif recouvert par  $\Omega_W$ . Ici, ce problème joue le rôle de problème grossier. Dans le cas où l'on aurait qu'un seul modèle X-FEM, il serait donc résolu par un solveur direct. S'il existe un modèle X-FEM plus grossier, alors seulement quelques itérations de l'algorithme de lissage sont réalisées sur ce problème.

2. Problème sur le modèle réduit analytique

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_W & -\mathbf{C}_W^T \\ -\mathbf{C}_W & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_W^{k+1} \\ \Lambda^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_X \mathbf{q}_X^{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ce problème étant de taille très faible (interpolation par les séries tronquées de Williams), on choisit de le résoudre à l'aide d'un solveur direct.

L'algorithme est arrêté par un indicateur de convergence basé sur l'équilibre entre le domaine  $\Omega_X$  et  $\Omega_W$  à l'interface  $\Gamma_W$  entre les deux.

Ces deux algorithmes sont alors combinés dans un algorithme multigrille à plusieurs niveaux tel qu'illustré sur la figure 3.4 dans le cas de 2 grilles X-FEM plus le patch analytique. La vitesse de convergence

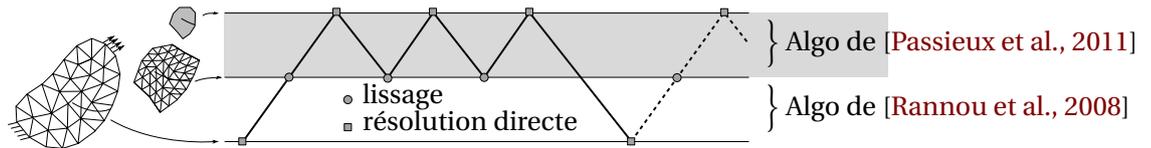


FIGURE 3.4 – Cycle multigrille élémentaire dans le cas  $\gamma_W = 3$

des deux algorithmes étant différente, on se trouve dans le cas typique où l'usage d'un cycle en  $V$  classique n'est pas optimal. En effet, on préférera, dans ce cas, introduire un paramètre  $\gamma_W$  qui correspond au nombre de sous cycles de l'algorithme [Passieux et al., 2011] pour un cycle de l'algorithme [Rannou et al., 2008].

**Remarque.** Nous avons montré dans [Passieux et al., 2013b] que, pour encore plus d'efficacité, il est possible de combiner le problème sur le patch (3.5) et le problème sur la grille X-FEM la plus fine (3.4) en un seul problème sur lequel on peut faire quelques itérations de lissage. Ceci permet de retomber sur un cycle en  $V$  classique plus rapide qu'avec le paramètre  $\gamma_W$  optimal et sans avoir besoin de le déterminer. Pour ce faire il suffit de remarquer que l'équation (3.5) peut être écrite sous cette forme :

$$\Lambda^{k+1} = -\mathbf{C}_W^T \mathbf{K}_W \mathbf{C}_W^{-1} \mathbf{C}_X \mathbf{q}_X^{k+1} = -\mathbf{L}_W \mathbf{q}_X^{k+1} \quad (3.6)$$

dans lequel l'opérateur  $\mathbf{L}_W$  peut être vu comme un complément de Schur qui à un déplacement grossier  $\mathbf{q}_X^{k+1}$  sur l'interface associe la réaction  $\Lambda^{k+1}$  sur  $\Gamma_W$ . Ceci peut être écrit si et seulement si  $\mathbf{C}_W$  est carré et inversible, ce qui est notre cas, compte tenu du choix de l'espace de discrétisation des multiplicateurs de Lagrange [Passieux et al., 2011]. Ensuite, le problème hybride sur lequel on fera un lissage est le suivant :

$$(\mathbf{K}_L - \mathbf{K}_{L|W} + \mathbf{C}_X^T \mathbf{L}_W) \mathbf{q}_X^{k+1} = \mathbf{f}_X \quad (3.7)$$

L'opérateur de droite est singulier car il possède de nombreuses lignes de zéro, précisément autant que de degrés de liberté fictivement rajoutés sous le patch. Mais vu qu'il est résolu par quelques itérations d'un gradient conjugué, d'une part et que les valeurs des degrés de liberté fictifs sont ni physiques ni d'intérêt pour l'utilisateur, ça ne pose pas de problème. Cette technique a également été reprise dans [Roux-Langlois et al., 2015].

Finalement, on considère un exemple académique d'une plaque rectangulaire fissurée sur le côté, encastree sur son côté inférieur et soumise à un chargement transversal sur son bord supérieur, voir figure

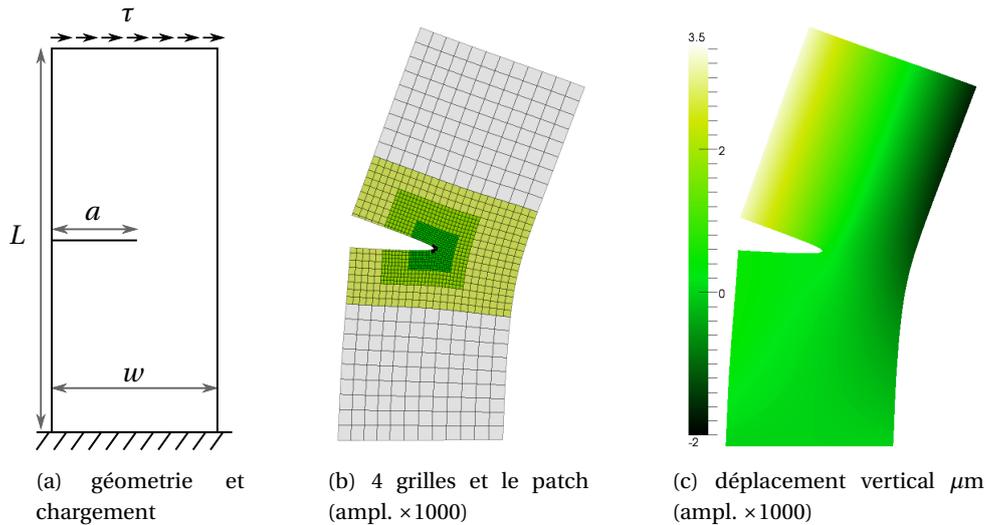


FIGURE 3.5 – Exemple d’une plaque fissurée soumise à un chargement de flexion.

3.5(a). La solution en déplacement est affichée sur la figure 3.5(c). On dispose d’une solution analytique du facteur d’intensité des contraintes [Wilson, 1969] qui sert de référence. Le problème est résolu avec une hiérarchie de plusieurs grilles X-FEM en plus du patch analytique. Cette hiérarchie est illustré sur la figure 3.5(b) dans le cas de 5 grilles. La figure 3.6(a) montre l’évolution de l’erreur relative sur les FICs en mode mixte en fonction du nombre de grilles considérées. Ce qui est remarquable, c’est que la taille du domaine

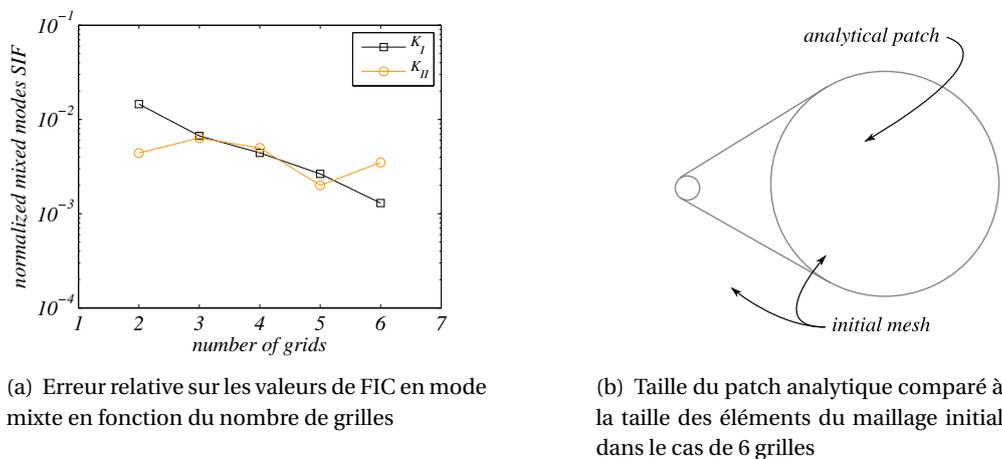


FIGURE 3.6 – Effet de la taille du patch sur la précision de la méthode.

analytique est de plus en plus petite et ceci ne dégrade pas l’estimation des FICs. Le fait de prendre plusieurs grilles aurait plutôt tendance à améliorer l’estimation, puisque les maillages X-FEM sont raffinés au voisinage de la fissure. Ce résultat permet donc d’envisager des tailles de patch très petites devant la taille des éléments fins du maillage initial, ce qui fournit un moyen simple d’adapter, *a priori*, la taille du patch en fonction de la forme de la fissure. Par exemple, la taille du patch analytique (en rouge) est comparée à la taille des éléments fins initiaux sur la figure 3.6(b).

**Bilan** Dans cette partie, nous avons vu que de l’analyse de la convergence d’un solveur, il était possible de développer des algorithmes efficaces dédiés aux problèmes de grande taille où aux problèmes multiéchelles. Une version multigrille localisée de la méthode X-FEM avec estimation directe des FICs présentées

dans le chapitre 2 a été proposée pour (1) raffiner localement le maillage au voisinage de la pointe de fissure et (2) pour pouvoir considérer des tailles de patch suffisamment petites pour pouvoir de se placer à une échelle où l'on peut considérer la fissure droite, ce qui permet de conserver une expression unique et simple des séries de Williams. Comme nous le verrons plus loin, cet algorithme peut, à peu de frais, être écrit de manière très peu intrusive, ce qui devrait permettre un transfert plus rapide.

Une perspective à ce travail serait de contrôler le nombre de grilles et leurs tailles de manière automatique pour atteindre une précision fixée, sur la base d'indicateur d'erreurs. Des travaux dans ce sens ont déjà été réalisés dans un contexte non linéaire [Fish et al., 1995, Fish and Belsky, 1995, Ekevid et al., 2004, Biotteau et al., 2012].

Enfin il serait intéressant de comparer cette approche des approches multigrilles algébriques qui ont été récemment proposées dans le cadre d'X-FEM. L'idée ici, consiste plutôt à mettre de côté les degrés de liberté enrichis [Berger-Vergiat et al., 2012] ou renuméroter les degrés de liberté [Gerstenberger and Tuminaro, 2012] pour pouvoir utiliser des solveurs AMG classiques mais efficaces.

## 1.2 Initialisation multigrille en mesure de champs

Comme expliqué dans la section précédente, le phénomène de lissage est lié à la propagation lente de proche en proche de l'information dans de nombreux algorithmes itératifs. Un phénomène pas tout à fait de même nature, mais similaire peut être observé avec le solveur de Newton appliqué à la mesure de champ par corrélation d'image numérique éléments finis (CIN-EF). En effet, pour l'illustrer, considérons des images d'un essai de traction sur une plaque trouée (pour plus de détails sur l'essai, voir [Passieux et al., 2015a]). L'image de référence et le maillage éléments finis utilisé pour faire la mesure sont présentés sur la figure 3.7. Nous traçons sur la figure 3.8 la carte de résidu initiale  $f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})$ , ainsi que l'évolution de la carte

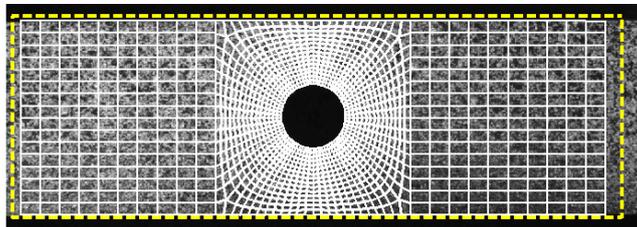


FIGURE 3.7 – Superposition de l'image de référence et du maillage éléments finis utilisé pour la mesure.

de résidu  $f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}))$  au cours des itérations. On observe que le champ de déplacement commence

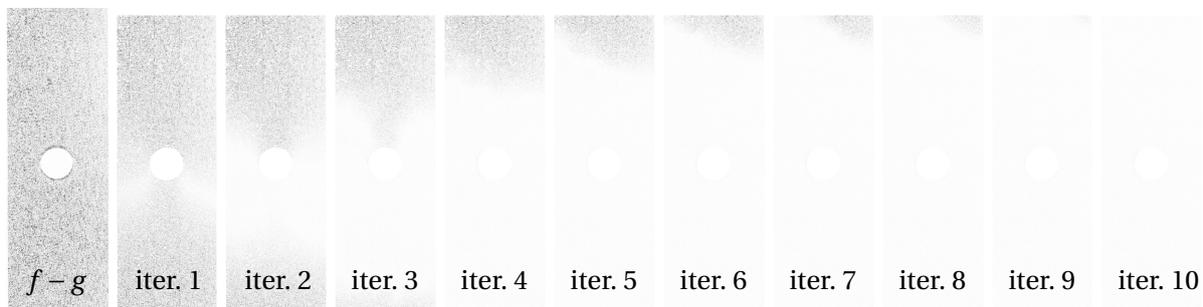


FIGURE 3.8 – Carte des résidus de différence initiale  $f(x) - g(x)$  et convergence de la carte de résidu pendant les itérations de la corrélation. La couleur noire correspond à 255 niveaux de gris de résidus, la couleur blanche correspond à un résidu nul.

à converger au centre de l'éprouvette, puis, de proche en proche, la convergence propage dans la région

d'intérêt. L'algorithme de Newton a une convergence quadratique, mais locale et sous certaines conditions (différentiabilité, stricte monotonie...). Ceci implique également que l'initialisation  $\mathbf{u}_0$  doit être proche de la solution exacte pour converger sous peine de rester bloqué dans un minimum local.

Toutes ces considérations ont conduit très tôt au développement de stratégies d'initialisation multi-grille [Hild et al., 2002, Besnard et al., 2006, Réthoré et al., 2007a, Fehrenbach and Masmoudi, 2008] afin de rendre les méthodes robustes aux grands déplacements notamment. L'idée consiste à utiliser une hiérarchie de d'images dont la définition diminue. Cette technique peut être comparée à un filtrage passe bas sur les images, afin de ne conserver que les motifs à grande longueur de variation. Cette hiérarchie d'images est souvent associée à une hiérarchie de maillages (ou d'images) de tailles croissantes, afin que la résolution soit constante, voir figure 3.9.

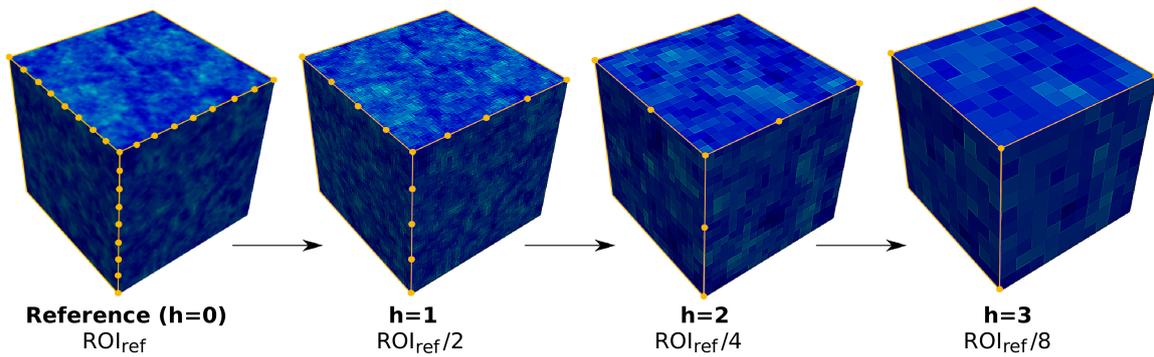


FIGURE 3.9 – Illustration de la méthode Multigrad-PGD pour l'initialisation de l'algorithme CIN.

Dans la thèse de Luis A.G Perini [Gomes Perini et al., 2014], nous avons montré que le caractère additif de la PGD (Proper Generalized Decomposition) se prêtait bien à une description multigrille de la solution. En effet, la solution est recherchée sous forme d'une somme de produits de fonctions de variables séparées, tel que mentionné dans le chapitre 2. Sauf qu'à la différence de ce qui est fait classiquement, nous considérons une somme d'approximations de rangs 1 avec des discrétisations hétérogènes. Étant donné qu'on passe par les images, aucune projection entre maillages n'est nécessaire grâce à l'utilisation de la PGD. Par exemple, la solution est recherchée sous la forme suivante [Gomes Perini et al., 2014] :

$$\mathbf{u}(x, y, z) \approx \underbrace{\sum_i \begin{pmatrix} u_i^x(x) \cdot u_i^y(y) \cdot u_i^z(z) \\ v_i^x(x) \cdot v_i^y(y) \cdot v_i^z(z) \\ w_i^x(x) \cdot w_i^y(y) \cdot w_i^z(z) \end{pmatrix}}_{1^{\text{ère}} \text{ grille}} + \dots + \underbrace{\sum_i \begin{pmatrix} u_i^x(x) \cdot u_i^y(y) \cdot u_i^z(z) \\ v_i^x(x) \cdot v_i^y(y) \cdot v_i^z(z) \\ w_i^x(x) \cdot w_i^y(y) \cdot w_i^z(z) \end{pmatrix}}_{n^{\text{ième}} \text{ grille}}$$

Le premier terme correspond aux  $n$  premières itérations sur la première grille, auxquelles on ajoute directement des corrections discrétisées plus finement associées aux itérations sur la grille suivante.

Finalement, en guise d'illustration, on étudie un problème de corrélation d'image volumique (CIV) faisant apparaître des déplacements relativement grands. L'évolution de l'indicateur de convergence  $\eta$  en fonction des itérations du Newton est tracée sur la figure 3.10(gauche) avec l'initialisation multigrille (en noir) et sans (en rouge). L'algorithme sans initialisation multigrille est mis en échec et ne parvient pas à atteindre le critère d'arrêt à  $10^{-3}$ . En revanche, avec l'initialisation multigrille, l'algorithme converge, y compris, à l'échelle 1. Nous avons montré, de plus, que l'initialisation multigrille pouvait conduire à un champ de déplacement meilleur, au sens où il minimise la carte de résidu. En effet, avec les images considérées ici, lorsque l'on ne régularise pas la mesure, on ne peut pas faire converger l'algorithme avec des éléments de taille inférieure à 30 voxels de côté (la régularisation sera présentée plus en détail dans le chapitre 4). La régularisation permet de faire converger l'algorithme et permet, de plus, de mieux recalibrer l'image déformée dans l'image de référence. Dans ce contexte, la combinaison de l'initialisation multigrille et de la régularisation permet d'améliorer encore le champ mesuré au sens de la conservation des niveaux de gris.

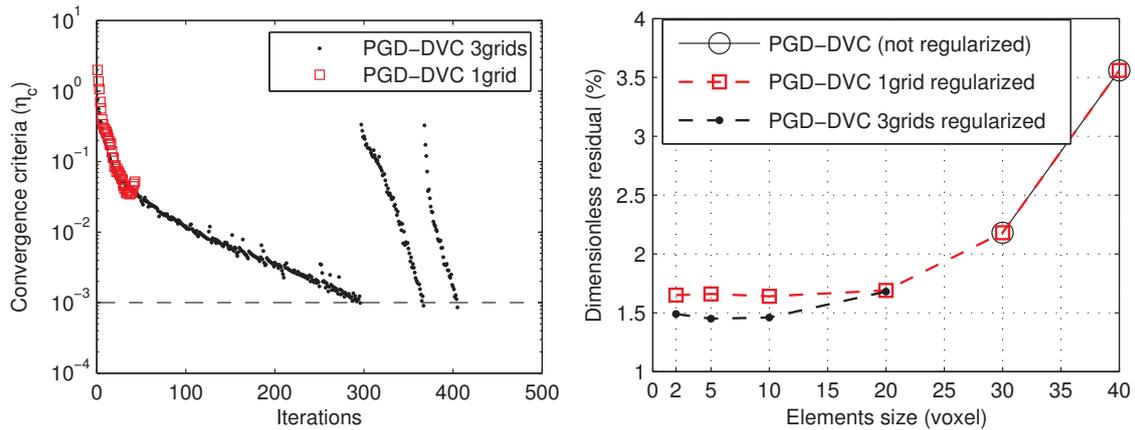


FIGURE 3.10 – effet de la méthode multigrille-PGD sur la convergence de l’algorithme. (a gauche) sans régularisation et sans multigrille, l’algorithme ne converge pas à l’échelle 1 directement avec un grand déplacement. (à droite), avec la régularisation et l’approche multigrille, la mesure est meilleure au sens où elle minimise le résidu.

**Bilan** Le concept d’approche multigrille peut trouver aussi son équivalent dans le contexte de la mesure de champ de déplacement par corrélation d’images numériques. Même si des versions avec cyclage (plus ou moins complexes) existent en CIN aussi [Fedele et al., 2013], il semble que la plupart du temps, l’approche multigrille soit purement descendante. Elle permet principalement de bien initialiser le Newton, afin d’éviter les minimums locaux. La technique la plus fréquente consiste à agréger les images et dé-raffiner le maillage. D’autres approches pourraient cependant être envisageables, comme remplacer l’agrégation des pixels par un simple filtre passe bas. Ceci est théoriquement équivalent, mais moins performant car l’agrégation de pixels a le mérite de réduire le nombre de données (pixels), ce qui fait que les problèmes sur les grilles supérieures sont très rapides. Le dé-raffinement de maillage peut également être remplacé par une régularisation de plus en plus forte à mesure qu’on montre dans les grilles. Nous verrons dans le chapitre 4 que cette solution est très pertinente dans le cas de la stéréo-corrélation d’image par éléments finis.

Enfin, le caractère additif que la PGD a été mis à profit pour développer une méthode PGD-multigrille avec somme de produits de variables séparées avec discrétisation hétérogène. On peut imaginer qu’une telle stratégie puisse avoir des applications en simulation également.

## 2 Approches locales/globales

Dans cette section, on présente des stratégies dans lesquelles, l’approche grossière mais globale est remplacée par une vision plus détaillée localement. Cette idée est illustrée dans le cadre de la simulation de grandes structures avec détails éventuellement non linéaires localement, puis dans le cadre de la mesure de champs de déplacement à partir de prises de vue à différentes résolutions.

### 2.1 Couplage local/global non intrusif

Parmi les méthodes multiéchelles de la littérature citées en introduction de ce chapitre, certaines peuvent s’avérer techniquement difficiles à implanter dans un code de calcul commercial préexistant. Du côté académique, des codes « maison » sont développés pour démontrer la faisabilité des méthodes, mais ils ne sont, en général, ni certifiés, ni adaptés à la taille des problèmes rencontrés dans l’industrie mécanique. Cette difficulté ralentit le transfert d’outils numériques innovants vers des applications industrielles réelles.

Récemment, une nouvelle classe de méthodes qualifiées de *non intrusives* permet de complexifier, raffiner ou modifier localement un modèle global avec comme parti pris de ne modifier ni la connectivité, ni l'opérateur, ni le solveur du modèle global [Whitcomb, 1991, Gendre et al., 2009][Passieux et al., 2011, Passieux et al., 2013b, Duval et al., 2015]. Ces méthodes se basent sur les entrées sorties classiques de tout code de calcul commercial. La contrepartie est que l'algorithme n'est pas direct, mais itératif. Des algorithmes de couplage non intrusifs ont été développés pour le raffinement local [Whitcomb, 1991, Laborde and Lozinski, 2015], pour prendre en compte dans un modèle global linéaire et déterministe, la plasticité locale [Gendre et al., 2009, Gendre et al., 2011][Duval et al., 2015], la propagation de fissures locales [Gupta et al., 2012][Passieux et al., 2013b, Duval et al., 2015], une singularité [Passieux et al., 2011], l'endommagement local [Daghia and Ladevèze, 2012], le contact local [Duval et al., 2015], des incertitudes locales [Chevreuil et al., 2013]. Ce type d'approche a également été étendu au couplage d'un modèle global plaque avec un détail géométrique local 3D [Guguin et al., 2014] et aussi au raffinement local de modèles isogéométriques à base de fonctions NURBS [Bouclier et al., 2015]. Des approches analogues peu intrusives ont également été développées dans le cadre de la dynamique transitoire [Chantrait et al., 2014, Bettinotti et al., 2014]. Il est facile de considérer des maillages incompatibles avec une interface géométriquement conforme [Passieux et al., 2013b][Liu et al., 2014][Duval et al., 2015]. Il est également possible de considérer une interface géométriquement non conforme [Laborde and Lozinski, 2015]. L'algorithme itératif de couplage peut être de type décomposition de domaine sans recouvrement dual-primal [Whitcomb, 1991, Gendre et al., 2009][Passieux et al., 2011, Duval et al., 2015] ou mixte [Gendre et al., 2011], de type multigrille localisé [Passieux et al., 2013b] et également basé sur la partition de l'unité [Gupta et al., 2012]. À l'algorithme itératif de base, sont ajoutées des techniques d'accélération de convergence de type quasi-Newton Symmetric Rank 1 (SR1) [Gendre et al., 2009], relaxation dynamique type Aitken  $\Delta^2$  [Liu et al., 2014] ou des techniques de relaxation statique [Chevreuil et al., 2013], l'efficacité comparative de ces méthodes a été étudiée dans [Duval et al., 2015, Bouclier et al., 2015] en fonction de la complexité du problème. Nous verrons dans la section 3 que ce type d'algorithmes peut permettre de construire une méthode de décomposition de domaine non linéaire non intrusive, qui permet de résoudre un problème non linéaire en parallèle à partir d'un code séquentiel [Duval et al., 2015].

Cette section illustre des travaux que j'ai eu la chance de pouvoir développer de façon continue depuis mon arrivée à l'ICA, d'abord en collaboration avec mes anciens collègues du LaMCoS [Passieux et al., 2013b]. Nous avons pu poursuivre ce travail grâce au soutien financier de l'ANR ICARE dans la thèse de Mickaël Duval [Duval et al., 2015] puis du postdoc de Robin Bouclier [Bouclier et al., 2015] en collaboration avec Michel Salaün, Patrick Laborde et Alexei Lozinski (aujourd'hui à Besançon).

### 2.1.1 Principe

Pour illustrer le principe de la méthode, nous considérons un modèle global linéaire élastique  $\mathcal{M}_G$  défini sur tout le domaine  $\Omega$ . On souhaite prendre en compte la présence qu'une fissure locale considérant qu'on dispose d'un modèle local X-FEM détaillé  $\mathcal{M}_L$ . On souhaite établir la solution du problème complet sur  $\Omega$  en substituant, dans la zone locale, le modèle global par le modèle détaillé, et si possible de façon non intrusive. Dans la suite, les variables indicées par  $\square_G, \square_L, \square_{G|L}, \square_{G|C}$  feront référence aux notations définies dans la figure 3.11. Nous présentons la méthode dans sa version algébrique, même si elle peut tout aussi bien s'écrire sous forme variationnelle [Duval et al., 2015][Chevreuil et al., 2013, Laborde and Lozinski, 2015]. Seule particularité,  $\mathbf{K}_{G|L}$  et  $\mathbf{K}_{G|C}$  désignent les opérateurs de rigidité dont la taille et la connectivité est la même que celles de l'opérateur global complet  $\mathbf{K}_G$  mais pour lesquelles seuls les éléments finis contenus dans la zone locale ou son complémentaire sont assemblés. Ceci permet donc d'écrire la relation de Chasles suivante  $\mathbf{K}_G \mathbf{q} = \mathbf{K}_{G|L} \mathbf{q} + \mathbf{K}_{G|C} \mathbf{q}$ , quel que soit le vecteur degrés de liberté  $\mathbf{q}$  dans la connectivité du modèle globale.

La façon la plus directe d'obtenir la solution du modèle  $\mathcal{M}_{G|C} \cup \mathcal{M}_L$  couplé est de résoudre, par exemple

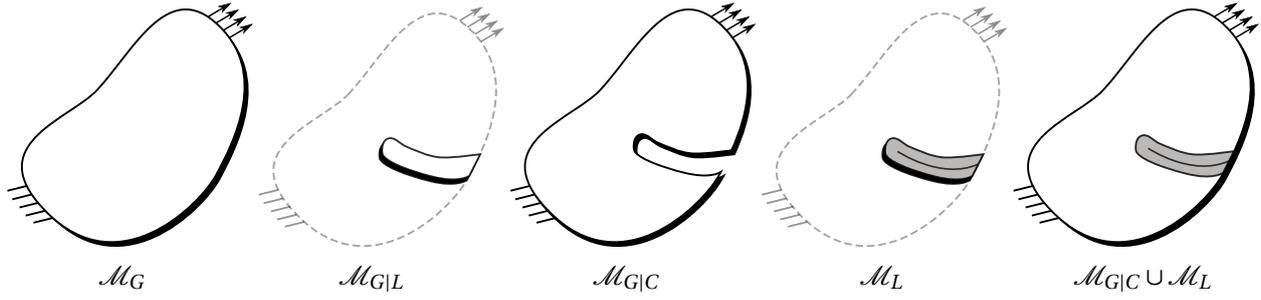


FIGURE 3.11 – Définitions des notations : (de gauche à droite)  $\mathcal{M}_G$  le modèle global linéaire complet,  $\mathcal{M}_{G|L}$  le modèle global dans la zone locale uniquement,  $\mathcal{M}_{G|C}$  le modèle global dans la zone complémentaire à la zone locale,  $\mathcal{M}_L$  le modèle local détaillé et  $\mathcal{M}_{G|C} \cup \mathcal{M}_L$  le modèle couplé dont on cherche la solution de manière non intrusive.

le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G|C} & 0 & \mathbf{C}_G^T \\ 0 & \mathbf{K}_L & -\mathbf{C}_L^T \\ \mathbf{C}_G & -\mathbf{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_G \\ \mathbf{q}_L \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

ou les opérateurs de couplage  $\mathbf{C}_G$  et  $\mathbf{C}_L$  sont soit des opérateurs booléens si les discrétisations sont conformes à l'interface  $\Gamma = \Omega_{G|C} \cap \Omega_L$ , soit des opérateurs de Mortar dans le cas incompatible [Ben Belgacem, 1999, Bernardi et al., 1994]. On fait ici l'hypothèse que le modèle local n'est soumis qu'à des conditions de bord libre (en dehors de l'interface  $\Gamma$ ) afin de simplifier les équations, mais cela n'est pas restrictif, voir [Duval et al., 2015]. Cette technique classique est exacte et directe, mais elle nécessite de construire l'opérateur  $\mathbf{K}_{G|C}$ . Or *a priori*, nous ne disposons que de l'opérateur du modèle global complet  $\mathbf{K}_G$ . De plus la géométrie du modèle local peut être amenée à évoluer en fonction de l'évolution du phénomène local (la propagation de la fissure dans notre exemple), ce qui nécessiterait de reconstruire le modèle  $\mathcal{M}_{G|C}$  et donc assembler et factoriser l'opérateur correspondant  $\mathbf{K}_{G|C}$ .

L'idée de l'approche non intrusive est d'écrire le système (3.8) sous la forme de 2 équations couplées :

$$\mathbf{K}_{G|C} \mathbf{q}_G = \mathbf{f}_G + \mathbf{C}_G^T \Lambda_L \quad (3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_L & -\mathbf{C}_L^T \\ -\mathbf{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \Lambda_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{C}_G \mathbf{q}_G \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

En utilisant la relation de Chasles citée plus haut dans la première équation (3.9), on prolonge de manière fictive la solution sous le patch local et on obtient un problème sur le modèle global complet  $\mathbf{K}_G \mathbf{q}_G = \mathbf{f}_G + \mathbf{C}_G^T \Lambda_L + \mathbf{K}_{G|L} \mathbf{q}_G$ . Ces deux problèmes couplés sont donc résolus alternativement par une technique de point fixe. Ainsi à l'itération  $k$  du point fixe, les deux problèmes suivants doivent être résolus :

$$\mathbf{K}_G \mathbf{q}_G^k = \mathbf{f}_G + \mathbf{C}_G^T \Lambda_L^{k-1} + \mathbf{K}_{G|L} \mathbf{q}_G^{k-1} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_L & -\mathbf{C}_L^T \\ -\mathbf{C}_L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^k \\ \Lambda_L^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{C}_G \mathbf{q}_G^k \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Le problème (3.11) porte sur le modèle global linéaire  $\mathcal{M}_G$  dans tout le domaine  $\Omega$  et ce quelle que soit la taille ou le type de modèle local. Le modèle local apparaît au second même comme un simple chargement nodal sur les degrés de liberté d'interface, ce qui est compatible avec la totalité des logiciels commerciaux. Le problème (3.12) porte quant à lui sur le modèle local  $\mathcal{M}_L$  avec des conditions aux limites de Dirichlet sur l'interface issues du champ de déplacement global  $\mathbf{q}_G$  précédemment obtenu. Le terme  $\mathbf{K}_{G|L} \mathbf{q}_G$  peut être soit calculé à l'aide d'un modèle local linéaire supplémentaire  $\mathcal{M}_{G|L}$  [Gendre et al., 2009, Liu et al., 2014] soit par un simple calcul de réactions nodales à l'intérieur du modèle global [Duval et al., 2015].

### 2.1.2 Un premier exemple de propagation de fissures

Pour illustrer la méthode, on traite le cas test classique de [Ingraffea and Grigoriu, 1990] déjà étudié dans [Bittencourt et al., 1996, Guidault et al., 2008, Häusler et al., 2011, Geniaut and Galenne, 2012]. Il s'agit du problème en contraintes plane sur une éprouvette en PMMA dont la géométrie, l'entaille initiale et le chargement sont décrits dans la figure 3.12(gauche).

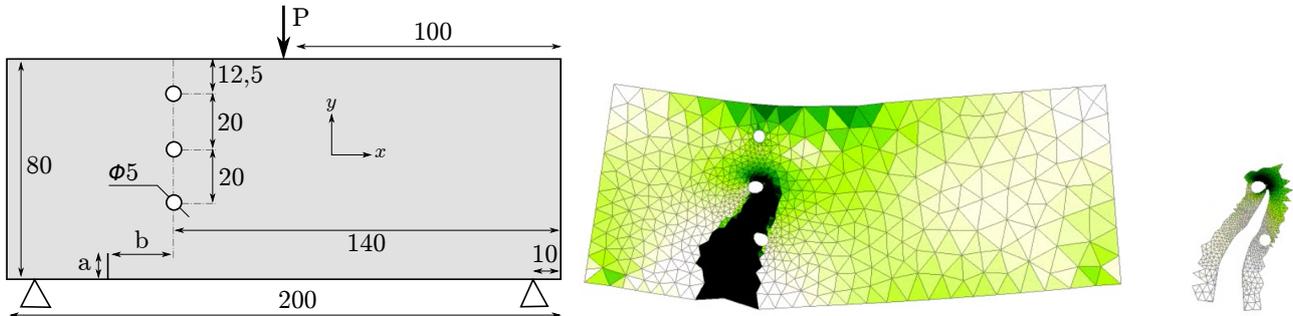


FIGURE 3.12 – Définition de l'essai de [Ingraffea and Grigoriu, 1990] et solution multiéchelle avec (au centre) la solution grossière et son prolongement fictif sous le patch et (à droite) la solution X-FEM locale.

Étant donné un maillage global donné et considéré comme immuable, un modèle local est généré en sélectionnant un sous-ensemble d'éléments finis du modèle grossier. Le maillage local peut-être raffiné, si besoin. Ici, s'agissant d'un maillage imbriqué, les opérateurs de couplage sont non booléens, mais explicites et exacts. Une interpolation X-FEM est utilisée pour le modèle local.

**Remarque.** Pour être précis, il s'agit ici d'une méthode X-FEM avec extraction directe de facteurs d'intensité de contraintes telle que décrite dans le chapitre 2 section 1.2. Dans [Passieux et al., 2013b], il est montré que l'extraction directe des FIC peut elle-même est réalisée de manière non intrusive à partir de l'algorithme proposé dans [Passieux et al., 2011] et présenté au chapitre 3 section 1.1). Nous obtenons donc une hiérarchie de 3 modèles décrivant la physique à trois échelles différentes : un modèle éléments finis standard à l'échelle de la structure (possiblement résolu par un code EF standard), un modèle local X-FEM standard à l'échelle de la fissure (possiblement résolu par un code X-FEM standard) et un modèle analytique en pointe de fissure résolu par un code dédié.

Sur la figure 3.12(centre), la solution globale exprimée en contrainte équivalente de Von Mises  $\underline{\sigma}_{\underline{g}}^{VM}(\mathbf{x})$  obtenue à la convergence du point fixe après le 30ème pas de propagation. Les éléments du prolongement fictif font apparaître une contrainte très élevée. La solution fictive  $\mathbf{u}_{G|L}$  n'a pas de sens physique. On peut montrer qu'elle est unique, mais qu'elle dépend de l'initialisation [Chevreuil et al., 2013].

Sur la figure 3.13, la géométrie du patch local au fur et à mesure de la propagation. À noter que le modèle

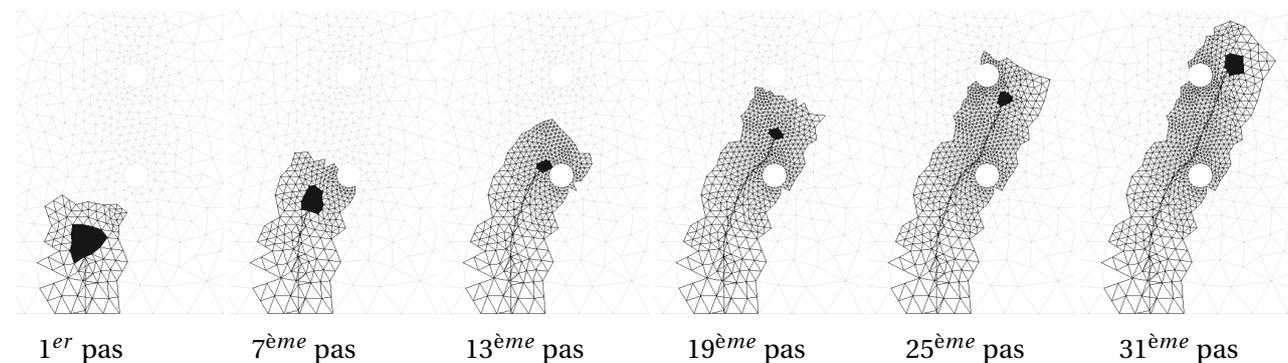


FIGURE 3.13 – Adaptivité de la géométrie du modèle local basée sur les levelsets au cours de la propagation (en noir le domaine analytique pour l'estimation directe de facteurs d'intensité des contraintes)

global, son maillage et sa connectivité ne changent jamais pendant toute la propagation. Son assemblage et sa factorisation peuvent être faites une fois pour toutes en début d'analyse. Dans le cas de la propagation de fissures, il est très simple d'adapter automatiquement la géométrie du modèle local en fonction de l'avancée de la fissure grâce notamment aux fonctions de niveaux qui décrivent la fissure. La question de la définition de la géométrie du modèle local ainsi que le choix de la finesse du maillage est encore une question ouverte dans le cas général.

**Remarque.** *Il existe une très forte analogie entre cet algorithme itératif et l'algorithme multigrille localisé (équations (3.1) à (3.3)) dont on peut montrer qu'il est non intrusif [Passieux et al., 2013b]. Des différences subsistent cependant. Le problème local (3.12) n'est pas résolu exactement, mais seulement quelques itérations de lissage suffisent. Une étape supplémentaire de correction de l'estimation courante à l'échelle locale (équation (3.1)) est intercalée entre le problème global et le problème local. Enfin, la partie locale  $\mathbf{C}_G^T \boldsymbol{\Lambda}_L^{k-1}$  du second membre du problème global (3.11) n'existe que sur l'interface  $\Gamma$ , tandis que c'est le cas seulement à convergence pour le terme  $\mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{q}$  du second membre du problème global (3.1) qui est potentiellement non nul dans tout le prolongement fictif du fait de la non convergence du solveur (opération de lissage). Au bilan, on gagne un peu en faisant peu d'itérations, mais on perd un peu en intrusivité sur le problème local et quantité de données à transférer. Ces différences sont mineures au regard de l'effet de l'utilisation ou pas d'une technique d'accélération sur l'une ou l'autre de ces approches.*

### 2.1.3 Convergence

Dans [Chevreuil et al., 2013, Laborde and Lozinski, 2015], il est montré que cet algorithme converge et que la solution est unique (la solution fictive dépendant toutefois de l'initialisation). En manipulant les équations des problèmes locaux et globaux, on peut résumer une itération du point fixe à l'opération algébrique suivante [Duval et al., 2015] :

$$\mathbf{q}_G^{k+1} = \mathbf{q}_G^k - \mathbf{K}^{-1} f(\mathbf{q}_G^k) \quad \text{avec} \quad f(\mathbf{q}_G^k) = \boldsymbol{\Lambda}_G^k + \mathbf{P}^T \boldsymbol{\Lambda}_L^k \quad (3.13)$$

avec  $\mathbf{P} = \mathbf{C}_L^{-1} \mathbf{C}_G$  le projecteur d'interface qui permet de passer du global au local et  $\boldsymbol{\Lambda}_G^k = \mathbf{K}_{G|C} \mathbf{q}_G - \mathbf{f}_G$  la réaction à l'interface côté modèle global.  $f$  est la fonction qui à  $\mathbf{q}_G$  associe le résidu d'équilibre à l'interface entre le modèle local  $\mathcal{M}_L$  et global  $\mathcal{M}_{G|C}$ . C'est ce résidu d'équilibre que l'on cherche à annuler de façon itérative. L'équation d'itération (3.13) ressemble à un algorithme de quasi-Newton sur l'équation  $f = 0$ . On montre dans [Duval et al., 2015] que le  $\nabla f \approx \mathbf{K}$  et plus précisément :

$$\nabla f = \mathbf{K} + (\mathbf{P}^T \mathbf{S}_L \mathbf{P} - \mathbf{S}_{G|L})$$

ou  $\mathbf{S}_L$  et  $\mathbf{S}_{G|L}$  sont les compléments de Schur primaux sur l'interface  $\Gamma$  du modèle local  $\mathcal{M}_L$  et fictif global  $\mathcal{M}_{G|L}$  respectivement. Ainsi on remarque que l'approximation de  $\nabla f$  par  $\mathbf{K}$  est d'autant meilleure que les rigidités des domaines fictif et local sont proches. Si le modèle local est plus rigide que le prolongement fictif grossier, cet algorithme peut devenir divergent, il faudra utiliser, *a minima*, une étape de relaxation avec un paramètre suffisamment petit [Chevreuil et al., 2013, Laborde and Lozinski, 2015].

La propagation de fissures est un exemple typique dans lequel les rigidités des domaines locaux  $\mathcal{M}_L$  et fictif  $\mathcal{M}_{G|L}$  sont très différentes, voir figure 3.11. De plus, cette différence croît avec la propagation de la fissure, ce qui peut, dans certains cas, impliquer un nombre excessif d'itérations.

#### Relaxation

En notant  $\Phi$  le mapping qui au couple  $(\mathbf{q}_L^{k-1}, \mathbf{q}_G^{k-1})$  associe la solution  $\mathbf{q}_G^k = \Phi(\mathbf{q}_L^{k-1}, \mathbf{q}_G^{k-1})$  du problème global (3.11) et  $\Psi$  le mapping qui à  $\mathbf{q}_G^k$  associe la solution  $\mathbf{q}_L^k = \Psi(\mathbf{q}_G^k)$  du problème local (3.12), alors une itération de l'algorithme s'écrit  $\mathbf{q}_G^{k+1} = \Phi(\Psi(\mathbf{q}_G^k), \mathbf{q}_G^k)$  [Chevreuil et al., 2013]. La relaxation consiste à intercaler entre le problème global (3.11) et le problème local (3.12), l'étape suivante :

$$\bar{\mathbf{q}}_G^k = \Phi\left(\Psi\left(\mathbf{q}_G^{k-1}\right), \mathbf{q}_G^{k-1}\right) \quad (3.14)$$

$$\mathbf{q}_G^k = \omega \bar{\mathbf{q}}_G^k + (1 - \omega) \mathbf{q}_G^{k-1} \quad (3.15)$$

avec  $\omega > 0$  le paramètre de relaxation. Ainsi une itération avec relaxation s'écrit  $\mathbf{q}_G^{k+1} = \mathbf{B}_\omega(\mathbf{q}_G^k)$  avec l'opérateur d'itération  $\mathbf{B}_\omega(\mathbf{q}_G^k) = \omega \Phi(\Psi(\mathbf{q}_G^k), \mathbf{q}_G^k) + (1 - \omega) \mathbf{q}_G^k = \mathbf{q}_G^k - \omega \mathbf{A}(\mathbf{q}_G^k)$  ou l'opérateur  $\mathbf{A}$  est tel que  $\mathbf{A}(\mathbf{q}_G^k) = \mathbf{q}_G^k - \Phi(\Psi(\mathbf{q}_G^k), \mathbf{q}_G^k)$ .

L'algorithme ainsi écrit converge [Chevreuil et al., 2013, Laborde and Lozinski, 2015] pour un paramètre de relaxation  $\omega$  suffisamment petit. Le paramètre de relaxation optimal est lié au spectre de l'opérateur  $\mathbf{A}$ , plus précisément [Xu, 1992]

$$\omega_{opt} = \frac{2}{\lambda_{max}(\mathbf{A}) + \lambda_{min}(\mathbf{A})}$$

ou  $\lambda_{max}(\mathbf{A})$  et  $\lambda_{min}(\mathbf{A})$  sont les extremums du spectre de  $\mathbf{A}$ . Dans [Chevreuil et al., 2013], une approximation de cet optimum est obtenue après quelques itérations de l'algorithme itératif que l'on peut interpréter comme une méthode des puissances sur  $\mathbf{B}_\omega$ . Une estimation de  $\lambda_{max}(\mathbf{A})$  est donc déterminée après deux ou trois itérations, et le paramètre  $\omega$  est fixé à  $\omega^* = 1/\lambda_{max}(\mathbf{A})$

### Relaxation dynamique, Aitken $\Delta^2$

Une alternative est d'utiliser une relaxation dynamique, c'est-à-dire que le paramètre  $\omega$  change à chaque itération. Par exemple, une technique basée sur Aitken  $\Delta^2$  [Irons and Tuck, 1969] permet d'accélérer un algorithme de point fixe [Küttler and Wall, 2008, Liu et al., 2014]. Si on note  $\delta_{k+1} = (\bar{\mathbf{q}}_G^{k+1} - \mathbf{q}_G^k)$  alors le paramètre de relaxation à l'itération  $k$  s'obtient par la formule récursive :

$$\omega_k = -\omega_{k-1} \frac{\delta_k^T (\delta_{k+1} - \delta_k)}{\|\delta_{k+1} - \delta_k\|}$$

Cette méthode initialement développée comme un quasi-Newton pour accélérer un point fixe sur une suite de scalaires se montre efficace pour accélérer l'algorithme pour un surcoût minimal.

### Accélération SRI

Une autre façon d'accélérer l'algorithme est de mettre à jour  $\mathbf{K}$  par des corrections de rang 1 symétriques successives [Gendre et al., 2009]. On considère une suite d'opérateurs  $\mathbf{K}_k$  initialisée par  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_G$  qui converge vers  $\nabla f$  définie par la relation récursive :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{K}_k + \frac{f_{k+1} f_{k+1}^T}{\mathbf{d}_k^T f_{k+1}}$$

en notant  $\mathbf{d}_k = \mathbf{q}_G^{k+1} - \mathbf{q}_G^k$  et  $f_k = f(\mathbf{q}_G^k)$ . Les opérateurs  $\mathbf{K}_k$  de cette série ne sont évidemment pas calculés. Pour conserver le caractère non intrusif de la méthode, il est possible de recourir à la formule de Shermann-Morisson qui permet de ne pas modifier l'opérateur  $\mathbf{K}$ . Pour rester non intrusif, le prix à payer est que cette formule doit être appliquée  $k - 1$  fois à l'itération  $k$ . Pour tout  $i < k$

$$\mathbf{K}_{i+1}^{-1} f_k = \mathbf{K}_i^{-1} f_k - \mathbf{K}_i^{-1} f_{i+1} \frac{f_{i+1}^T \mathbf{K}_i^{-1} f_k}{f_{i+1}^T (\mathbf{d}_i + \mathbf{K}_i^{-1} f_{i+1})}$$

Cela demande de plus de conserver le champ de déplacement total  $\mathbf{q}_G^k$  de chaque itération. Mais le surcoût reste marginal par rapport à la réduction spectaculaire du nombre d'itérations que cette technique apporte.

#### 2.1.4 Illustrations

Les techniques d'accélération de convergence sont analysées au travers de trois exemples issus de [Duval et al., 2015]. D'abord, reconsidérons l'exemple de la propagation de fissure pour comparer la méthode de point fixe initiale avec les deux méthodes d'accélération de convergence Aitken  $\Delta^2$  et SRI. Pour

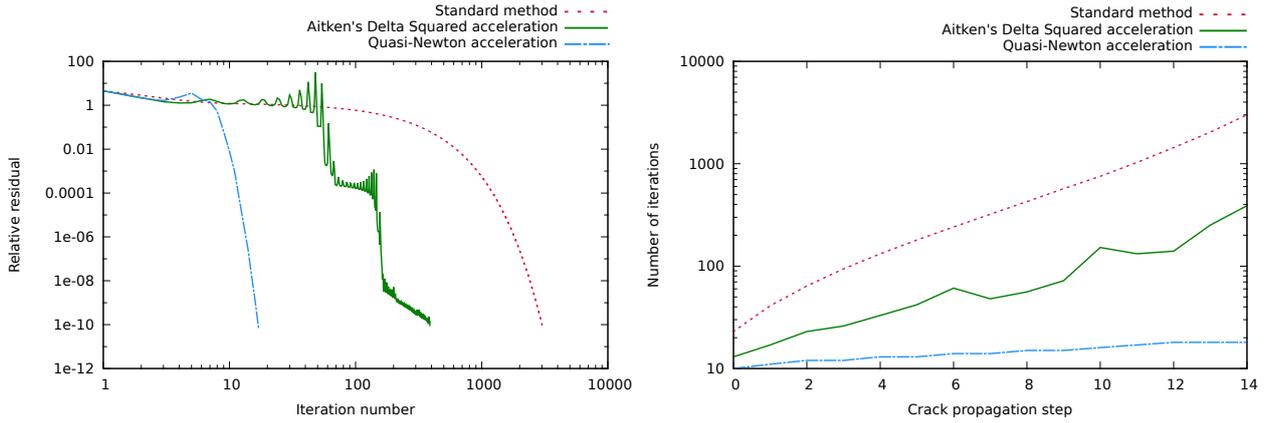


FIGURE 3.14 – Accélération de convergence. Exemple de propagation de fissure : (à gauche) convergence des différents algorithmes pour une longueur de fissure donnée ; (à droite) nombre d’itération à convergence en fonction de l’avancée de la fissure pour les différents algorithmes.

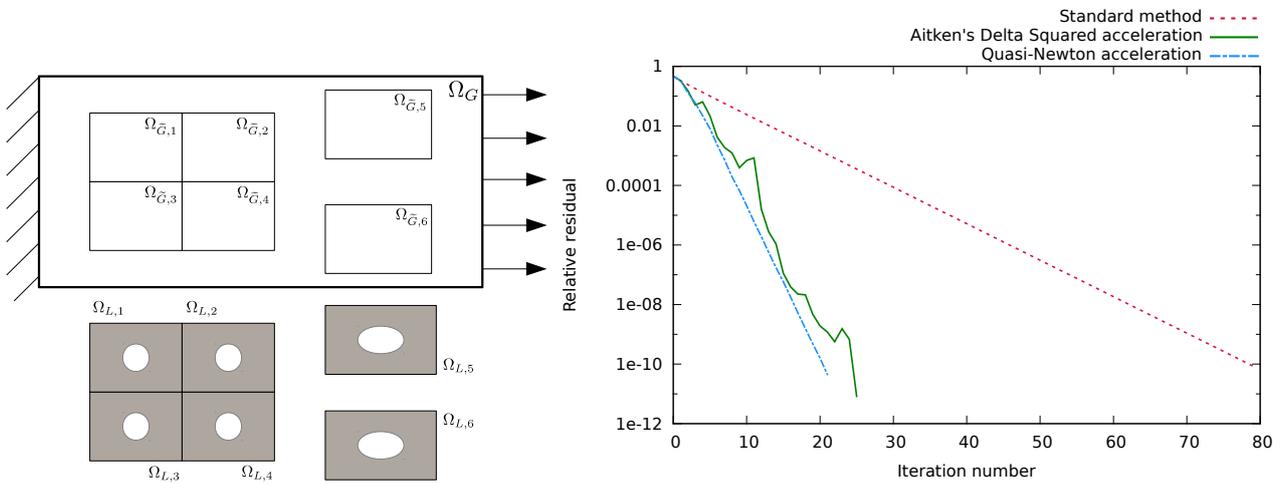


FIGURE 3.15 – Accélération de convergence. Exemple avec des patches élasto-plastiques intersectés : (à gauche) Problème de référence ; (à droite) convergence des différents algorithmes.

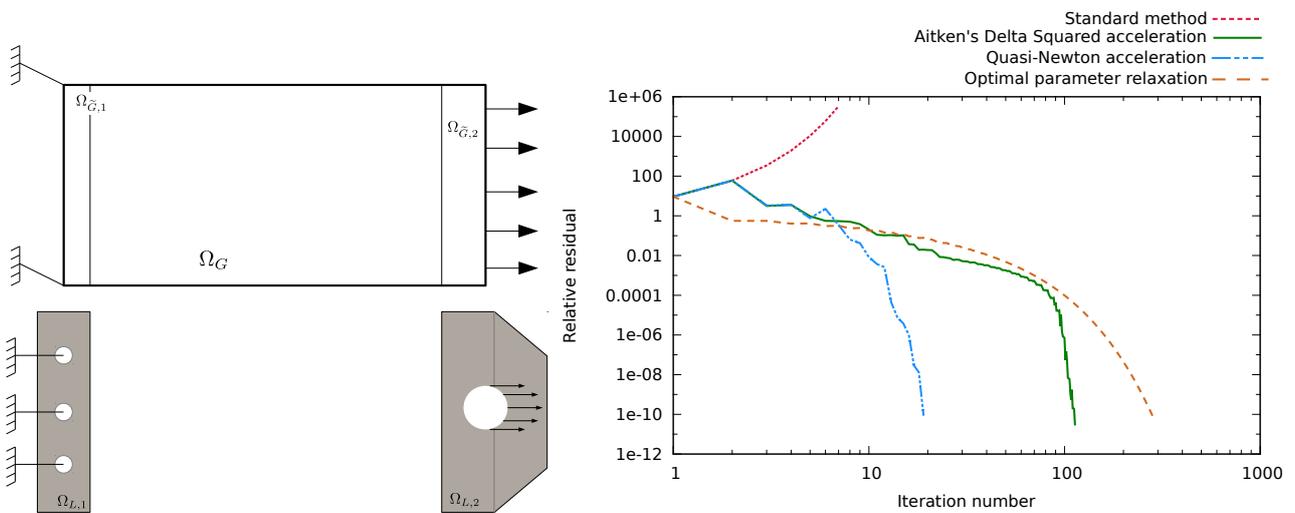


FIGURE 3.16 – Accélération de convergence. Exemple avec plasticité et patch local plus rigide que le modèle global fictif : (à gauche) Problème de référence ; (à droite) convergence (ou divergence) de l’algorithme.

une longueur de fissure donnée (14ème pas de propagation), on trace sur la figure 3.14(gauche) l'évolution, en fonction des itérations  $k$ , de l'indicateur de convergence basé sur le défaut d'équilibre à l'interface :

$$\eta = \frac{\|f(\mathbf{q}_G^k)\|}{\|\mathbf{f}_G\|}$$

Dans ce cas, la méthode Aitken  $\Delta^2$  permet de passer de plus de 3000 itérations à seulement 390. Il suffit de seulement 18 itérations pour que l'algorithme avec accélération SR1 atteigne le même niveau d'erreur  $\eta < 10^{-10}$ . Le léger surcoût d'une itération avec SR1 est largement compensé par le gain en convergence dans ce cas là, même par rapport à Aitken  $\Delta^2$ . Cette conclusion doit cependant être relativisée dans la mesure où la fissure est, dans ce cas, du même ordre de grandeur que la structure dans laquelle elle évolue, la notion de "local/global" étant quelque peu dévoyée. L'évolution du nombre d'itérations nécessaire à atteindre la convergence est tracée en fonction de l'avancée de la fissure sur la figure 3.14(droite). On remarque que le nombre d'itérations explose littéralement avec la méthode standard, et qu'il augmente également sensiblement avec Aitken. En revanche, il reste, sinon stable, au moins très raisonnable avec l'accélération SR1.

On considère ensuite un exemple avec de multiples patches qui s'intersectent possiblement. Chaque patch permet de prendre en compte un détail géométrique (un trou) et également un modèle raffiné élastoplastique à écrouissage linéaire. Le problème global est présenté sur la figure 3.15(gauche). La convergence du critère  $\eta$  en fonction des itérations est donnée sur la figure 3.15(droite). Dans le cas de la plasticité (cas déjà étudié séparément dans [Gendre et al., 2009] et [Liu et al., 2014]), les deux techniques d'accélération de convergence se valent. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'en plasticité, la différence de rigidité est très faible, mais lorsqu'il y a écrouissage. Ceci est d'ailleurs corroboré par le fait que le point fixe standard met seulement 35 itérations pour atteindre une précision de  $10^{-3}$ .

Un dernier exemple avec deux patches locaux élastoplastiques est étudié. La particularité de cet exemple est que la condition aux limites de Dirichlet dans le modèle global est plus souple que celle présente dans le domaine local, voir figure 3.16(gauche). De ce fait, la rigidité apparente du modèle local est supérieure à celle du modèle global fictif. Comme mentionné plus haut, le point fixe ne converge pas en général dans ce cas là. C'est le cas, comme on peut le voir sur la figure 3.16(droite). Comme suggéré dans [Chevreuil et al., 2013, Laborde and Lozinski, 2015], la relaxation avec un paramètre optimal permet à l'algorithme de converger. Il est intéressant de constater également que la relaxation dynamique est une véritable technique d'accélération de convergence en ce sens qu'elle converge plus vite que la relaxation statique avec le paramètre optimal. Enfin, ici encore, l'accélération SR1 est de loin la technique d'accélération la plus efficace.

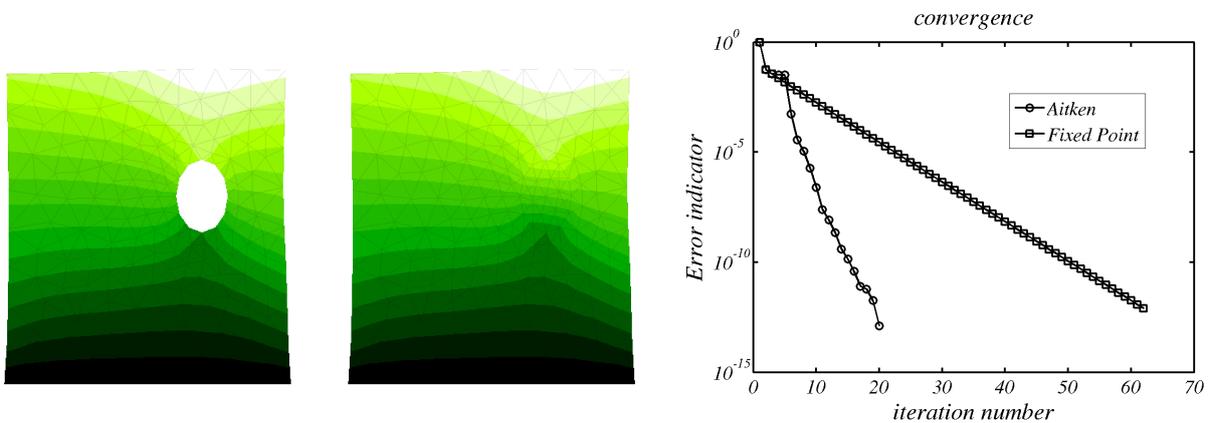


FIGURE 3.17 – Illustration du concept de domaine fictif non intrusif (EF compatibles). (À gauche) la solution de référence  $\mathbf{q}_{G|C}$ , (au centre) la solution  $\mathbf{q}_G$  à convergence et (à droite) la courbe de convergence correspondante. Après 4 itérations avec l'accélération Aitken, le critère de convergence est inférieur à  $10^{-3}$ .

**Bilan** La stratégie de couplage local/global non intrusif muni d'une technique d'accélération efficace devrait permettre de coupler plus facilement des codes industriels à l'échelle globale et des codes détaillés dédiés à l'échelle locale. C'est un exemple intéressant de transformation d'une problématique industrielle réelle et assez forte en un véritable enjeu scientifique, qui a permis de développer des outils originaux qui devraient permettre un transfert plus rapide des outils de recherche vers leur application dans l'industrie. De nombreuses questions restent ouvertes. La question de la définition de la géométrie du modèle local, ainsi que le choix de la finesse du maillage est encore une question largement ouverte dans le cas général. Dans le cas linéaire, des estimateurs d'erreur dédiés peuvent être exploités pour adapter automatiquement le modèle local. Nous y travaillons, dans la thèse de Mickaël Duval en collaboration avec Alexeï Lozinski du laboratoire de mathématiques de Besançon. Par ailleurs, nous travaillons également à la transposition de cette méthode au cas du raffinement local de modèles isogéométriques à base de fonctions NURBS [Bouclier et al., 2015]. En effet, les fonctions NURBS sont obtenues par produit tensoriel de fonctions unidimensionnelles à l'intérieur de chaque patch NURBS. Raffiner à un endroit revient quelque peu à raffiner dans tout le patch NURBS. Enfin, nous tentons actuellement d'étendre le concept à la question du domaine fictif. Dans ce cas, le modèle local est un trou, l'algorithme se simplifie et se résume à itérer sur le modèle global seul. Une illustration est présentée sur la figure 3.17, même si cet exemple éléments finis compatible a peu d'intérêt en soi, il permet de voir qu'avec quelques itérations (ici environ 4), il est possible d'obtenir une solution correcte. Ceci aura surtout un intérêt en NURBS car les géométries issues de la CAO sont en fait des surfaces découpées ("*trimmed surfaces*") par une ligne de découpage ("*trim curve*"). Un algorithme basé sur un domaine global NURBS de la surface que l'on ne modifie pas et qui est capable de prendre en compte la présence d'un trou par un chargement local le long de la ligne de découpage aurait certainement un impact important dans la communauté de l'analyse isogéométrique.

## 2.2 Mesure de champs de déplacement locale/globale

En mesure par corrélation d'images, un compromis doit être choisi entre résolution de mesure et étendue de la région instrumentée, de manière tout à fait analogue au compromis qui existe entre la taille du domaine d'étude et la finesse du modèle pour ce qui est du calcul de structures. En effet, la résolution de la mesure par corrélation d'image numérique est intrinsèquement liée à la taille du pixel. Si l'on souhaite obtenir une mesure sur une grande région (par exemple pour mesurer les conditions aux limites expérimentales vraies, dont on verra qu'elles sont de premier ordre pour l'identification de paramètres matériaux), il faudra accepter une résolution de mesure plutôt grossière ; la définition des capteurs, aussi grande soit-elle, est finie. À l'inverse, si l'on souhaite améliorer la résolution de mesure, il faudra accepter de se focaliser sur une zone d'intérêt locale. De plus, en simulation, le maillage est souvent adapté, afin qu'il soit raffiné dans les zones à fort gradient, et grossier ailleurs. Faire la mesure avec un tel maillage va conduire à des incertitudes de mesures hétérogènes, voir figure 3.18. Il faut pouvoir adapter la mesure localement en fonction de la finesse du maillage du modèle que l'on souhaite valider.

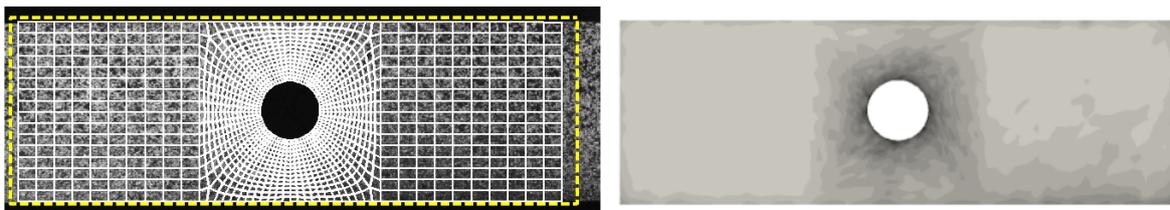


FIGURE 3.18 – Exemple de maillage hétérogène (à gauche) adapté aux gradients locaux de la solution va conduire à des incertitudes de mesure hétérogènes (à droite) estimées par la relation (1.17)

Dans le cadre de la thèse de Christoph David [David, 2014], nous avons donc proposé d'instrumen-

ter un essai à partir d'images prises à deux niveaux de résolutions différentes [Passieux et al., 2015a]. Une caméra qui observe l'éprouvette en champ lointain et une qui l'observe en champ proche, dans une région d'intérêt (par exemple là où les gradients sont forts ou là où les champs mesurés sont sensibles aux paramètres que l'on cherche à identifier...) avec une meilleure résolution. Réaliser une telle mesure n'est pas si direct que cela, tant sur le plan expérimental, que sur l'analyse des images a posteriori. Afin de pouvoir quantifier la performance de la méthode et le potentiel gain qu'elle peut apporter, il a été nécessaire de construire un essai mécanique entièrement synthétique. La solution analytique d'une plaque orthotrope infinie trouée en son centre et soumise à un chargement de tension à l'infini est donnée par [Lekhnitskii et al., 1968]. Cette solution analytique a déjà été utilisée pour l'identification à partir de mesures de champs dans [Molimard et al., 2005]. Partant d'une image de référence synthétique basée sur le bruit de Perlin [Perlin, 1985], une image dans un état déformé est générée par advection, ici dans le logiciel Texgen [Orteu et al., 2006]. La solution analytique en champ proche, et deux exemples d'images de référence champ proche  $f^p(\mathbf{x})$  et lointain  $f^l(\mathbf{x})$  sont proposés figure 3.19.

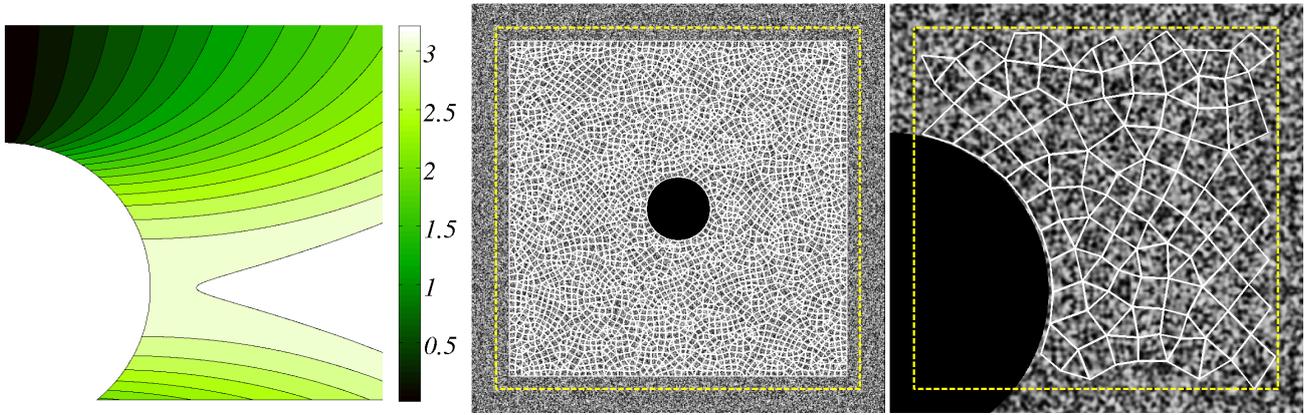


FIGURE 3.19 – Images synthétiques : solution analytique (à gauche), image de référence en champ lointain (au centre) et image de référence en champ proche (à droite). Exemple de maillage éléments finis non structuré avec une taille moyenne d'éléments de 16 pixels en champ lointain et 79 pixels en champ proche.

Étant données ces images, la première difficulté est de placer le maillage éléments finis (ou les imageries dans le cas d'une méthode "subset-based") dans chaque image de référence de façon à ce que les noeuds du maillage correspondent parfaitement. Pour ce faire nous avons proposé un algorithme de type corrélation d'images pour mesurer le plus précisément possible la transformation entre les deux images  $f^l$  et  $f^p$ . L'éprouvette étant considérée plane, nous nous sommes basés sur une homographie, qui en coordonnées homogènes est linéaire. Il s'agit d'un mapping inversible de points dans le plan projectif correspondant à un mouvement de corps rigide d'un plan. En d'autres termes, si un point  $\mathbf{x}$  dans l'image de référence en champ proche appartient à ce plan, alors le point  $\mathbf{x}'$  correspondant dans l'image de référence en champ lointain est donné par l'opérateur linéaire en coordonnées homogènes  $\mathbf{H} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ , tel que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x'/z' \\ y'/z' \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}'} \leftarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} \quad (3.16)$$

Parmi les 9 termes de  $\mathbf{H}$ , seuls 8 sont indépendants. Pour les déterminer à partir des images de référence, le problème de corrélation d'images particulier suivant est résolu :

$$\mathbf{H}^* = \arg \min_{\mathbf{H} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})} \int_{\Omega} \left( f^p(\mathbf{x}) - f^l(\mathbf{H}\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

Puisque le but de cette étude est d'analyser des images à différentes échelles, cet algorithme ne peut pas converger en initialisant de façon arbitraire. En pratique un algorithme non sensible aux facteurs d'amplification tel que SIFT [Lowe, 2004] est utilisé pour initialiser. Les composantes de  $\mathbf{H}$  ont une interprétation physique, voir [Passieux et al., 2015a]. Dans le cas des images synthétisées, qui sont donc parfaitement fronto-parallèles avec un facteur d'échelle de 1 : 5, on connaît l'opérateur  $\mathbf{H}_{ref.}$  de référence, et la mesure par la démarche proposée donne des résultats satisfaisants :

$$\mathbf{H}_{ref.} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 500 \\ 0 & 1/5 & 360 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{mesuré}^* = \begin{pmatrix} 0.199899 & 5.86 \cdot 10^{-6} & 499.812 \\ -3.41 \cdot 10^{-5} & 0.199985 & 359.793 \\ -1.22 \cdot 10^{-7} & -1.11 \cdot 10^{-10} & 1 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est corroboré par une carte de résidu dont l'écart type vaut seulement 1.14% de la dynamique.

Maintenant que la transformation entre les échelles est estimée avec précision, on peut placer le maillage de façon correspondante dans les deux images de référence. Il est alors possible de faire une mesure éléments finis séparément en champ proche et en champ lointain, puis d'analyser les niveaux d'incertitudes correspondants. En corrélation d'images numériques, l'incertitude de mesure la plus limitante est l'erreur aléatoire [Bornert et al., 2009, Wang et al., 2009]. On va quantifier l'incertitude aléatoire de trois façons différentes :

- **L'erreur ultime** quantifie seulement les incertitudes de mesure qui proviennent du caractère mal posé de la CIN. Cette erreur est estimée en générant une image synthétique déformée par un champ de déplacement  $\mathbf{u}_{ref}^{shift}$  contenu dans le sous-espace d'approximation  $\mathcal{V}^h$  (typiquement une translation de corps rigide sub-pixel [Besnard et al., 2006, Bornert et al., 2009]) tel que décrit dans le chapitre 2. La mesure CIN-EF fournit un champ de déplacement  $\mathbf{u}_{meas}$  dont on quantifie l'erreur aléatoire par :

$$\sigma^{ult} = \sigma(\mathbf{u}_{meas} - \mathbf{u}_{ref}^{shift}) \quad (3.18)$$

- **L'erreur de modèle** correspond à ce qu'on appelle l'erreur d'interpolation en éléments finis. Elle est estimée en projetant dans le sous-espace d'approximation  $\mathcal{V}^h$  un champ de déplacement analytique n'y appartenant pas. Ici la solution analytique de Lekhnitskii  $\mathbf{u}_{ref}^L$  est projetée dans  $\mathcal{V}^h$  au sens des moindres carrés :

$$\sigma^{mod} = \sigma(\mathbf{u}_{proj} - \mathbf{u}_{ref}) \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}_{proj} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}^h} \sum_{i=1}^m (\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u})^2 \quad (3.19)$$

- **L'erreur totale** prends en compte les deux sources d'incertitudes précédentes et est estimée en générant une image synthétique déformée par un champ non contenu dans  $\mathcal{V}^h$  (ici  $\mathbf{u}_{ref}^L$ ), puis on effectue la mesure CIN-EF avec ces images. L'erreur est alors estimée par :

$$\sigma^{tot} = \sigma(\mathbf{u}_{meas} - \mathbf{u}_{ref}^L) \quad (3.20)$$

Les évolutions des valeurs de ces trois erreurs en fonction de la taille des éléments finis du maillage (en mm) sont présentées sur la figure 3.20 et ce pour chaque échelle.

On constate d'abord des résultats classiques, l'erreur ultime est d'autant plus grande que la taille des éléments finis est petite. Le champ de déplacement utilisé pour estimer cette erreur étant inclus dans  $\mathcal{V}^h$ , des grandes tailles d'éléments conduisent à une incertitude très faible. À l'inverse l'erreur de modèle est d'autant plus grande que la taille des éléments finis grande. Avec peu d'éléments, le maillage peine à représenter la solution correctement. L'erreur totale prend en compte les deux précédentes. On peut donc visualiser le compromis résolution/incertitudes de la CIN. Il apparaît clairement qu'avec une seule prise de vue à une résolution donnée, l'incertitude de mesure admet un minimum en dessous duquel il n'est pas possible d'aller. La seule façon de contourner ce problème est donc d'utiliser des images de résolution inférieure.

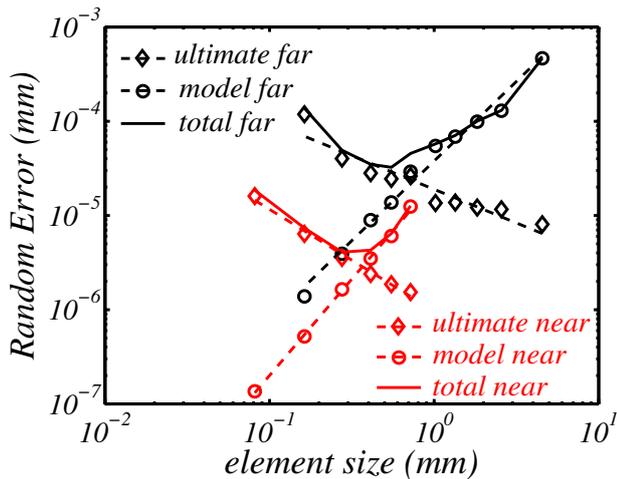


FIGURE 3.20 – Évolution des erreurs aléatoires ultime (diamants), de modèle (cercles) et totale (trait plein) en fonction de la taille des éléments en millimètre pour le champ proche (en rouge) et lointain (en noir).

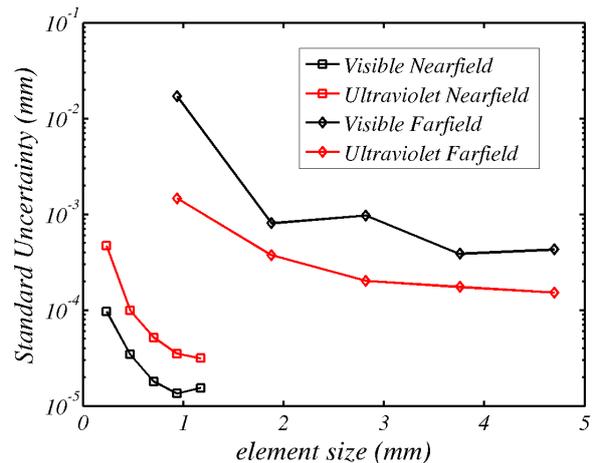


FIGURE 3.21 – Analyse d'incertitudes *a priori* à partir des images multiéchelles de la figure 3.22. Le mouchetis en lumière blanche semble fournir de meilleurs résultats que celui en UV en champ proche. C'est le contraire en champ lointain.

Avec une image de résolution 5 fois plus petite, ce minimum est réduit de près d'un ordre de grandeur. Ce résultat surprenant peut s'expliquer par le fait que : (a) d'une part l'incertitude est liée à la taille du pixel, donc si celle-ci diminue, l'incertitude diminue ; et (b) d'autre part, à maillage fixé, le nombre de pixels par élément augmente d'autant. Il paraît donc logique que le gain sur l'incertitude de mesure soit supérieur au ratio de résolution des images. Cette méthode de mesure multiéchelle permet d'obtenir, comme dans le paragraphe précédant une solution hybride définie par une mesure grossière partout sauf dans la région locale où elle est remplacée par la mesure en champ proche plus résolue. Cette méthode est appliquée à l'identification de paramètres constitutifs dans le chapitre 4.

**Bilan** Une première méthode de mesure locale/globale a donc été présentée dans le cadre de la CIN-EF-2D. Cette technique permet d'améliorer localement la résolution de mesure tout en fournissant des mesures à l'échelle lointaine. Nous verrons dans le chapitre suivant l'intérêt que ce genre de mesures multiéchelles peut avoir dans le contexte de l'identification. On ne peut pas s'empêcher de penser que ce genre de méthode de mesure multiniveau semble une démarche adaptée à la validation et/ou à l'identification d'un modèle multiéchelle local/global évoqué plus haut. Évidemment l'extension à la stéréo-CIN de ce travail préliminaire est la suite logique vers laquelle il faut se diriger. Enfin une question fondamentale reste en suspens, celle du mouchetis. En effet, le rayon de corrélation optimal du mouchetis s'exprime en pixels. Prendre des images à des résolutions différentes implique d'avoir un mouchetis adapté à chaque échelle. Ceci peut se faire avec un seul mouchetis intrinsèquement multiéchelle (fractale par exemple) que l'échantillonnage spatial va filtrer à différentes longueurs d'onde. Une autre possibilité est de superposer deux mouchetis optimaux pour les deux échelles d'observation, mais n'interagissant pas. Par exemple, sur la figure 3.22, un mouchetis en peinture aérosol classique est déposé et recouvert par un mouchetis à base de peinture UV invisible. En lumière blanche, on ne voit que le mouchetis fin, et en lumière UV, on voit le mouchetis grossier. Les premières analyses *a priori* d'incertitudes semblent indiquer que cette technique est viable, voir Fig. 3.21. Ces tests préliminaires montrent que la technique mérite d'être étudiée davantage.

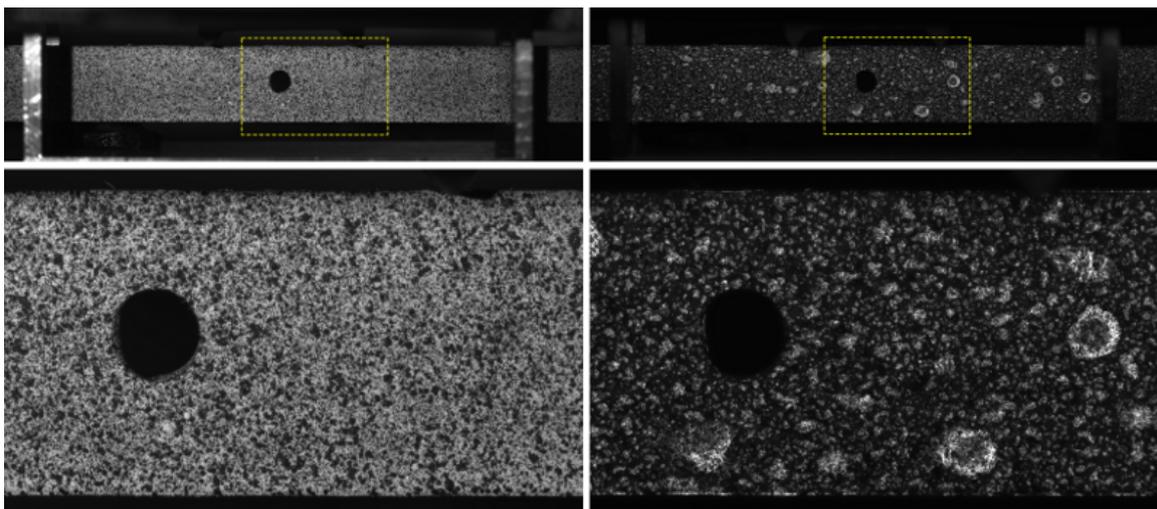


FIGURE 3.22 – Superposition de mouchetis fin standard et grossier invisible. Sous lumière blanche (à gauche) et sous ultraviolets (à droite) ; le vision en champ lointain (en haut) et en champ proche (en bas).

### 3 Décomposition de domaine

Historiquement, les méthodes de décomposition de domaine s'appuyaient sur des partitions recouvrantes du domaine, comme par exemple les méthodes de Schwarz [Lions, 1987]. Les approches sans recouvrement ont été préférées car plus simple à implanter et à utiliser, et également parce qu'elle correspondent mieux aux assemblages mécaniques. Le principe des méthodes primales (telles que Balancing Domain Decomposition (BDD) [Mandel, 1993]) est d'imposer la continuité des déplacements à l'interface et de rechercher de façon itérative l'équilibre des réactions. À l'inverse, les méthodes duales (telles que Finite Element Tearing and Interconnecting, FETI [Farhat and Roux, 1991]) imposent la continuité des efforts à l'interface et obtiennent itérativement la continuité du déplacement. Des méthodes mixtes (la méthode LATIN [Ladevèze, 1999] ou FETI-2LM [Roux, 2009]) traitent les deux inconnues de manière symétrique en imposant une combinaison linéaire des inconnues d'interface (*i.e.* condition de Fourier-Robin), introduisant ainsi un paramètre supplémentaire. Une méthode hybride a également été proposée qui unifie les approches primales et duales [Gosselet and Rey, 2006]. Elle permet d'utiliser une approche primale pour certains degrés de liberté et duale pour les autres, ce qui peut avoir du sens pour des problèmes multiphysiques.

Les méthodes itératives initiales n'étaient pas à proprement parler extensible, c'est-à-dire que le nombre de sous-domaines a un effet très fort sur le nombre d'itérations, ce qui pose un problème pour le calcul massivement parallèle. D'abord, l'usage d'un problème grossier associé à un préconditionneur dual dans BDD [Mandel, 1993] améliore l'extensibilité. Un problème grossier associé aux modes de corps rigides des sous-domaines flottants dans FETI apporte également un gain notable [Farhat and Roux, 1991]. De façon similaire, un problème *macro* est utilisé dans la méthode LATIN [Ladevèze and Dureisseix, 2000, Ladevèze et al., 2001] pour assurer la continuité des efforts et moments résultants sur chaque interface.

**Remarque.** *Ce problème grossier rend la méthode extensible pour un problème de statique. En effet, en vertu du principe de Saint Venant, un problème grossier capable de faire propager à toute la structure les résultantes et moments résultants sur chaque interface, permet de faire passer l'information à grande échelle, tandis que les inconnues d'interface à résultante et moment nuls n'ont qu'un effet local. Dans le cas particulier des problèmes d'évolution, le problème grossier n'est pas suffisant à rendre la méthode extensible. Le problème est qu'il n'y a pas, comme c'est le cas en espace, un découpage simple micro/macro ayant un sens physique. Le principe de Saint Venant affirme même que le problème macro devrait être micro en temps pour être extensible. L'usage d'une base macro temporelle polynomiale ne permet pas de résoudre*

le problème [Nouy and Ladevèze, 2004]. Une base réduite adaptative s'appuyant sur une SVD tronquée des solutions d'interface permet de rendre à la méthode son caractère extensif pour les problèmes d'évolution [Passieux et al., 2010].

Des traitements spéciaux de degrés de liberté de coin, FETI-DP [Farhat et al., 2001] and BDDC [Dohrmann, 2003, Mandel and Dohrmann, 2003] améliore encore la convergence et l'extensibilité par rapport aux méthodes standard. Malgré ces efforts, les performances peuvent être très dégradées dans le cas de fortes hétérogénéités, des traitements particuliers sont alors développés à base de modes d'interfaces [Spillane and Rixen, 2013, Spillane et al., 2014] ou de stratégies bloc en exploitant plusieurs directions de recherche [Gosselet et al., 2015].

### 3.1 Décomposition de domaine non linéaire et non-intrusive

Les problèmes non linéaires peuvent également être résolus par décomposition de domaine. Le plus souvent, le solveur de décomposition de domaine est utilisé pour résoudre les prédictions linéaires issues d'un algorithme de type Newton. On parle de méthodes Newton-Krylov-Shur (NKS). Cependant, dans le cas de non-linéarités, cette association n'est pas la plus efficace. Des méthodes avec localisation non linéaire consistent à inverser les itérations du problème d'interface avec celle du problème non linéaire [Cresta et al., 2007, Pebrel et al., 2008b]. Ces approches s'avèrent plus efficaces dans le cas de non-linéarités localisées. L'effort est concentré sur les problèmes locaux non linéaires, ce qui permet de réduire le nombre d'itérations globales. C'est également le concept de base de la méthode LATIN [Ladevèze et al., 2002]. Le problème de ces approches est qu'elles représentent une forte complexité d'implantation. Elles nécessitent une gestion du parallélisme et des itérations au sein même du solveur éléments finis. Ce qui en fait des méthodes très intrusives.

**Remarque.** Dans ce contexte, la méthode de réduction de modèle pour le post-flambement de panneaux raidis décrite dans la section 2.2 du chapitre 2 a été étendue à la décomposition de domaine non linéaire dans la thèse de Ludovic Barrière [Barrière, 2014]. Bien qu'elle montre des résultats encourageants, elle fait intervenir, le modèle non linéaire de plaque, un solveur non linéaire de Newton en base réduite avec enrichissement à la volée, imbriqué dans un solveur de décomposition de domaine avec gestion du parallélisme. Cette méthode a été développée dans un code recherche dédié à des cas tests académique pour montrer la faisabilité. Mais on est loin des applications industrielles qui en ont motivé le développement.

Dans le cadre de la thèse de Mickaël Duval [Duval et al., 2015], nous avons proposé de développer un algorithme de décomposition de domaine non linéaire basé sur l'algorithme de couplage local/global non intrusif présenté plus haut. On considère un ensemble de modèles locaux qui forment une partition non recouvrante du modèle global. Ainsi, une itération de l'algorithme global/local implique :

- une résolution globale linéaire sur la structure complète, avec des efforts supplémentaires sur les interfaces.
- une résolution locale non linéaire par sous-domaine, avec des conditions aux limites de Dirichlet.

Contrairement aux méthodes classiques de décomposition de domaine, cette méthode nécessite de résoudre un problème linéaire sur tout le domaine. En pratique l'opérateur est assemblé et factorisé une fois pour toutes au début de l'algorithme et seules des montées-descentes sont effectuées à chaque itération. Le surcoût de calcul est donc négligeable au regard de la complexité des problèmes locaux.

En plus de son caractère non intrusif, les avantages sont :

- La solution globale n'a aucun intérêt à convergence, ce modèle joue le rôle de modèle grossier ou problème macro des autres méthodes de décomposition de domaine. Il permet d'accélérer la convergence et rendre la méthode extensible. Si la résolution de ce problème venait à être limitante, on pourrait tout à fait envisager une résolution approchée ou partielle, ou même basée sur un solveur de décomposition de domaine linéaire.
- Les non-linéarités étant incluses dans les problèmes locaux, l'approche est robuste au problème à non-linéarités localisées. La méthode est également non intrusive du point de vue des modèles

locaux qui sont de simples problèmes aux limites non linéaires.

- Les interfaces non compatibles peuvent être facilement prises en compte par le coupleur.
- Cette méthode étant basée sur un algorithme Neumann-Dirichlet, il n'y a pas besoin d'un traitement particulier des sous structures flottantes.

La méthode est implantée autour de Code\_Aster (logiciel libre développé par EDF R&D) dans un script Python qui gère le couplage. Les échanges MPI sont réalisés par un protocole client-serveur, ce qui permet l'utilisation d'une version séquentielle de Code\_Aster. Une instance de Code\_Aster est lancée indépendamment sur chaque sous-domaine, ainsi qu'une instance pour le modèle global.

**Exemple** Pour illustrer la méthode, on considère l'exemple d'un porte-satellite de transmission d'hélicoptère (diamètre  $d = 155 \text{ mm}$ ) fourni par D. Crozes d'AIRBUS Group Innovations. Un couple est appliqué sur l'axe central ( $C = 50 \text{ kNm}$ ) et les axes de satellites sont encastrés. Le modèle est élastoplastique avec écrouissage linéaire avec une limite élastique fixée à 300MPa. Sur la figure 3.23, le maillage est présenté avec

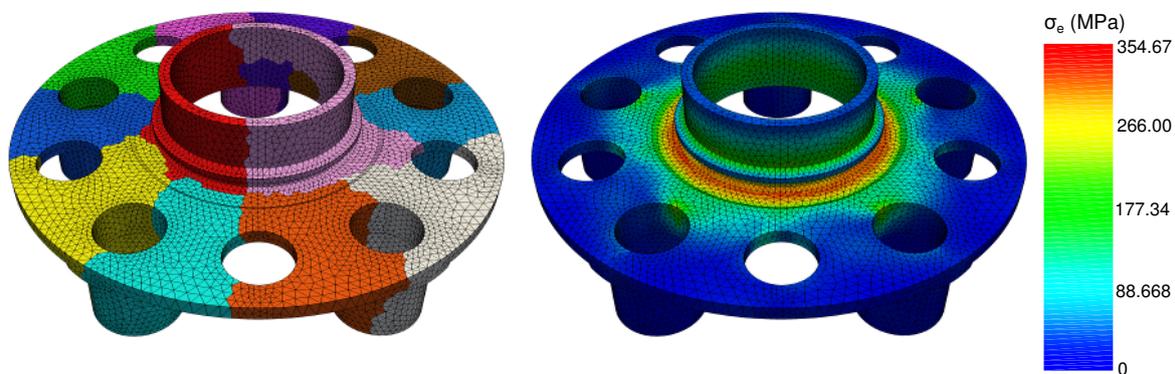


FIGURE 3.23 – Porte satellite de transmission d'hélicoptère : partition du maillage (12 sd) et solution en contrainte équivalente de Von-Mises

une décomposition en 12 sous-domaines. La contrainte équivalente de Von Mises associée à la solution à convergence est également représentée, ce qui permet de voir que la plasticité se répand dans de nombreux sous-domaines. Les calculs ont été menés sur le méso-centre de calcul intensif Calmip de Midi-Pyrénées.

L'effet du nombre de sous-domaines sur la vitesse de convergence est analysé dans la suite. Le calcul est lancé pour un nombre de sous-domaines allant de 2 à 60. Le nombre d'itérations pour atteindre la convergence est présenté sur la figure 3.24. Trois courbes sont affichées suivant que l'algorithme est utilisé sans accélération, avec accélération Aitken  $\Delta^2$ , ou avec l'accélération SR1. Ainsi, on peut voir que lorsque l'accélération est utilisée, le nombre d'itérations nécessaires pour converger à la tolérance requise est quasiment indépendante du nombre de sous-domaines. Dans le cas de la plasticité, l'accélération SR1 ou Aikten fourni des résultats comparables compte tenu de la faible différence de rigidité.

### 3.2 Décomposition de domaine et corrélation d'images numériques

Dans cette section, nous allons montrer que le même genre d'algorithmes peut s'avérer d'une grande utilité dans le cadre de la mécanique expérimentale. En effet, comme mentionné dans le chapitre 2, la mesure par corrélation d'image numérique éléments finis (CIN-EF) peut conduire à des systèmes de grande taille ainsi que l'usage d'algorithmes d'interpolation sur des images de grande taille, notamment lorsque l'essai est instrumenté avec un capteur haute définition.

Nous nous sommes donc proposé de développer un algorithme de décomposition de domaine dual pour résoudre le problème non linéaire de corrélation éléments finis [Passieux et al., 2015b]. Ici, nous restons dans le cadre classique des algorithmes Newton-Krylov-Schur.

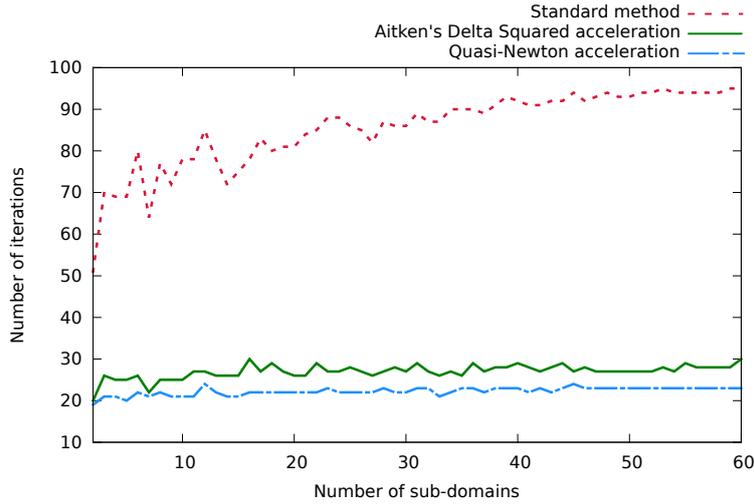


FIGURE 3.24 – Analyse du nombre d'itérations requises pour atteindre la convergence en fonction du nombre de sous-domaines.

Le maillage éléments finis global est décomposé en  $n_s$  sous-domaines notés  $\Omega_s$ . En faisant cette partition, on s'arrange pour que les sous-domaines aient une forme plutôt cubique et compacte, afin de minimiser le temps de calcul alloué à l'étape d'interpolation. L'image de référence est, elle-même décomposée en imagettes  $f_s(\mathbf{x})$ , une pour chaque sous-domaine, voir figure 3.25.

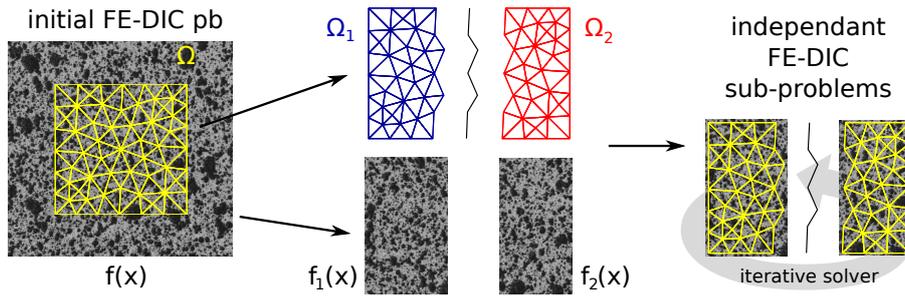


FIGURE 3.25 – Décomposition de l'images  $f$  et du domaine  $\Omega$  en 2 sous-domaines  $\Omega_s$  et deux imagettes  $f_s$ . Un ensemble de sous imagettes de l'image  $g$  sont aussi construites. Les maillage ne se recouvrent pas contrairement aux imagettes.

La conservation des niveaux de gris est écrite indépendamment par sous-domaine, ce qui conduit, à l'itération  $k$ , à l'ensemble des  $n_s$  problèmes linéaires suivants :

$$\mathbf{M}_s \mathbf{q}_s^k = \mathbf{b}_s^k \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{M}_s$  est l'opérateur de corrélation du sous-domaine  $\Omega_s$ ,  $\mathbf{q}_s^k$  la correction de déplacement recherchée à l'itération  $k$  et  $\mathbf{b}_s$  le second membre lié au résidu de corrélation. Ces équations doivent être résolues sous la contrainte de continuité à l'interface :

$$\sum_{s=1}^{n_s} \mathbf{C}_s \mathbf{q}_s = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}_s = \mathbf{q}_s^k + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{q}_s^j$$

dans lequel  $\mathbf{C}_s$  est un opérateur rectangulaire booléen signé qui fait le pont entre la connectivité locale dans le sous-domaine et celle sur l'interface. Le vecteur  $\mathbf{q}_s$  est l'approximation courante du déplacement mesuré dans le sous-domaine  $s$ , il est la somme des corrections  $\mathbf{q}_s^j$  obtenues aux itérations précédentes  $j \leq k$ . Pour imposer cette contrainte, on introduit un multiplicateur de Lagrange  $\boldsymbol{\Lambda}$  à l'interface et on obtient le système

couplé suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{C}_1^T \\ 0 & \mathbf{M}_2 & \dots & 0 & \mathbf{C}_2^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M}_{n_s} & \mathbf{C}_{n_s}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{C}_{n_s} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^k \\ \mathbf{q}_2^k \\ \dots \\ \mathbf{q}_{n_s}^k \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^k \\ \mathbf{b}_2^k \\ \dots \\ \mathbf{b}_{n_s}^k \\ -\sum_s \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{C}_s \mathbf{q}_s^j \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Ce système n'est évidemment ni résolu, ni assemblé. Il est condensé sur l'inconnue d'interface  $\Lambda$ , ce qui donne le problème suivant :

$$\mathbf{S}^d \Lambda = \mathbf{t}^k \quad (3.23)$$

ou le second membre condensé  $\mathbf{t}^k$  et le complément de Schur dual  $\mathbf{S}^d$  s'écrivent :

$$\mathbf{S}^d = \sum_s \mathbf{C}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s^T \quad (3.24)$$

$$\mathbf{t}^k = \sum_s \mathbf{C}_s \left( \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{q}_s^j + \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{b}_s^k \right) \quad (3.25)$$

Le problème (3.23) n'est pas non plus assemblé, mais résolu par un gradient conjugué, tel que c'est classiquement fait dans FETI [Farhat and Roux, 1991]. L'intérêt du gradient conjugué est qu'il fait intervenir uniquement des produits matrice vecteurs entre l'opérateur  $\mathbf{S}^d$  et des vecteurs  $\mathbf{d}$  particuliers. Puisque  $\mathbf{S}^d$  est une somme sur les sous-domaines, ce produit peut être calculé sous-domaine par sous-domaine indépendamment, donc en parallèle. En effet, par exemple :

$$\mathbf{S}^d \mathbf{d} = \sum_s \mathbf{C}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s^T \mathbf{d} = \sum_s \mathbf{C}_s \mathbf{y}_s$$

ou  $\mathbf{y}_s$  la solution du système local  $\mathbf{M}_s \mathbf{y}_s = \mathbf{C}_s^T \mathbf{d}$  ce qui correspond à une itération du problème de corrélation éléments finis standard avec un second membre particulier. Ainsi le coût de calcul associé à l'inversion des systèmes et à l'interpolation des images est rendu local, donc parallélisable. Le problème (3.23) est résolu avec un gradient conjugué à chaque itération  $k$  du Newton du problème de corrélation.

**Initialisation** Chaque problème sur chaque sous-domaine est initialisé en résolvant les problèmes indépendamment. *A priori*, cette initialisation est très proche de la solution, seules quelques corrections doivent être apportées, de façon à assurer la continuité du déplacement à l'interface. Le gradient conjugué est initialisé par zéro à la première itération de corrélation  $k = 1$ , puis il est initialisé avec sa valeur à l'itération précédente. Il s'agit d'une initialisation simpliste, mais qui permet de réduire de façon conséquente le nombre d'itérations à convergence.

**Préconditionnement** Au-delà d'une simple initialisation, il est intéressant d'utiliser une véritable technique d'accélération de convergence. Par exemple, le preconditionnement est une technique qui consiste à améliorer le conditionnement de l'opérateur ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse de convergence du gradient conjugué. L'idée est de trouver, à moindre coût, une approximation  $\mathbf{P}$  de l'opérateur  $\mathbf{S}^d$ , mais dont l'inverse est simple à calculer. Ainsi on remplace le système 3.23 par  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}^d \Lambda = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{t}^k$  en preconditionnant à gauche, par exemple. Nous avons proposé trois preconditionneurs dont le surcoût est raisonnable et qui permettent d'accélérer le solveur de façon significative.

1. le preconditionneur *double diagonal* wui est à la fois peu coûteux à inverser et à utiliser puisque diagonal :

$$\mathbf{P}_{dd} = \sum_s \text{Diag}(\mathbf{C}_s \text{Diag}(\mathbf{M}_s)^{-1} \mathbf{C}_s^T)$$

2. le préconditionneur *diagonal* qui est légèrement plus coûteux à assembler puisque les opérateurs locaux  $\mathbf{M}_s$  sont inversés. Il est comparable au préconditionneur Dirichlet de FETI [Farhat and Roux, 1991] :

$$\mathbf{P}_d = \sum_s \text{Diag}(\mathbf{C}_s \mathbf{M}_s^{-1} \mathbf{C}_s^T)$$

3. le préconditionneur *quasi-diagonal* est très peu cher à assembler, mais il n'est pas exactement diagonal.

$$\mathbf{P}_{qd} = \sum_s \mathbf{C}_s \text{Diag}(\mathbf{M}_s)^{-1} \mathbf{C}_s^T$$

Le risque avec un préconditionneur est que  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}^d$  ne soit ni symétrique ni défini, même si les deux opérateurs le sont. Vu que  $\mathbf{P}_{qd}$  est symétrique défini positif, on peut écrire sa décomposition de Cholesky par exemple  $\mathbf{P}_{qd} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$ . On peut alors résoudre le système équivalent  $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{S}^d \mathbf{L}^{-T} \hat{\Lambda} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{t}_s^k$  avec  $\hat{\Lambda} = \mathbf{L}^T \Lambda$ , puisque qu'on montre facilement que les opérateurs  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{S}^d$  et  $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{S}^d \mathbf{L}^{-T}$  ont les mêmes valeurs propres [Saad, 2000]. En pratique, les opérateurs  $\mathbf{C}_s \mathbf{C}_s^T$  sont des matrices pentadiagonales quelle que soit la dimension du problème, sous réserve de numéroter correctement les degrés de liberté d'interface [Passieux et al., 2015b]. En outre, le nombre de valeurs extra-diagonales est très faible (la somme des multiplicités moins 1 des ddl d'interface).

**Exemple** On étudie une paire d'images haute résolution 29 millions de pixels d'un essai de flexion 4 points. Un maillage éléments finis non-structuré est positionné sur l'image de référence, voir 3.26. Le maillage est

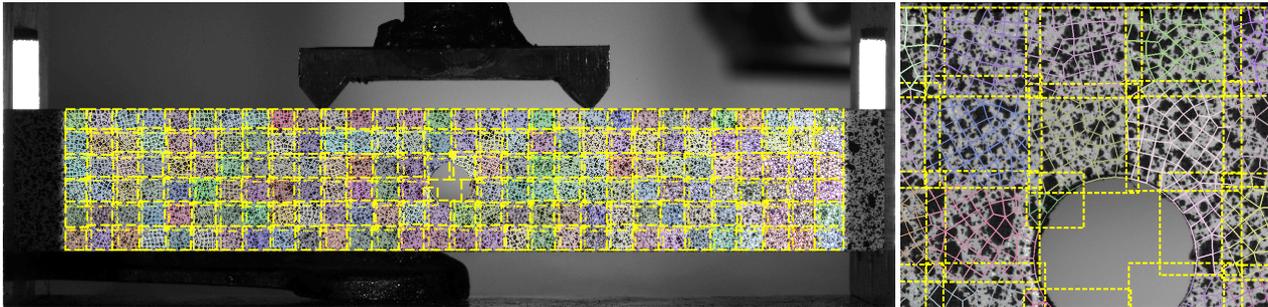


FIGURE 3.26 – Exemple d'un essai de flexion 4 points. Décomposition de l'image et du domaine en 180 sous-domaines. Les contours des imagerie recouvrantes  $f_s$  est en jaune pointillé.

découpé en 180 sous-domaines de forme globalement carrées. L'image est découpée en 180 imagerie qui se recouvrent partiellement, afin de pouvoir réduire et paralléliser l'étape d'interpolation. Sur la figure 3.27, la solution de l'algorithme de décomposition de domaine CIN-DD est comparée à la solution initiale qui correspond à un problème de CIN-EF indépendant par sous-domaine, donc hautement parallélisable. On imagine assez aisément que l'effort à faire pour passer de la solution initiale à la solution à convergence est très faible.

On étudie ensuite l'effet de l'initialisation et du préconditionnement sur la convergence de l'algorithme de décomposition de domaine sur la figure 3.28. *CG* signifie qu'on utilise un gradient conjugué initialisé par zéro, tandis que *iCG* désigne un gradient conjugué initialisé par la valeur obtenue à l'itération de corrélation  $k$  précédente. Le simple fait d'initialiser le CG par la solution de l'itération précédente permet presque de diviser par 2 le nombre total d'itérations. Sur la figure de gauche, on peut voir que l'initialisation ne modifie pas le taux de convergence, donc l'effet est limité. En plus de cette initialisation, l'utilisation d'un préconditionneur permet d'accélérer la convergence et de réduire de manière considérable le nombre d'itérations. Dans cet exemple, les trois préconditionneurs proposés sont efficaces pour accélérer la convergence, même si le quasi diagonal semble le plus efficace dans ce cas.

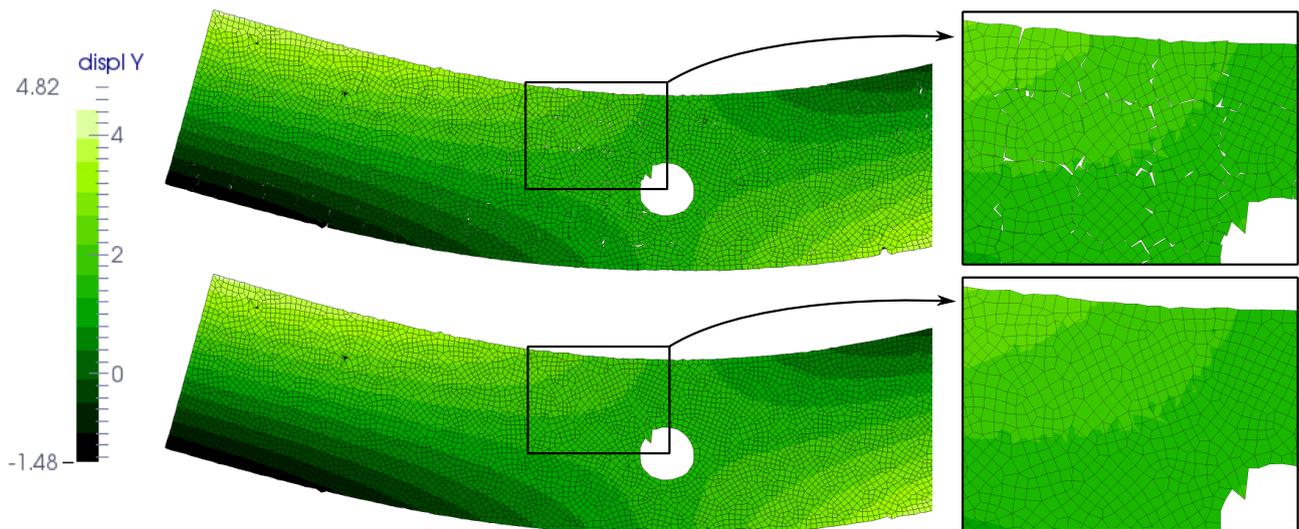


FIGURE 3.27 – Exemple de l’essai de flexion 4 points : solution en déplacement (unité pixel, facteur d’amplification 50) : solution initiale issue d’une corrélation éléments finis indépendante par sous-domaine (en haut) et solution issue de l’algorithme de décomposition de domaine CIN-DD (en bas).

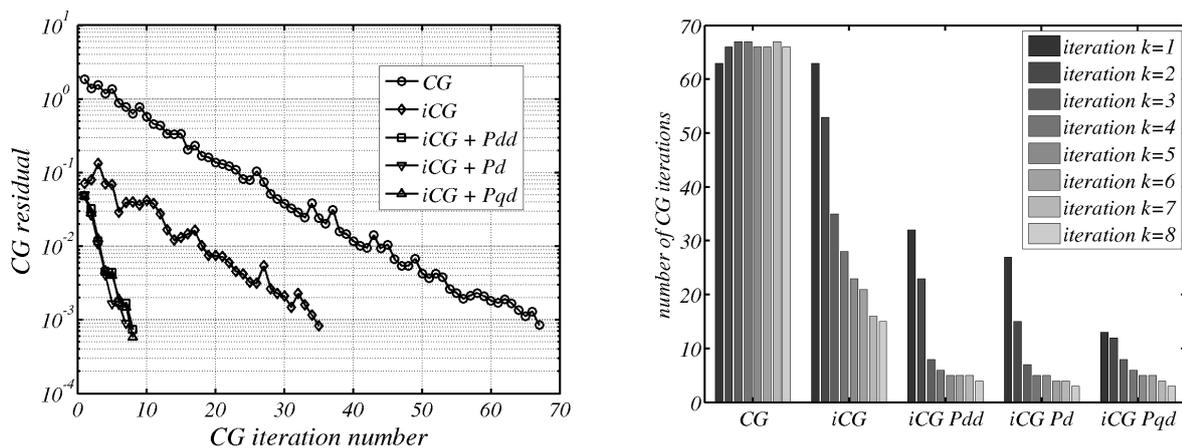


FIGURE 3.28 – Étude de la convergence en fonction des choix fait pour l’initialisation et le préconditionnement : courbe de convergence à l’itération  $k = 3$  (à gauche) et nombre d’itérations nécessaires pour satisfaire le critère de convergence en fonction des itérations  $k$  (à droite).

**Bilan** La décomposition de domaine et le calcul parallèle sont des outils qui permettent de traiter des problèmes de grande taille avec de grand nombre de données. Nous avons montré que ces outils étaient d’intérêt tant pour la simulation que pour la mesure et qu’ils s’écrivaient, encore une fois, dans un même formalisme.

Du côté de la simulation, les méthodes sont très aboutis aujourd’hui, mais toujours sensiblement complexes à implanter dans le cas non linéaire. L’objet des travaux menés dans la thèse de Mickaël Duval sur ce sujet est de rendre ces outils plus simples à implanter et à utiliser, donc plus accessibles, notamment en s’appuyant potentiellement sur un logiciel commercial séquentiel fermé. Pour aller vers plus d’efficacité, on peut chercher à réduire l’impact du solveur global linéaire (bien que négligeable sur le temps de calcul total). On peut, par exemple l’approcher en construisant un opérateur équivalent, type approximation de complément de Schur [Gendre et al., 2011]. On pourrait également chercher à paralléliser sa résolution, mais il faut faire attention à l’impact sur le coût de calcul global. Une extension au post-flambement de

structures minces raidies, telles que celles rencontrées dans l'industrie mécanique est une perspective qui nous intéresse particulièrement.

Du côté de la mesure, au-delà de l'extension à la CIV en 3D, ce type de méthode sera nécessaire si l'on souhaite faire une mesure sur une structure de très grande taille instrumentée par un ensemble de caméras. L'extension de cet algorithme au couplage de domaines régularisés mécaniquement est aussi une voie d'amélioration intéressante. En plus d'assurer la continuité des déplacements, on pourra assurer l'équilibre des efforts avec un deuxième multiplicateur de Lagrange.

# Intégration de la mesure et de la simulation : vers l'identification

## Sommaire

<b>1</b>	<b>Régularisation de la mesure</b>	<b>81</b>
<b>2</b>	<b>Identification multiéchelle de paramètres de comportement</b>	<b>85</b>
<b>3</b>	<b>Stéréo-CIN éléments finis régularisée par la théorie des plaques et coques</b>	<b>90</b>
3.1	Projet Vertex	90
3.2	Stéréo-CIN classique	91
3.3	Reformulation de la Stéréo-CIN éléments finis dans le repère monde	93
3.4	Stéréo-CIN EF avec régularisation	98

Dans les chapitres précédents, un certain nombre d'outils numériques ont été présentés et illustrés, autant que possible, par des applications en mesure CIN et en simulation. L'intérêt d'opérer ce rapprochement n'est pas que conceptuel. En effet, en simplifiant le dialogue essais-calculs, notamment en utilisant le même langage, en le manipulant avec les mêmes outils, l'objectif est de simplifier et de rendre plus directes des démarches classiques en mécanique telles que la validation de modèles numériques par des essais et/ou l'identification de paramètres à partir d'essais. Mais ce rapprochement rend également possibles des approches nouvelles telles que le pilotage de modèles numériques par des conditions aux limites expérimentales réelles [Sztefek and Olsson, 2009, Rannou et al., 2010, Roux-Langlois et al., 2015], le pilotage d'essais en temps réel en s'appuyant sur un modèle [Durif et al., 2012, Fayolle and Hild, 2014] ou encore la régularisation de la mesure par des modèles analytiques ou numériques prédictifs [Hamam et al., 2007, Roux et al., 2009, Leclerc et al., 2011]. Dans ce chapitre nous allons décrire des outils numériques mêlant des mesures CIN et des modèles numériques de façon intime.

## 1 Régularisation de la mesure

Comme décrit dans le chapitre 1, le problème de conservation des niveaux de gris est mal posé. Il doit donc être régularisé. Pour imposer une certaine régularité *a priori*, deux grandes familles de méthodes existent :

**Régularisation par la taille de la fenêtre** La première consiste à s'assurer que le nombre d'inconnues du problème soit plus faible que le nombre de données. En effet, si l'on cherche le champ de déplacement en chaque pixel, on dispose d'une équation (conservation des niveaux de gris) pour 2 ou 3 inconnues (les composantes du vecteur déplacement). Par exemple avec les méthodes locales, on ne cherche plus le déplacement d'un pixel seul mais d'un ensemble de pixels (une imagerie) décrit par une cinématique simple généralement polynomiale de bas degré. On dispose alors d'un faible nombre d'inconnues par imagerie avec un grand nombre d'équations correspondant à la conservation des niveaux de gris de chaque pixel de l'imagerie. Ce faisant, on introduit une longueur caractéristique (associée à la taille de l'imagerie et/ou au

type de cinématique considérée dans l'imagette). On comprend assez aisément que plus la taille de l'imagette sera petite, plus la mesure sera incertaine. La richesse de la cinématique va également impacter l'incertitude de mesure puisqu'elle impacte directement le ratio nombre d'inconnues/nombre d'équations. Dans la version éléments finis de base, la CIN-EF consiste à rechercher le déplacement des noeuds d'un maillage en s'appuyant sur tous les pixels contenus dans les éléments connectés à ce noeud. Plus les éléments sont grands plus le nombre de données sera grand et plus la mesure sera certaine. Le grand problème de cette façon de régulariser le problème est que l'on couple deux problèmes en agissant sur un même paramètre (la taille de l'imagette ou de l'élément fini) pour jouer sur deux régimes d'erreurs. En effet, comme montré sur la figure 3.20 du chapitre 3, si on considère des éléments finis de très grande taille, l'erreur ultime (celle qui vient du caractère mal posé de la corrélation) est très faible, mais l'erreur d'interpolation (appelée parfois erreur de modèle [Bornert et al., 2009]) est grande. À l'inverse, avec de tout petits éléments, la description de la cinématique est bien meilleure, mais l'erreur ultime prends le dessus. Cette technique de régularisation introduit un compromis entre erreur ultime et erreur d'interpolation. Elle rend compliqué le choix de la taille des éléments (ou des imagettes). Il existe donc une taille d'éléments optimale (qui dépend du problème, du mouchetis, du champ inconnu...) à laquelle est associée une incertitude de mesure qui représente une borne inférieure de l'erreur. Ce phénomène rend difficile la  $h$  ou  $p$ -adaptivité pour la mesure CIN, bien que de nombreuses tentatives soient explorées actuellement [Wittevrongel et al., 2015, Kleinendorst et al., 2015].

**Régularisation par pénalisation type Tikhonov** La deuxième idée consiste à rajouter un terme de pénalisation dans l'optimisation. On cherchera par exemple la solution du problème d'optimisation suivant :

$$\mathbf{u}^* = \underset{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \phi_{cin}^2(\mathbf{u}) + \lambda \phi_{regul}^2(\mathbf{u}) \right\} \quad (4.1)$$

ou  $\phi_{cin}^2(\mathbf{u})$  est la fonctionnelle de conservation des niveaux de gris et  $\phi_{regul}^2(\mathbf{u})$  une fonctionnelle de régularisation. Dans ce terme peuvent être introduites toutes formes de connaissances *a priori* de la solution [Réthoré et al., 2009, Leclerc et al., 2011, Réthoré et al., 2013], mais la manière la plus basique consiste à utiliser un terme de régularisation basé sur un opérateur différentiel (par exemple un laplacien [Passieux and Périé, 2012]) :

$$\phi_{regul}^2(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \, d\mathbf{x}$$

Ceci peut être interprété comme un filtre passe bas dont la fréquence de coupure est liée au choix du paramètre de pénalisation  $\lambda$  [Réthoré et al., 2009]. Cette fréquence de coupure définit également une longueur caractéristique, voir figure 4.1 L'intérêt de ces approches réside dans le fait qu'elles permettent un décou-

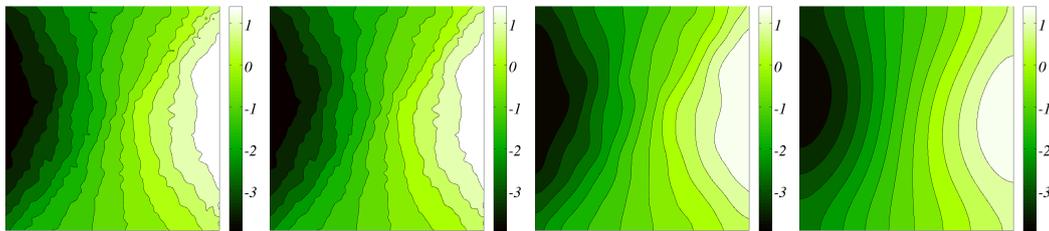


FIGURE 4.1 – Exemple de mesure PGD-CIN avec régularisation Tikhonov pour différentes valeurs de paramètre de pénalisation sur les images de l'essai biaxial sur composite C/C de [Périé et al., 2002].

plage entre la finesse du maillage nécessaire pour décrire la cinématique correctement et la nécessité de régulariser la mesure. On peut d'une part utiliser des éléments finis de petite taille, voire même de la taille d'un pixel [Passieux and Périé, 2012] ou d'un voxel [Leclerc et al., 2011], voir figure 4.2(gauche). On peut de plus

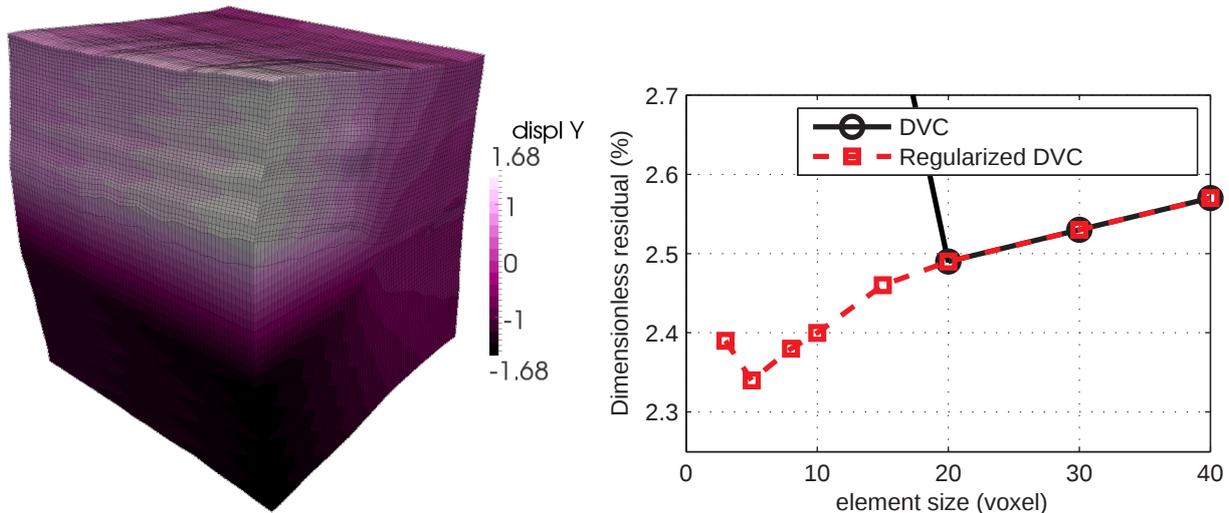


FIGURE 4.2 – (à gauche) mesure à l'échelle voxel en PGD-CIV sur une image synthétique. (à droite) évolution d'une mesure du résidu de corrélation  $r_0(\mathbf{x})$  (en pourcentage de la dynamique) d'une mesure PGD-CIV en fonction de la taille des éléments finis dans chaque dimension, avec et sans régularisation Tikhonov [Gomes Perini et al., 2014].

montrer que relâcher ce compromis permet d'obtenir des champs de déplacement qui vérifient mieux la conservation des niveaux de gris. Par exemple sur la figure 4.2(droite), on trace l'évolution du résidu de corrélation en fonction de la taille des éléments. En noir, sans régularisation, des grands éléments permettent de faire converger l'algorithme, mais sont sans doute trop grossiers pour décrire correctement le champ de déplacement. Lorsque la taille des éléments finis diminue, le résidu diminue également jusqu'à ce que l'algorithme ne converge plus à cause d'une régularisation insuffisante. En revanche, avec une approche régularisée de cette manière, on montre qu'il est possible d'utiliser des éléments de tailles inférieures et que ceux-ci donnent un meilleur score de corrélation [Gomes Perini et al., 2014].

Ces techniques de régularisation de la première comme de la deuxième famille n'ont pas, à proprement parler, un véritable sens mécanique (continuité du champ de déplacement mis à part). Elles sont cependant très utiles, notamment lorsque l'on souhaite utiliser le moyen de mesure à des fins d'observation pure ou de validation expérimentale. Des techniques de régularisation de plus grand sens mécanique ont été proposées qui permettent d'observer un déplacement entre deux images à travers le spectre d'un modèle [Roux and Hild, 2006, Hamam et al., 2007, Réthoré et al., 2009, Leclerc et al., 2009, Réthoré et al., 2013]. En effet le moyen de mesure est souvent utilisé à des fins d'identification, en particulier en bas de la pyramide des essais. L'identification consiste à déterminer les paramètres du modèle tels que celui-ci soit le plus proche possible des observations expérimentales. Ce dernier est pour nous le champ de déplacement mesuré. Étant lui-même issu d'un problème inverse à partir des images, l'idée de rechercher le champ de déplacement expérimental compatible avec le modèle le plus proche possible des données brutes est finalement une idée voisine. Donc présupposer un modèle pour faire une mesure CIN dans un contexte d'identification est tout sauf choquant. Les techniques se distinguent suivant qu'elles opèrent un couplage fort ou faible de la mesure et du modèle.

**Intégration forte de la mécanique dans la mesure (I-DIC ou MIC)** Cette approche permet de régulariser la mesure car elle réduit de façon drastique le nombre d'inconnues du problème. En effet, le sous-espace d'approximation est engendré par quelques modes globaux associés à un modèle. C'est le cas par exemple de l'utilisation des séries de Williams, dans lequel le modèle est analytique, voir section 1.2 du chapitre 2 [Roux and Hild, 2006]. On peut également utiliser comme base d'interpolation des champs numériques  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  précalculés par une simulation éléments finis [Leclerc et al., 2009, Réthoré, 2010]. L'idée est de ré-

soudre le problème suivant [Leclerc et al., 2009] :

$$\mathbf{p}^* = \arg \min_{\mathbf{p}} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{p})))^2 d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

$\mathbf{p}$  étant un paramètre du modèle. Pour le résoudre, on fait un développement de Taylor à l'ordre 1 :  $\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k + \delta\mathbf{p}$ , puis  $\mathbf{v}(\mathbf{q}^{k+1}) = \mathbf{v}(\mathbf{q}^k) + \delta\mathbf{p}^T \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}}$ , ou  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}}$  sont des dérivées du champ de déplacement par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}$ . Ces dérivées sont soit analytiques (pour les séries de Williams par exemple) ou encore estimées par différences finies dans le cas d'un modèle éléments finis avec peu de paramètres. Dans le cas analytique, on choisira directement pour  $\phi$ , les dérivées du déplacement par rapport aux paramètres. S'il s'agit d'un modèle éléments finis basé sur le même maillage que la mesure, à l'itération  $k$ , on obtient le système linéaire suivant déduit d'une mesure éléments finis standard :

$$\mathbf{M}_{mic} \delta \mathbf{q} = \mathbf{b}_{mic}$$

avec

$$\mathbf{M}_{mic,ij} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_i}^T \mathbf{M}_{dic} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_j} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}_{mic,j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}_j}^T \mathbf{b}_{dic}$$

Lorsque  $\mathbf{p}$  se réduit à des paramètres de comportement, cette méthode est davantage une méthode d'identification intégrée qu'une méthode de mesure de déplacement. C'est d'ailleurs dans ce contexte que cette approche a été proposée [Leclerc et al., 2009, Réthoré, 2010, Mathieu et al., 2015]. Cette approche peut d'avérer sensible aux conditions aux limites. En pratique les conditions aux limites expérimentales issues d'une première mesure CIN-EF plus ou moins classique sont utilisées pour piloter la simulation. Cette première mesure entachée d'incertitudes peut parfois conduire à une mauvaise approximation des conditions aux limites, ce qui est préjudiciable pour l'identification [Réthoré, 2010, Mathieu et al., 2015]. Ces conditions aux limites pourraient être recherchées comme un ensemble de paramètres supplémentaires. Dans le cas de comportements non linéaires complexes avec localisation, cette méthode s'est avérée efficace lorsque la localisation est induite par une forme bien choisie de l'éprouvette [Mathieu et al., 2015]. La question est plus délicate lorsque la localisation dépendant beaucoup de l'état initial inconnu (et des éventuels défauts).

**Intégration faible de la mécanique dans la mesure (R-DIC ou I-MIC)** Une méthode de mesure avec une régularisation au sens faible se base sur la formulation avec pénalisation. On considère un modèle éléments finis linéaire (sans que cela soit limitatif [Réthoré et al., 2013]) basé sur le même maillage que la mesure. En supposant les densités d'efforts volumiques négligeables, alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ib} \\ \mathbf{K}_{bi} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_i^0 \\ \mathbf{q}_b + \mathbf{q}_b^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underbrace{[\mathbf{K}_{ii} \quad \mathbf{K}_{ib}]}_{\bar{\mathbf{K}}} (\mathbf{q} + \mathbf{q}^0) = 0$$

ou les degrés de liberté  $i$  sont à l'intérieur du domaine visible dans l'image et ceux notés  $b$  sont relatifs à la périphérie du maillage visible dans l'image.  $\mathbf{q}^0$  est le vecteur des degrés de liberté associé à  $\mathbf{u}^k$  et  $\mathbf{q}$  à  $\delta \mathbf{u}$ . *A priori*, si les efforts extérieurs sont inconnus, alors on peut utiliser la fonctionnelle de régularisation suivante [Réthoré et al., 2009] dans le problème (4.1) :

$$\phi_{regul}^2(\mathbf{u}) = \|\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{q} + \mathbf{q}^0)\|_2^2$$

qui traduit le défaut d'équilibre de noeuds internes au domaine d'intérêt. Les degrés de liberté de bord ne sont donc pas régularisés. Par exemple sur la figure 4.3 l'incertitude du champ de déplacement sur le bord est donc plus grande que dans l'intérieur du domaine. Tant que ces perturbations sont petites, leur effet reste localisé en vertu du principe de Saint Venant. Si cela ne devait pas être le cas, il est possible dans ce cas de rajouter un terme type Laplacien sur les noeuds de bord uniquement [Leclerc et al., 2011]. Si les

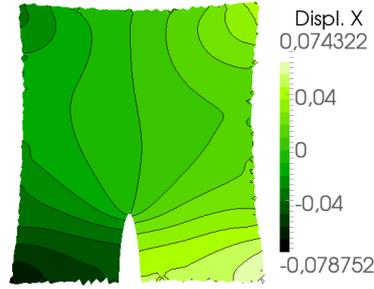


FIGURE 4.3 – Mesure de champ de déplacement au voisinage d’une fissure par éléments finis régularisée sur les noeuds internes par un modèle élastique.

efforts extérieurs sont connus (au moins sous forme d’une des composantes de la résultante), alors on peut également utiliser un terme de régularisation basé sur l’énergie potentielle élastique [Réthoré et al., 2013] :

$$\phi_{regul}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\mathbf{A}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u})) : \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_d \, ds$$

La distribution des efforts surfaciques extérieurs  $\mathbf{t}_f$  est reconstruite de manière empirique à partir d’une mesure CIN-EF standard et de la donnée de la cellule d’effort. Ceci est envisageable en CIN-2D et en CIV, mais qui suppose une hypothèse très forte (et pas toujours valide) en stéréo-CIN.

Du point de vue de la mesure, ces deux méthodes se présentent comme des méthodes de régularisation. Lorsque cette même fonctionnelle est minimisée alternativement par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$  puis par rapport aux paramètres  $\mathbf{p}$ , alors ces méthodes deviennent des méthodes d’identification [Réthoré, 2010, Réthoré et al., 2013] :

$$\mathbf{u}^*, \mathbf{p}^* = \underset{\mathbf{u}, \mathbf{p}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \phi_{cin}^2(\mathbf{u}, \mathbf{p}) + \lambda \phi_{regul}^2(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \right\} \quad (4.3)$$

**Bilan** Les questions de la régularisation et des conditions aux limites sont centrales pour la mesure et l’identification à partir de champ de déplacement. Pour les deux, l’objectif est de réduire ou contrôler le niveau des incertitudes de mesure en vue de l’identification. Des méthodes de régularisation permettent d’éviter le compromis entre erreur ultime et erreur d’interpolation ce qui permet d’obtenir de meilleures mesures. La question des conditions aux limites reste compliquée et pas complètement réglée, notamment en stéréo-CIN. Enfin, même si on a montré qu’il était possible de réduire les erreurs de mesure par une régularisation plus souple, il n’en reste pas moins que cette régularisation introduit une longueur caractéristique qui introduit une borne inférieure de l’incertitude de mesure. D’autres techniques, à l’image de celle présentée au chapitre 3, section 2.2, doivent être développées si l’on souhaite malgré tout obtenir, au moins localement, une meilleure résolution de mesure.

## 2 Identification multiéchelle de paramètres de comportement

Il existe une grande variété de méthodes d’identification à partir de mesures de champs. On a coutume (voir [Avril et al., 2008a]) de distinguer les méthodes avec pas (ou peu) d’itérations telles que l’écart à l’équilibre [Claire et al., 2004, Crouzeix et al., 2009] ou les champs virtuels [Grediac, 1989, Grédiac et al., 2006] et celles itératives telles que l’erreur en relation de comportement [Constantinescu, 1995, Feissel and Allix, 2007, Azzouna et al., 2013], l’écart à la réciprocité [Ikehata, 1990, Andrieux et al., 1997] et les différentes variantes de type recalage de modèle éléments finis (FEMU) [Kavanagh and Clough, 1971, Molimard et al., 2005, Lecompte et al., 2007, Gras et al., 2013, Mathieu et al., 2015], pour un état de l’art, voir [Avril et al., 2008a] ou [Grédiac and Hild, 2012]. Dans la suite,

nous ne nous intéresserons qu'à cette dernière catégorie en vertu de son caractère générique, intuitif et peu intrusif. Cette méthode consiste à mettre à jour un ensemble de  $p$  paramètres constitutifs  $\mathbf{p}$  d'une analyse éléments finis afin de minimiser une mesure de la distance  $\mathbf{R}(\mathbf{p})$  entre des quantités mesurées et simulées.

$$\mathbf{p}^* = \underset{p \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{arg\,min}} \|\mathbf{R}(\mathbf{p})\|^2 \quad (4.4)$$

Les techniques se distinguent suivant l'expression de la fonction coût (en déplacement, en effort, en déformation...), le choix de la norme  $\|\cdot\|$  et de l'algorithme d'optimisation. Par exemple, des fonctions coût basées sur les déformations ont l'avantage de s'affranchir d'une partie des problèmes liés aux conditions aux limites et celles de mouvements de corps rigides [Molimard et al., 2005, Lecompte et al., 2007]. Cependant elles ont l'inconvénient de travailler sur le gradient (symétrique) d'un champ mesuré donc bruité, ce qui a tendance à amplifier le bruit de mesure. Même si des techniques de lissage existent pour filtrer le bruit et fournir des champs de déformation exploitables [Avril et al., 2008b, Feissel et al., 2013], il a été montré que leur usage n'améliore pas de façon significative l'identification de paramètres de comportement [Ben Azzouna et al., 2011].

Dans la suite, on s'intéressera davantage aux méthodes basées directement sur le champ de déplacement pour éviter ces problèmes. Le corollaire direct est qu'un soin particulier doit être apporté à la question des conditions aux limites. En effet, même pour un essai élémentaire réputé bien maîtrisé, tel qu'un simple essai de traction uniaxiale, dans l'erreur commise entre la simulation et la mesure, celle due aux conditions aux limites est de première importance, parfois avant celle due à une mauvaise connaissance des paramètres constitutifs [Robert et al., 2012]. Pour l'illustrer, le champ de déplacement simulé avec des conditions aux limites idéales ou expérimentales est comparé au champ de déplacement mesuré par CIN sur la figure 4.4 lors d'un essai de traction simple. Lorsque l'on cherche à identifier des paramètres dans



FIGURE 4.4 – Composante horizontale du champ de déplacement : mesure CIN (à gauche), simulation avec conditions aux limites expérimentales (au centre) et simulation avec conditions aux limites homogènes idéalisées (à droite)

un tel contexte, il s'avère incontournable de piloter la simulation avec des conditions aux limites représentatives. Pour ce faire, un déplacement mesuré par CIN est souvent imposé sur les bords de l'éprouvette. Évidemment, ce champ étant mesuré, donc bruité, on introduit un biais dans l'identification dont il s'agit de contrôler qu'il est suffisamment petit devant celui qui aurait été causé par l'usage de conditions aux limites idéalisées. Il apparaît donc nécessaire d'obtenir une mesure fiable du déplacement au bord.

Dans ce cas, la simulation a uniquement des conditions aux limites de Dirichlet. Pour pouvoir identifier le module élastique, il faut alors nécessairement un terme qui compare (une composante de) la résultante  $F$  de l'effort appliqué dans la simulation à la mesure de la cellule d'effort. Par exemple, on pourra écrire :

$$\mathbf{p}^* = \underset{p \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}_u(\mathbf{p})\|^2 + \|\mathbf{R}_f(\mathbf{p})\|^2 \quad (4.5)$$

Avec les résidus portants sur le déplacement et sur l'effort :

$$\mathbf{R}_u(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{u}_s(\mathbf{p}) - \mathbf{u}_m}{\|\mathbf{u}_m\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_f(\mathbf{p}) = \frac{F_s(\mathbf{p}) - F_m}{F_m}$$

ou  $\cdot_m$  désigne une quantité mesurée et  $\cdot_s$  une simulée.

Au lieu d'utiliser une norme euclidienne classique, on peut utiliser une norme pondérée basée sur la connaissance que l'on a des incertitudes de mesure sur le déplacement [Leclerc et al., 2009, Gras et al., 2013]. Par exemple, en s'appuyant sur la relation (1.17) du chapitre 1, on peut montrer qu'une norme associée à la matrice de corrélation  $\mathbf{M}$  fournit une pondération optimale au sens de la sensibilité au bruit capteur [Besnard et al., 2006]. Ainsi on utilise une fonction coût du type :

$$\mathbf{p}^* = \underset{p \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{R}_u(\mathbf{p})\|_M^2 + \|\mathbf{R}_f(\mathbf{p})\|_2^2 \quad (4.6)$$

Cette approche a cependant certaines limites qui empêche, en l'état, son déploiement vers des applications plus représentatives des problématiques industrielles :

- Un maillage adapté pour la simulation avec des éléments de petite taille dans les zones à fort gradient n'est pas forcément adapté à la mesure et à l'identification. En effet les zones à fort gradient sont souvent les zones où la solution est la plus sensible aux paramètres de comportement. Avoir un maillage fin à ces endroits est synonyme de mesure plus incertaine. Est-il possible d'avoir **un maillage adapté à la mesure et la simulation** ? Pour éviter ce compromis, il s'agit de développer des stratégies de mesure et d'identification capables de s'adapter à n'importe quel maillage de simulation, puisqu'en identification/validation, l'instrumentation de l'essai n'est faite que pour recalibrer/valider un modèle préexistant, dont on cherche à améliorer/vérifier son caractère prédictif.
- Nous avons vu (Fig. 3.20, chapitre 3) qu'avec une résolution d'image donnée, l'**incertitude de mesure admet une borne inférieure** quelle que soit la finesse du maillage. Le seul levier qui reste est donc d'augmenter la résolution des images.
- Il existe également des contraintes matérielles. En effet, la définition des images étant finie, il existe un **compromis entre la résolution de l'image et la taille du champ de vision**. Ceci met en conflit la nécessité d'avoir une mesure très résolue dans les zones d'intérêt et nécessité de contenir les bords de l'éprouvette pour obtenir les conditions aux limites. Et parfois la zone d'intérêt est très petite par rapport à la taille de l'éprouvette.

Toutes ces considérations nous ont poussés à développer, dans le cadre de la thèse de Christoph David, une méthode d'identification à partir d'images prises à différentes échelles (ou résolutions) [Passieux et al., 2015a]. Nous avons déjà montré dans le chapitre 3 que ceci permettait de dépasser le compromis résolution / incertitude. Nous allons montrer que ceci permet également de réduire les incertitudes sur les paramètres identifiés.

On considère donc un essai de traction uniaxiale sur une éprouvette trouée en composite stratifiée verre/époxy avec 4 plis de satin de 8 [Bizeul et al., 2010]. L'éprouvette est rectangulaire (150mm × 30mm × 1.26mm) avec un trou centré de diamètre 10mm. Tel que proposé par [Molimard et al., 2005, Lecompte et al., 2007], l'idée est d'utiliser le caractère non uniforme du champ de déformation 2D afin d'identifier les quatre paramètres élastiques en contraintes planes en un seul essai.

Pendant l'essai, le chargement est interrompu périodiquement. À chaque pas de chargement, et lorsque le chargement semble stabilisé, des images sont prises. Pour ce faire, deux caméras CCD sont utilisées : une en champ proche sur focalise sur la zone proche du trou, puis on l'écarte grâce à une platine afin de dégager le champ pour l'autre en champ lointain, permettant de faire des mesures dans toute la zone utile de l'éprouvette voir Fig. 5.1(gauche). Le ratio de résolution est approximativement de 5. Les images de référé-



FIGURE 4.5 – Dispositif expérimental : les deux caméras font face à l'éprouvette, leur axe optique étant, autant que possible, perpendiculaire au plan de stratification. Ici, une platine est utilisée pour déplacer la caméra en champ proche afin de pouvoir prendre l'image en champ lointain. (à droite) la partie utile de l'image en champ lointain ainsi que l'image en champ proche.

rence et le maillage utilisé pour l'identification sont représentés sur la figure 3.18(droite)

Pour faire l'identification, on se base sur une mesure multiéchelle avec la calibration basée sur l'homographie décrite dans le chapitre 3. Les images de références sont utilisées pour caractériser la transformation entre échelles. Le maillage éléments fini est alors plaqué sur les images. La mesure champ lointain est utilisée pour fournir des conditions de Dirichlet expérimentales au solveur du modèle éléments finis. La solution de la simulation est comparée, dans sa partie locale, à la mesure locale réalisée à partir des images en champ proche. Le jeu de paramètre est recherché comme la solution de (4.5) avec, cette fois, :

$$\mathbf{R}_u(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{u}_s(\mathbf{p}) - \mathbf{u}_m|_{near}}{\|\mathbf{u}_m|_{near}\|} \tag{4.7}$$

Un schéma regroupant les étapes principales nécessaires à cette identification multiéchelle est présenté sur la figure 4.6

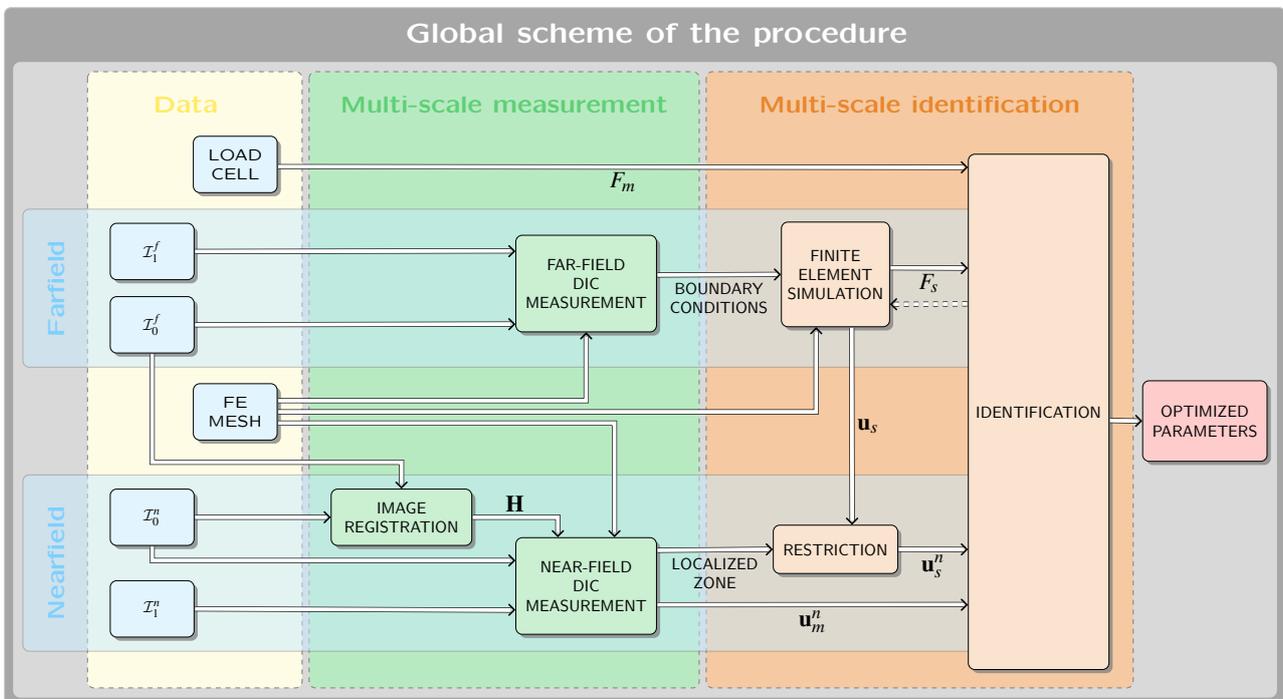


FIGURE 4.6 – Les différentes étapes de la mesure et de l'identification par recalage multiéchelle d'un modèle éléments finis.

Afin de pouvoir quantifier le gain d'une telle stratégie, nous avons choisi de synthétiser toute la chaîne

essai/acquisition/mesure/identification. La solution analytique de Lekhnitskii [Lekhnitskii et al., 1968] d'une plaque trouée orthotrope infinie a été utilisée pour générer des images multiéchelles synthétiques avec un jeu de paramètres de référence  $\mathbf{p}_{ref}$ . Un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type variable est ajouté à l'image en configuration déformée. Puis l'on applique la méthode d'identification, avec la possibilité de calculer l'erreur relative vraie  $\|\mathbf{p}^* - \mathbf{p}_{ref}\| / \|\mathbf{p}_{ref}\|$ . Cette erreur cumule les erreurs de mesure liées à l'interpolation des niveaux de gris, au bruit capteur, l'erreur de discrétisation éléments finis, l'erreur associée aux conditions aux limites mesurées (donc bruitées). Cet essai synthétique ne prend cependant pas en compte l'erreur d'alignement des axes optiques des caméras avec la normale à l'éprouvette, l'erreur due à des déplacements hors plan, l'erreur due au modèle mécanique (apparition d'endommagement par ex.), l'erreur due aux problèmes d'éclairage... entre autres. Sur la figure 4.7, sont tracées les évolutions de l'erreur exacte en fonction du bruit capteur pour l'approche monoéchelle basée sur les images en champ lointain et pour l'approche multiéchelle, avec à chaque fois, la norme euclidienne et la norme pondérée par  $\mathbf{M}$  :

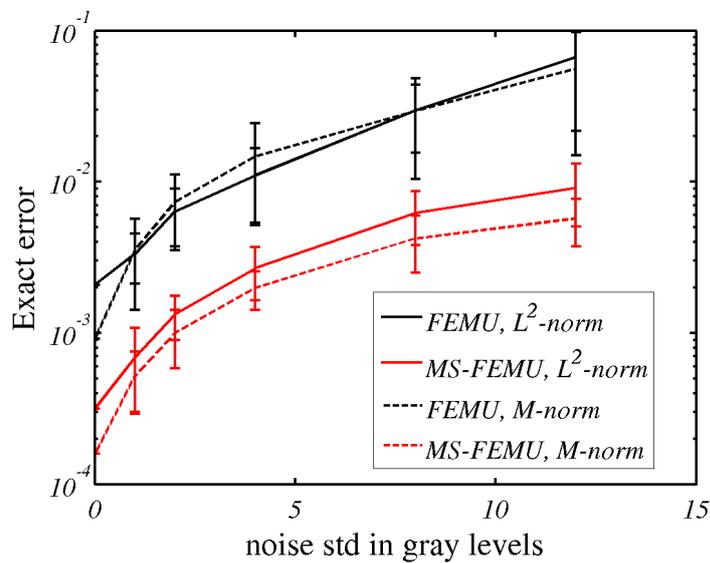


FIGURE 4.7 – Erreur sur les paramètres identifiés en fonction du bruit image pour différentes méthodes d'identification.

En l'absence de bruit capteur, la méthode multiéchelle utilisant localement une image dont la résolution est 5 fois meilleure, conduit à une réduction d'un ordre de grandeur de l'erreur exacte. Pour chaque méthode, l'utilisation d'une norme pondérée améliore sensiblement l'identification. Lorsque le bruit image augmente, les paramètres identifiés sont également moins sensibles au bruit d'un ordre de grandeur (les barres d'erreurs étant également en échelle logarithmique). Donc la méthode proposée est également plus robuste.

Sur les images réelles, et en l'absence de vérité de terrain, il est seulement possible de fournir des conclusions qualitatives. L'algorithme semble converger rapidement vers des valeurs qui paraissent plus plausibles et plus proches des valeurs obtenues par les essais normalisés lorsque la méthode multiéchelle est utilisée, voir [Passieux et al., 2015a]. La chute, très tôt dans l'essai, du module de cisaillement identifié et les valeurs maximales des cartes de résidus se localisant près du trou semblent témoigner que le modèle linéaire élastique n'est pas suffisant. Une démarche analogue avec un modèle d'endommagement serait par exemple une suite logique.

**Bilan** La démarche très classique en simulation, qui consiste à utiliser une hiérarchie de modèles globaux simplifiés et locaux complexifiés, s'avère intéressante pour la mesure et l'identification. Cette dé-

marche a l'intérêt d'éviter des compromis qui pourraient rendre complexe l'utilisation de ces méthodes d'identification à des échelles supérieures. La mise en place expérimentale reste encore un peu complexe. Des approches automatisées pourraient être développées. Le passage à la stéréo-CIN est également une évidence tant il permettrait d'éviter bien des problèmes expérimentaux de déplacement de caméra, sources d'incertitudes supplémentaires. Une résolution d'image cinq fois meilleure, conduit à une amélioration des incertitudes sur les paramètres identifiés d'un ordre de grandeur, ce qui nous semble être un résultat intéressant. Enfin, dans le cas des matériaux composites qui sont rigides, nous avons mis en évidence qu'une variation très tôt (c'est-à-dire lorsque le rapport signal/bruit est encore peu favorable) de certains paramètres peut témoigner de phénomènes non linéaires qu'il faudra prendre en compte, peut-être même si l'on est seulement intéressé par l'identification des paramètres élastiques [Passieux et al., 2015a].

Les premiers développements nécessaires à la transposition de cette méthode à la stéréo-CIN sont présentés dans le paragraphe suivant.

### 3 Stéréo-CIN éléments finis régularisée par la théorie des plaques et coques

#### 3.1 Projet Vertex

Pour l'instant, les essais et les modèles développés pour analyser le comportement de structures composites sont essentiellement limités à des éprouvettes basiques sous sollicitations simples. Le projet ANR VERTEX (« Validation eXpérimentale et modélisation de structures composites sous sollicitations complexes ») a pour but de développer un moyen d'analyse et de validation de modèles à l'échelle dite du « détail structural », c'est-à-dire avec des éprouvettes de quelques dizaines de centimètres. Un des premiers jalons de ce projet est la construction d'une machine d'essais non conventionnelle adaptée aux éprouvettes à cette échelle. Cette machine est aujourd'hui opérationnelle à l'Institut Clément Ader, voir figure 4.8.

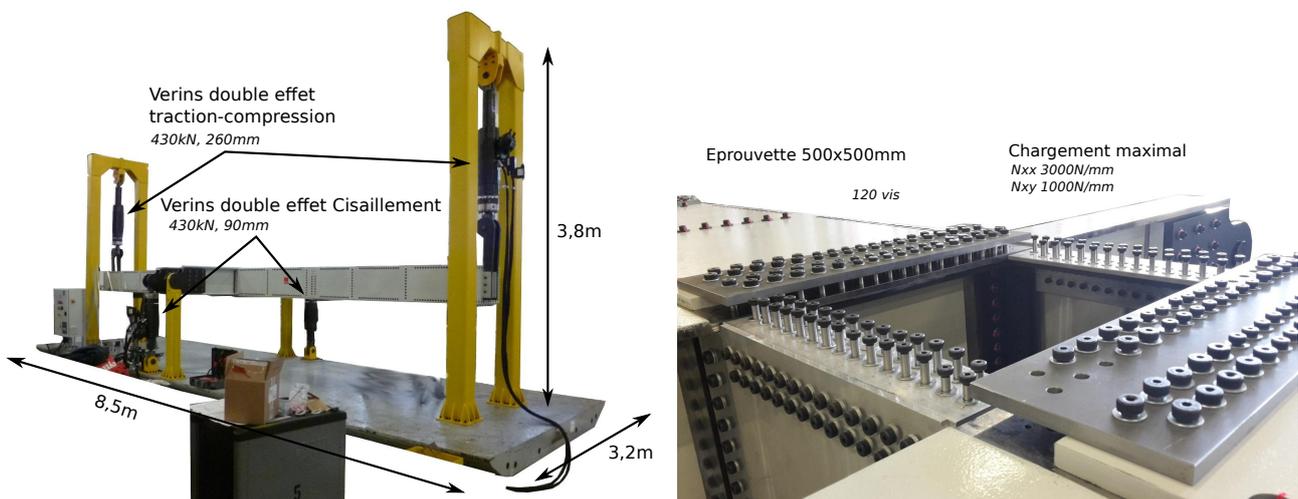


FIGURE 4.8 – Machine d'essai multiaxiale VERTEX. Vue d'ensemble à gauche et zoom sur la partie supérieure du caisson central où est mise en place l'éprouvette.

Cette machine permet d'embarquer une éprouvette de  $500 \times 500$ mm sur la partie supérieure du caisson central d'une poutre de 8 mètres de long. En mettant cette poutre en flexion et/ou en torsion, on fait subir à l'éprouvette un essai de traction-compression/cisaillement. Il est également possible de rajouter une pression interne avec une vessie prévue à cet effet dans le caisson central. La particularité de cette machine est que, compte tenu de la rigidité des éprouvettes composites, certaines parties de la machine (en particulier les flans centraux latéraux) peuvent subir des déformations plastiques. De fait, la fonction de transfert

entre la consigne des vérins et le chargement hyperstatique aux bord de l'éprouvette n'est pas linéaire. La question de l'instrumentation est donc essentielle. En effet, comment peut-on piloter un montage d'essai dans ces conditions? Les conditions aux limites (hyperstatiques) étant inconnues, que mettre au bord d'un modèle si l'on souhaite valider son caractère prédictif sur un essai réel? Est-on capable, de plus, dans ce contexte d'identifier les paramètres du modèle?

Notre contribution à ce projet se situe justement au niveau de l'instrumentation. Notre objectif est multiple :

- Le premier point est la validation. On souhaite mesurer le champ de déplacement et de rotation dans l'éprouvette, afin de fournir un chargement expérimental représentatif à mettre au bord des modèles éléments finis que nos partenaires souhaitent valider. Ceci nécessite le développement d'une méthode de mesure adaptée.
- La deuxième partie consistera à développer un moyen de mesure stéréoscopique multiéchelle pour, en plus de la précédente mission, être capable d'investiguer des zones locales où vont se développer des mécanismes d'endommagement et de fissuration.
- Enfin, avec ce moyen de mesure à plusieurs échelles, on souhaite aller jusqu'à l'identification de propriétés matériaux et de lois de comportement plus complexes (endommagement par exemple).

Le premier point consiste donc à développer un moyen de mesure des conditions aux limites expérimentales en vision monoéchelle, mais stéréoscopique compte tenu de la complexité de l'essai. Dans la suite, on va décrire le principe de la stéréo-CIN classique, afin d'en montrer les limites pour ce projet. On va présenter une reformulation du problème de stéréo-CIN avec un maillage éléments finis dans le repère monde que l'on a développé dans le cadre de la thèse de Jean-Emmanuel Pierré. Enfin, on expliquera comment mesurer le champ de déplacement et de rotation de la surface moyenne d'une plaque à partir d'une régularisation mécanique de cette formulation.

### 3.2 Stéréo-CIN classique

Pour faire une mesure stéréoscopique, on se base sur un modèle de banc d'au moins deux caméras [Hartley and Zisserman, 2003], voir figure 4.9. Ce modèle se base sur un projecteur par caméra noté

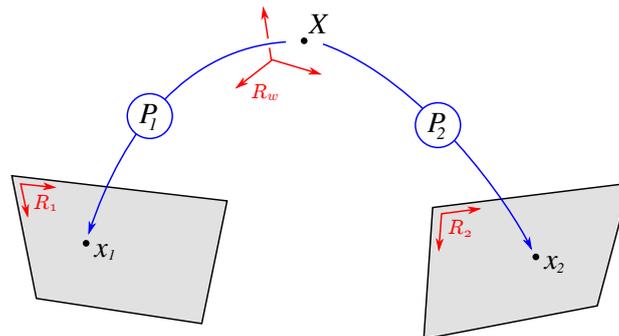


FIGURE 4.9 – Modèle de Banc stéréoscopique.

$\mathbf{x}_c = \mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c)$ , qui, aux trois coordonnées d'un point 3D  $\mathbf{X}$  dans le repère monde  $R_W$  associe les deux coordonnées  $\mathbf{x}_c = (u, v)$  du point correspondant dans le repère image  $R_c$ . Ce projecteur est un modèle dont les paramètres  $\mathbf{p}_c$  se décomposent en deux parties :

- les **paramètres intrinsèques** sont internes du capteur d'image  $c$  (la distance focale, les facteurs d'échelle, les centres des images et les paramètres des distorsions radiales, prismatiques et de décentrage, le skew et la taille de l'image en pixels.)
- les **paramètres extrinsèques** caractérisent la position et l'orientation de la caméra dans le repère monde (trois translations et trois rotations rigides)

L'expression de l'opérateur  $\mathbf{P}_c$  qui se base sur des produits d'opérateurs simples dans l'espace projectif n'est pas essentielle pour la compréhension de ce qui suit, le lecteur pourra se référer à [Garcia, 2001, Pierré et al., 2016] pour plus de précisions. Notons simplement que cette fonction est non linéaire mais qu'on en a une expression analytique. Les paramètres sont identifiés dans une étape dite de « calibration » avec des mires [Hartley and Zisserman, 2003] ou sur les images d'une surface non plane mouchetée.

**Mesure de forme par stéréo** La mesure de forme se fait classiquement en deux phases. La première appelée « appariement » consiste à trouver des points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  stéréo-correspondant par corrélation d'image numérique :

$$\mathbf{d}^* = \arg \min_{\mathbf{d}} \int \left[ f_1(\mathbf{x}_1) - f_2(\mathbf{x}_2) \right]^2 d\mathbf{x}_1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{d}(\mathbf{x}_1) \quad (4.8)$$

notons que ceci dissymétrise le problème, puisque l'intégration se fait dans l'une des images. Ici on ne fait aucunement appel au modèle de caméra, ce qui est dommage puisque l'on dispose d'un banc calibré. En l'absence de distorsions (ou après les avoir corrigées), on peut toutefois ajouter à ce problème la contrainte épipolaire [Xu and Zhang, 1996]. Il s'agit d'une contrainte géométrique, qui veut que le stéréo-correspondant  $\mathbf{x}_2$  d'un point  $\mathbf{x}_1$  de l'image  $f_1$  appartienne à une droite dans l'image  $f_2$ . Cette droite est obtenue par produit avec un opérateur linéaire (appelée matrice fondamentale) dans l'espace projectif.

Une fois connus les deux stéréo-correspondants, il suffit alors de résoudre un deuxième problème d'optimisation appelé « triangulation » qui consiste à trouver le point 3D  $\mathbf{X}$  dont les projections dans les images sont les plus proches possibles des points  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  :

$$\mathbf{X}^* = \arg \min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1) - \mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\mathbf{P}_2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_2) - \mathbf{x}_1 - \mathbf{d}(\mathbf{x}_1)\|_2^2 \quad (4.9)$$

Si l'on dispose d'un nombre suffisant de stéréo-correspondants (ce qui est souvent le cas si l'appariement s'est fait par corrélation d'images) alors on peut également re-estimer les paramètres des caméras  $\mathbf{p}_c$  en même temps que les positions 3D des points avec la même fonctionnelle. Cette étape est appelée « ajustement de faisceaux » [Triggs et al., 2000] :

$$\mathbf{X}^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^* = \arg \min_{\mathbf{X}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \|\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1) - \mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\mathbf{P}_2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_2) - \mathbf{x}_1 - \mathbf{d}(\mathbf{x}_1)\|_2^2 \quad (4.10)$$

En général pour mesurer une forme, on fait l'appariement par corrélation d'image en considérant tous les pixels de l'image de gauche pour  $\mathbf{x}_1$ . La forme est donc connue sous forme d'un nuage de points 3D  $\mathbf{X}$  correspondants. Il ne s'agit pas d'une description continue d'une surface.

**Mesure de déplacement 3D par stéréo** La mesure de déplacement 3D par stéréo-CIN nécessite deux paires d'images : une paires d'images stéréoscopiques  $f_1$  et  $f_2$  à l'instant  $t_0$  et une paire d'images  $g_1$  et  $g_2$  à l'instant  $t_0 + dt$  après que l'objet observé se soit déplacé et/ou déformé, voir figure 4.13. La mesure se fait en répétant plusieurs fois les problèmes d'optimisation du type de ceux utilisés pour l'appariement (4.8) et pour la triangulation (4.9) [Garcia, 2001, Garcia et al., 2002] :

- appariement  $\mathbf{d}$  entre les images de référence  $f_1$  et  $f_2$
- triangulation à partir de  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  pour obtenir une forme initiale  $\mathbf{X}$  à l'instant  $t_0$
- appariement  $\mathbf{t}$  entre les images de référence  $f_1$  et  $g_1$
- appariement  $\mathbf{t}'$  entre les images de référence  $f_1$  et  $g_2$
- triangulation à partir de  $\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}$  et  $\mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{t}'$  pour obtenir une forme  $\mathbf{X}'$  à l'instant  $t_0 + dt$
- estimation du déplacement 3D par comparaison des deux formes :  $\mathbf{U} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$

Ainsi le champ de déplacement n'est pas l'inconnue de base d'un unique problème tel que c'est le cas en CIN-2D et en CIV. Le champ de déplacement est issu de cinq problèmes d'optimisations en chaîne menés indépendamment. Il est donc difficile dans ce contexte d'imposer une contrainte sur le champ de déplacement inconnu  $\mathbf{U}$ .

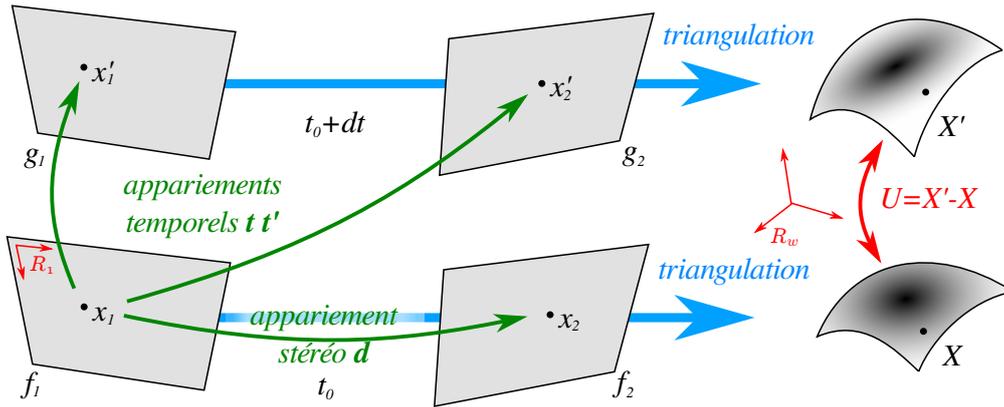


FIGURE 4.10 – Les principales étapes de la mesure de champs de déplacement 3D surfacique par stéréo corrélation d’images numériques classique. En vert les appariements par CIN et en bleu les triangulations.

C’est pour cette raison que nous avons été contraints, dans le cadre de la thèse de Jean-Emmanuel Pierré, à reformuler le problème de stéréo corrélation d’images numériques de façon à n’avoir qu’un seul problème dont l’unique inconnue est le déplacement. Une fois ce problème ré-écrit sur l’inconnue  $\mathbf{U}$ , il sera donc possible de rajouter une régularisation mécanique de type plaque à la mesure pour mesurer efficacement les conditions aux limites type déplacements/rotations au bord de l’éprouvette Vertex.

### 3.3 Reformulation de la Stéréo-CIN éléments finis dans le repère monde

Dans cette étude, nous considérons que les paramètres intrinsèques sont calibrés dans une phase off-line avec des mires, éventuellement chaque caméra calibrée indépendamment. Ainsi dans la suite,  $\mathbf{p}_c$  désigne seulement les paramètres extrinsèques. Le principe de base de cette formulation est que **l’on travaille uniquement dans le repère 3D du maillage que l’on choisi pour définir le repère monde  $R_w$** . Tous les problèmes sont alors écrits dans ce repère 3D et les intégrales de la forme faible de la conservation des niveaux de gris s’écriront également en 3D.

Faire une mesure avec un maillage élément finis dont la forme théorique (Fig. 4.11(gauche)) ne correspond pas à la forme réelle (Fig. 4.11(droite)) de l’objet observé nécessite deux étapes préalables. Il faut

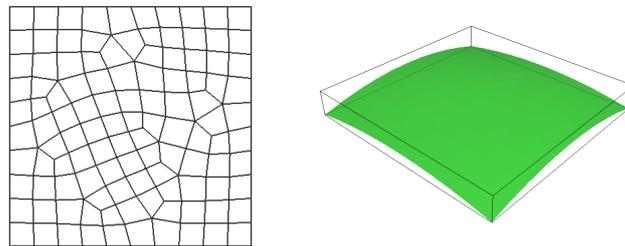


FIGURE 4.11 – Illustration de la nouvelle formulation de stéréo-CIN avec un maillage éléments finis théorique plan (à gauche) et la vraie forme inconnue (à droite) que l’on cherche à mesurer.

d’abord être capable de situer le repère du maillage par rapport à celui des caméras, c’est l’étape de **calibration des paramètres extrinsèques  $\mathbf{p}_c$** . Il faut ensuite corriger la forme du maillage afin que chaque point 3D de ce maillage se projette bien (avec les projecteurs  $\mathbf{P}_c$ ) dans deux points stéréo-correspondants, c’est-à-dire ayant le même niveau de gris. C’est l’étape de **mesure de forme**. Une démarche tout à fait analogue a été déjà publiée dans [Beaubier et al., 2014] pour la mesure de forme à partir de fonction NURBS.

**Calibration des paramètres extrinsèques** Le problème consiste à trouver les translations et rotations  $\mathbf{p}_c$  afin de placer le maillage éléments finis au plus près de la surface réelle qui est inconnue. Pour ce faire on cherche les paramètres solution du problème de conservation des niveaux de gris suivant :

$$\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} \int_{\Omega} \left[ f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1)) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_2)) \right]^2 d\mathbf{X} \quad (4.11)$$

Notons ici que l'intégration se fait dans le domaine 3D et ainsi une image n'est plus privilégiée par rapport à une autre (plus de notion de maître-esclave), chaque caméra étant traitée de manière symétrique. Ce problème non linéaire est résolu par un algorithme de type Newton. À l'itération  $k$ , les paramètres  $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]^T$  sont recherchés sous la forme  $\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \delta\mathbf{p}$  puis après linéarisation et différenciation, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ext}^k \delta\mathbf{p} &= \mathbf{b}_{ext}^k \\ \mathbf{M}_{ext,ij}^k &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial p_i} \nabla f_1 - \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial p_i} \nabla f_2 \right) \left( \nabla f_1 \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial p_j} - \nabla f_2 \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial p_j} \right) d\mathbf{X} \\ \mathbf{b}_{ext,i}^k &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial p_i} \nabla f_1 - \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial p_i} \nabla f_2 \right) \left( f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1^k)) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_2^k)) \right) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

ou  $\frac{\partial \mathbf{P}_c}{\partial p_i}$  sont des termes du gradient des projecteurs  $\mathbf{P}_c$  par rapport aux paramètres extrinsèques, ils admettent une écriture analytique.  $\nabla f_c$  est le gradient de l'image  $f_c$  au point  $\mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c^k)$  qui dépend de  $\mathbf{p}_c$ . L'opérateur  $\mathbf{M}_{ext}^k$  doit donc être re-assemblé à chaque itération.

S'agissant d'un algorithme de gradient, il doit être initialisé par une solution assez proche de la solution. En général, cette initialisation grossière est obtenue « à la main » en sélectionnant quelques points dans chaque image et sur le maillage et en résolvant un petit problème non linéaire avec la fonctionnelle utilisée pour l'ajustement de faisceaux (4.10) dans laquelle  $\mathbf{X}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  sont fixés et seuls les paramètres extrinsèques sont recherchés.

Pour illustrer ces étapes, on présente la position du maillage par rapport à la forme réelle sur la figure 4.12(a) à l'issue de l'estimation initiale grossière et sur la figure 4.12(b) à l'issue de la calibration (4.11). Dans

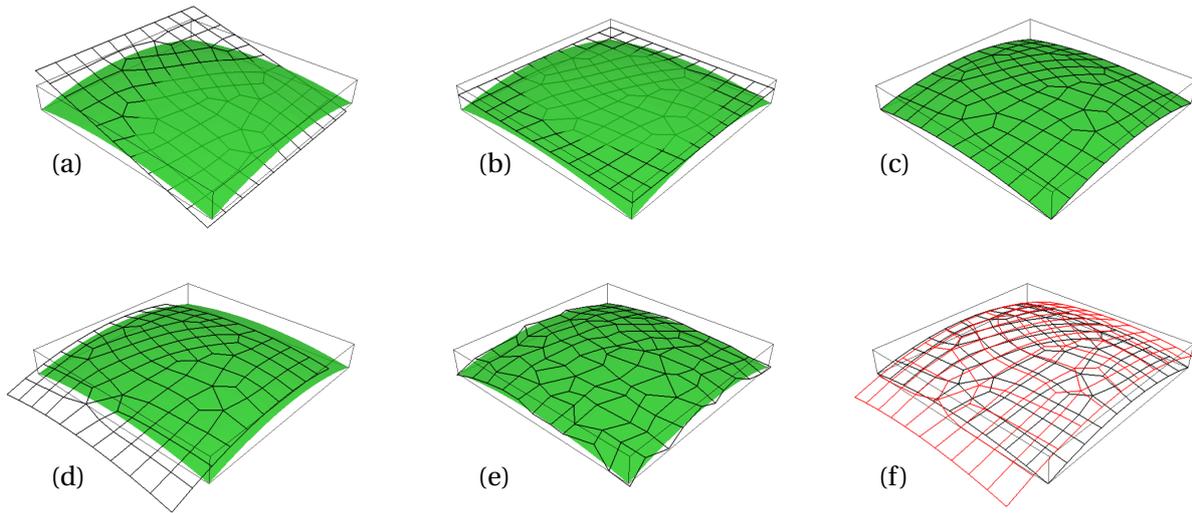


FIGURE 4.12 – Illustration des étapes de la nouvelle formulation de stéréo-CIN avec un maillage élément finis : (a) initialisation grossière des paramètres extrinsèques ; (b) mesure des paramètres intrinsèques par CIN, forme fixée ; (c) mesure de forme,  $\mathbf{p}_c$  fixés ; glissements globaux (d) ou locaux (e) possibles à la surface lors de la mesure de forme ; (f) mesure temporelle de déplacement  $\mathbf{U}$

ces deux étapes, le maillage est considéré fixe, on cherche les translations et rotations permettant de le placer au plus près de la surface inconnue. Dans [Beaubier et al., 2014] certains paramètres intrinsèques sont

également estimés à cette étape. Ceci beaucoup plus complexe dans notre cas, car d'une part on considère un modèle de caméra non linéaire plus complexe (avec plus de paramètres) et d'autre part, notre maillage initial est plan.

**Mesure de forme** Une fois les paramètres extrinsèques déterminés, on cherche à mesurer la forme, c'est-à-dire à trouver la position  $\mathbf{X}$  qui permet de mieux vérifier la conservation des niveaux de gris. Pour ce faire, on utilise la même métrique que précédemment avec cette fois  $\mathbf{X}$  inconnue :

$$\mathbf{X}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{X}} \int_{\Omega} \left[ f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1)) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X}, \mathbf{p}_2)) \right]^2 d\mathbf{X} \quad (4.12)$$

Ici encore, un algorithme type Newton est utilisé. A l'itération  $k$ , la position est estimée par  $\mathbf{X}^{k+1} = \mathbf{X}^k + \delta\mathbf{X}$  où la correction de déplacement  $\delta\mathbf{X}$  est recherchée dans le sous-espace d'approximation éléments finis par  $\delta\mathbf{X} = \sum_i \boldsymbol{\phi}_i(\mathbf{X}) q_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{shape}^k \mathbf{q} &= \mathbf{b}_{shape}^k \\ \mathbf{M}_{shape,ij} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_i^T (\nabla \mathbf{P}_1^T \nabla f_1 - \nabla \mathbf{P}_2^T \nabla f_2) (\nabla f_1^T \nabla \mathbf{P}_1 - \nabla f_2^T \nabla \mathbf{P}_2) \boldsymbol{\phi}_j d\mathbf{X} \\ \mathbf{b}_{shape,j} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\phi}_j^T (\nabla \mathbf{P}_1^T \nabla f_1 - \nabla \mathbf{P}_2^T \nabla f_2) \left( f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X}^k, \mathbf{p}_1)) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X}^k, \mathbf{p}_2)) \right) d\mathbf{X} \end{aligned}$$

ou  $\nabla \mathbf{P}_c$  est le gradient spatial des projecteurs qui a également une écriture analytique. De même que pour la calibration, l'opérateur  $\mathbf{M}_{shape}^k$  doit être assemblé à chaque itération. À convergence, on obtient alors une estimation éléments finis de la forme réelle de l'objet, voir Fig. 4.12(c)

**Remarque.** Comme tout problème de corrélation d'images, ce problème est mal posé. Avec la mesure de forme classique, on a deux inconnues (les deux composantes du champ de disparité  $\mathbf{d}$  dans le repère image) pour seulement une équation scalaire donnée par la conservation des niveaux de gris. Ici, le problème est encore plus compliqué puisqu'on cherche un champ de positions 3D, donc 3 inconnues par point pour le même nombre d'équations. En fait, si on regarde de près, dans la métrique 4.12 rien n'empêche le maillage de « glisser » à la surface de l'objet. Il peut y avoir des glissements globaux (voir figure 4.12(d)) donc l'opérateur a un noyau de dimension 3 correspondant aux glissements selon les deux directions et à une « rotation ». Pour ce le représenter, on peut imaginer une nappe sur une table. En fait, le problème est beaucoup plus singulier que ça puisque chaque noeud peut glisser localement à la surface de l'objet, sans avoir d'effet sur la fonctionnelle, voir Fig. 4.12(e). C'est comme si on avait une nappe (très) élastique. Ce problème doit donc être nécessairement régularisé.

Pour les glissements locaux, on peut, par exemple, ne rechercher que la composante normale à la surface du déplacement (ce qui est assez simple dans le cas des éprouvettes planes du montage Vertex). Le plus simple consiste encore à imposer une contrainte isométrique. C'est d'ailleurs ce qui est fait en simulation de tissus pour les rendus graphique dans l'industrie du film d'animation et des jeux vidéo. Pour ce faire, on peut ajouter un terme de régularisation Tikhonov :

$$\delta\mathbf{X}^* = \operatorname{argmin}_{\delta\mathbf{X}} \int_{\Omega} \left[ f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X})) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X})) \right]^2 d\mathbf{X} + \lambda \|\delta\mathbf{X}\|_{\mathbf{K}}^2$$

ou la norme  $\|\cdot\|_{\mathbf{K}}$  peut être associée à un opérateur mécanique type treillis, ou un opérateur de rigidité éléments finis de type plaque/coque en membrane seulement, ou plus simplement un opérateur type Laplacien. Ce problème ne doit sans doute pas arriver lorsque des NURBS sont utilisées pour décrire la surface [Beaubier et al., 2014] car, et c'est là l'intérêt majeur de l'utilisation des NURBS en mesure de forme, il suffit de très peu de points de contrôle pour décrire une surface, donc le problème est déjà régularisé par des fonctions de forme très régulières. L'intérêt des NURBS dans ce contexte est qu'on peut découpler l'interpolation de la forme (qui peut être décrite avec très peu de points de contrôle) de l'interpolation du déplacement (qui peut être raffinée à volonté, sans toucher la forme)... ce qui n'est pas le cas en éléments finis en général.

Cependant, l'approche avec NURBS où celle avec éléments finis développée ici sont toutes deux sujettes à des glissements globaux que la régularisation précédente ne règle pas. Ces glissements sont particulièrement visibles lorsque l'on itère entre la mesure de forme et la calibration des paramètres extrinsèques. Plusieurs pistes sont actuellement étudiées comme forcer les projections des points 3D dans une des images à ne pas trop s'écartier de leur position initiale :

$$\delta \mathbf{X}^* = \arg \min_{\delta \mathbf{X}} \int_{\Omega} \left[ f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X})) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X})) \right]^2 d\mathbf{X} + \lambda \|\mathbf{P}_1(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}, \mathbf{p}_1) - \mathbf{P}_1(\mathbf{X}, \mathbf{p}_1)\|^2$$

ce qui revient à se rapprocher de ce qui est fait dans les approches classiques mais qui a l'inconvénient de favoriser une caméra par rapport aux autres. Une autre possibilité pourrait être d'utiliser une régularisation basée sur les points sélectionnés initialement, du type :

$$\delta \mathbf{X}^* = \arg \min_{\delta \mathbf{X}} \int_{\Omega} \left[ f_1(\mathbf{P}_1(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X})) - f_2(\mathbf{P}_2(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X})) \right]^2 d\mathbf{X} + \lambda \sum_c \|\mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c) - \mathbf{x}_c\|_s^2$$

Ces points étant sélectionnés avec une précision pixel, il faudrait utiliser une norme pondérée  $\|\cdot\|_s = \|s(\cdot)\|_2$  avec  $s$  une fonction quasi nulle entre 1 et -1. Ces approches sont en cours de développement.

**Remarque.** Puisqu'il est basé sur un Newton, cet algorithme nécessite une phase d'initialisation type multigrille basée sur une série d'images de plus faible définition générées par agrégation de pixels. Contrairement à la CIN-2D où cette étape est faite avec un maillage plus grossier, ici nous avons préféré conserver le même maillage et utiliser une régularisation Tikhonov (Laplacien) plus forte, puisque la projection de champ 3D d'un maillage surfacique à un autre nous a paru inutilement complexe.

**Mesure de déplacement 3D** Les projecteurs  $\mathbf{P}_c$  sont des fonctions qui, à un point 3D  $\mathbf{X}$  associent un point  $\mathbf{x}$  dans le plan image. Elles ne sont pas capables de projeter un vecteur déplacement par exemple. Pour écrire un problème de mesure de déplacement 3D à partir d'image stéréo avec comme unique inconnue le déplacement 3D  $\mathbf{U}$ , nous avons proposé de considérer deux points 3D différents :  $\mathbf{X}$  un point du maillage à  $t_0$  et  $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X})$  le même point à l'instant  $t_0 + dt$ , voir figure 4.13. Le point  $\mathbf{X}$  se projette dans l'image

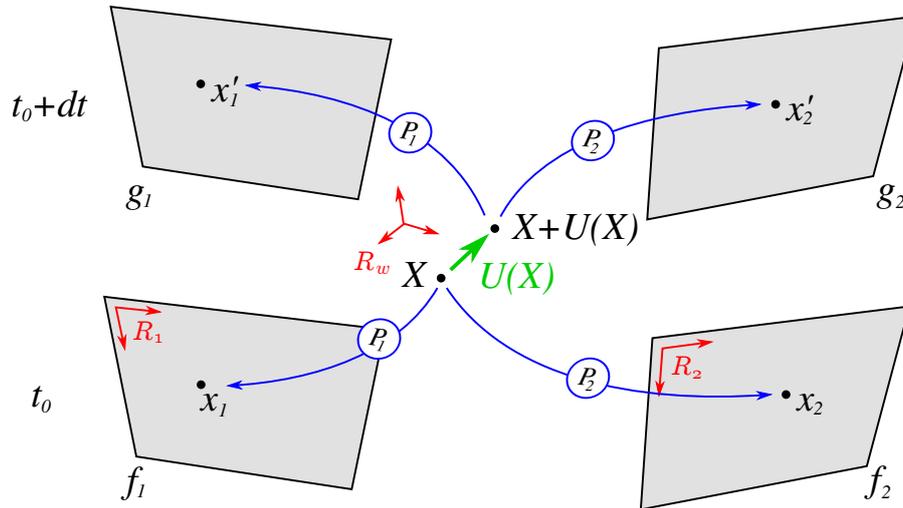


FIGURE 4.13 – Principe de la nouvelle formulation de stéréo-CIN avec un maillage élément finis : mesure de déplacement.

de référence  $f_c$  et le point  $\mathbf{X}'$  se projette dans l'image dans l'état déformé  $g_c$ , leurs niveaux de gris associés doivent être identiques et ce pour chaque caméra. Il en résulte la fonctionnelle suivante :

$$\mathbf{U}^* = \arg \min_{\mathbf{U}} \sum_c \int_{\Omega} \left[ f_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c)) - g_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}), \mathbf{p}_c)) \right]^2 d\mathbf{X} \quad (4.13)$$

qui est simplement une expression de la vérification de la conservation des niveaux de gris entre l'état de référence et l'état déformé. Il s'agit des appariements verticaux dans la figure 4.13. Chaque terme pour chaque caméra étant indépendant, on peut considérer, *a priori*, un nombre de caméra supérieur à deux. Une telle formulation dans le repère monde semble avoir été introduite la première fois dans [Réthoré et al., 2013]. Cette formulation présente l'avantage de traiter de manière symétrique toutes les caméras. En introduisant, à l'itération  $k$ , une interpolation éléments finis 3D surfacique de la correction de déplacement  $\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + \sum_i \phi_i(\mathbf{X}) q_i$ , en linéarisant et en écrivant la stationnarité, il vient le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\left( \sum_c \mathbf{M}_{dic}^c \right)}_{\mathbf{M}_{stereo}} \mathbf{q} = \underbrace{\left( \sum_c \mathbf{b}_{dic}^c \right)}_{\mathbf{b}_{stereo}}$$

avec

$$\mathbf{M}_{dic,i,j}^c = \int_{\Omega} \phi_i^T (\nabla \mathbf{P}_c^T \nabla f_c) (\nabla f_c^T \nabla \mathbf{P}_c) \phi_j d\mathbf{X}$$

$$\mathbf{b}_{dic,j}^c = \int_{\Omega} \phi_j^T (\nabla \mathbf{P}_c^T \nabla f_c) \left( f_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c)) - g_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X} + \mathbf{U}^k, \mathbf{p}_c)) \right) d\mathbf{X}$$

**Remarque.** *l'opérateur et le second membre étant des sommes d'opérateurs indépendants par caméra, ce problème peut être résolu par un gradient conjugué et donc parallélisé pour chaque caméra très simplement, à l'image de ce qui a été fait en décomposition de domaine pour la corrélation d'image 2D dans la section 3 du chapitre 3*

**Remarque.** *Cet algorithme nécessite, tout comme celui de la mesure de forme, une phase d'initialisation type multigrille, que nous basons sur une agglomération des pixels et une régularisation Tikhonov avec laplacien.*

Afin d'éviter une dérive temporelle de l'appariement, il est également possible d'introduire dans ce formalisme un terme supplémentaire qui a vocation à contrôler que l'appariement stéréo ne se perd pas dans le temps. Il suffit d'écrire, en plus des appariements temporels (verticaux dans Fig. 4.13) des termes correspondants aux appariements stéréo (horizontaux dans Fig. 4.13) à l'instant  $t_0 + dt$  :

$$\mathbf{U}^* = \arg \min_{\mathbf{U}} \sum_c \int_{\Omega} \left[ f_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X}), \mathbf{p}_c) - g_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}), \mathbf{p}_c)) \right]^2 d\mathbf{X}$$

$$+ \sum_c \sum_{e < c} \int_{\Omega} \left[ g_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}), \mathbf{p}_c)) - g_e(\mathbf{P}_e(\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}), \mathbf{p}_e)) \right]^2 d\mathbf{X} \quad (4.14)$$

l'appariement à l'instant  $t_0$  étant considéré comme vérifié par les étapes de calibration et mesure de forme. Il va sans dire que ceci a un cout supplémentaire non négligeable dans le cas où l'on dispose de plus de deux caméras.

**Intégration dans le repère monde** Avec cette formulation, on intègre sur la surface 3D et non plus aux pixels dans les images. Il faut donc définir une méthode d'intégration adaptée. Nous avons naturellement choisi de construire une méthode de quadrature basée sur le maillage. Contrairement à la simulation, où une méthode de Gauss est efficace et pertinente, ici l'intégrande fait intervenir le gradient des niveaux de gris qui est à très courte longueur de variation. Nous choisissons donc une méthode des rectangles en subdivisant les éléments finis de façon homogène, cf. Fig. 4.14 Pour ce faire on projette les sommets de chaque élément dans chaque image et fait suffisamment de subdivision de façon à ce que l'on ait au moins un point d'intégration par pixel. Ceci permet de ne pas sur-intégrer, mais de ne pas perdre d'informations non plus. Nous avons montré expérimentalement que ce choix s'avère judicieux [Pierré et al., 2016].

**Formulation dans le repère monde de la CIN-2D** Cette formulation dans le repère monde, qui s'est avérée nécessaire pour pouvoir imposer une régularisation type plaque/coque à la mesure stéréo, peut être également intéressante pour la mesure CIN 2D. Nous l'avons montré dans l'article soumis [Pierré et al., 2016]. Elle apporte deux intérêts majeurs :

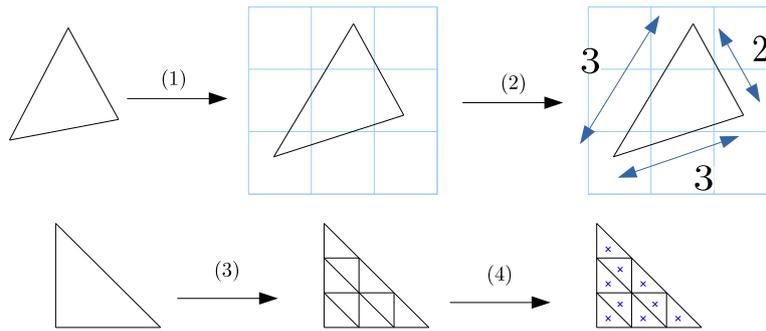


FIGURE 4.14 – Construction d'une méthode de quadrature appropriée à la résolution des images.

- Elle permet de définir une méthode de quadrature plus précise que la méthode d'intégration aux pixels qui n'intègre pas la fonction constante de façon exacte. Avec une méthode d'intégration aux pixels classique, non seulement l'aire des éléments est approximée par un ensemble entier de pixels, mais en plus la forme des éléments est approximée car les arêtes des éléments ne sont pas nécessairement droites dans les images. Ceci a peu d'effet sur l'erreur aléatoire (écart type) de mesure mais qui conduit à réduire le biais systématique presque d'un ordre de grandeur même avec un simple modèle de caméra linéaire, voir Fig 4.15

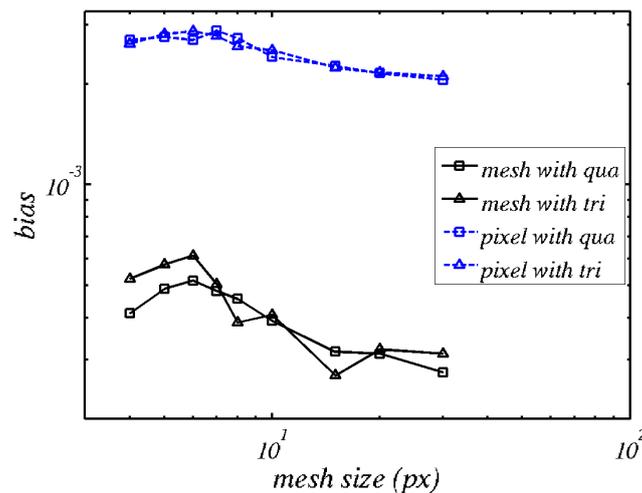


FIGURE 4.15 – Biais systématique en fonction de la taille des éléments finis (triangles et quadrangles) avec la méthode d'intégration aux pixels et celle dans le repère monde (ici modèle linéaire de caméra).

- Elle permet de prendre en compte un modèle de caméra plus complexe prenant en compte les distorsions et donc de réduire considérablement les incertitudes de mesures si l'objectif présente des distorsions 4.16. Ceci peut-être de grand intérêt dans le cas où la mesure est faite dans le but d'identifier des paramètres par une technique type FEMU basée sur les déplacements. C'est également une méthode indispensable pour instrumenter la propagation d'une fissure par une méthode basée sur les séries de Williams lorsqu'on ne peut pas utiliser un objectif télécentrique.

### 3.4 Stéréo-CIN EF avec régularisation

Maintenant que la formulation fait apparaître le déplacement 3D, il suffit alors de lui appliquer une contrainte de régularité mécanique. Le modèle éléments finis plaque/coque considère souvent la surface moyenne et a comme inconnues les déplacements, mais aussi les rotations de cette surface moyenne, voir Fig. 4.17. De son côté la mesure stéréo n'a accès qu'au champ de déplacement sur la surface supérieure.



FIGURE 4.16 – Erreur sur le champ de déplacement mesuré à partir d’image synthétiques représentant une translation pure avec distorsions. À gauche, l’intégration pixel et à droite, l’intégration dans le repère monde.

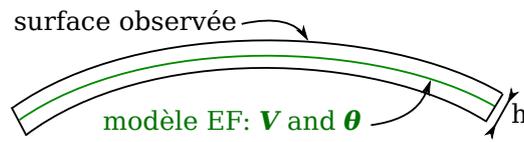


FIGURE 4.17 – Régularisation par un modèle EF plaque/coque défini par les champs de déplacement et de rotation sur la surface moyenne, d’une mesure stéréo de champ de déplacement 3D à la surface supérieure d’une éprouvette d’épaisseur  $h$ .

Nous utilisons donc un simple opérateur  $\Pi$  qui permet de déterminer le déplacement de la peau supérieure en fonction des déplacements et rotations du modèle EF :

$$\mathbf{U} = \Pi \mathbf{V} \quad \text{tel que} \quad \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix}$$

Il suffit alors d’écrire le problème de corrélation de la manière suivante :

$$\mathbf{V}^* = \arg \min_{\mathbf{V}} \sum_c \int_{\Omega} \left[ f_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X}, \mathbf{p}_c)) - g_c(\mathbf{P}_c(\mathbf{X} + \Pi \mathbf{V}(\mathbf{X}), \mathbf{p}_c)) \right]^2 d\mathbf{X} + \lambda \|\bar{\mathbf{K}} \mathbf{V}\|_2^2 \quad (4.15)$$

dans lequel l’inconnue n’est plus le déplacement  $\mathbf{U}$  de la peau supérieure, mais bien le déplacement et les rotations  $\mathbf{V}$  de la surface moyenne.

$$\left[ \Pi^T \mathbf{M}_{stereo} \Pi + \lambda \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}} \right] \delta \mathbf{q} = \Pi^T \mathbf{b}_{stereo}^k - \lambda \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{q}_0$$

**Exemple** On présente ici un exemple sur une plaque en sandwich aluminium/polycarbonate de  $250 \times 250$  mm en flexion recouverte d’un mouchetis imprimé. Un modèle plaque est construit sur Abaqus. Son maillage éléments finis et son opérateur sont directement importés pour faire la mesure. La calibration des paramètres intrinsèques est réalisée avec le logiciel VIC-3D avec des mires. La calibration des paramètres extrinsèques est initialisée en sélectionnant huit points dans chaque image et sur le maillage. La calibration est ensuite réalisée et en reprojétant les noeuds du maillage dans chaque image, on peut contrôler sa vraisemblance, voir Fig. 4.18. Ensuite la mesure de forme est réalisée avec une régularisation type plaquien sur chaque composante. Sur la figure 4.19(gauche), la carte des résidus montre que la mesure de forme semble correcte (inférieure à 10% de la dynamique, lorsqu’elle était à 80% à l’issue de l’étape d’initialisation). La forme mesurée par EF semble en bon accord avec le nuage de points fourni par VIC-3D sur la

Fig. 4.19(droite). Bien qu'il s'agisse plus d'une limitation pratique que théorique des méthodes subset, on notera toutefois que l'intérêt des éléments finis dans leur capacité à mesurer jusqu'au bord de l'éprouvette est clairement mis en évidence ici. Enfin, la figure 4.20(droite) présente le champ de déplacement mesuré. Lorsqu'on utilise la régularisation plaque, on obtient directement les champs de rotations 4.20(droite). On s'aperçoit sur ce résultat, que la question des conditions aux limites du problème de mesure régularisé par théorie plaque nécessite encore quelques efforts.

**Bilan** Cette formulation dans le repère monde est très générale puisque applicable à un système de  $n$  caméra, et toutes les caméras sont traitées de manière symétriques. Elle permet de rajouter des termes supplémentaires très facilement pour contrôler l'appariement dans la mesure temporelle. Elle permet également de formuler le problème sur l'inconnue déplacement, ce qui permet de rajouter des contraintes mécaniques de régularité sur le champ de déplacement inconnu. Il reste cependant encore du travail, sur la régularisation des conditions aux limites, sur la régularisation du problème de mesure de forme. Outre l'identification, la prochaine étape consistera à développer une approche multi-résolution, afin de pouvoir mêler des vues en champ lointain pour la mesure des conditions aux limites et des vues en champ proche pour identifier des mécanismes éventuellement non-linéaires apparaissant localement.

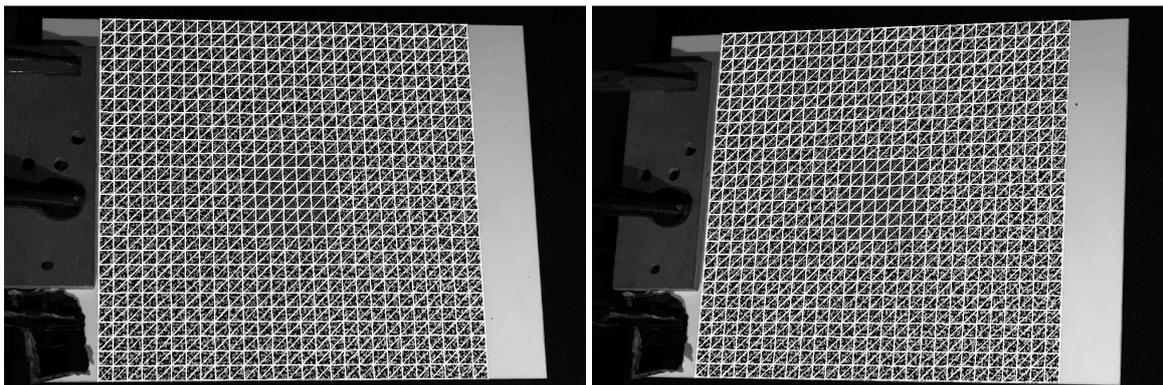


FIGURE 4.18 – Images de référence gauche et droite avec sur-impression du maillage pour contrôle de l'estimation des paramètres extrinsèques.

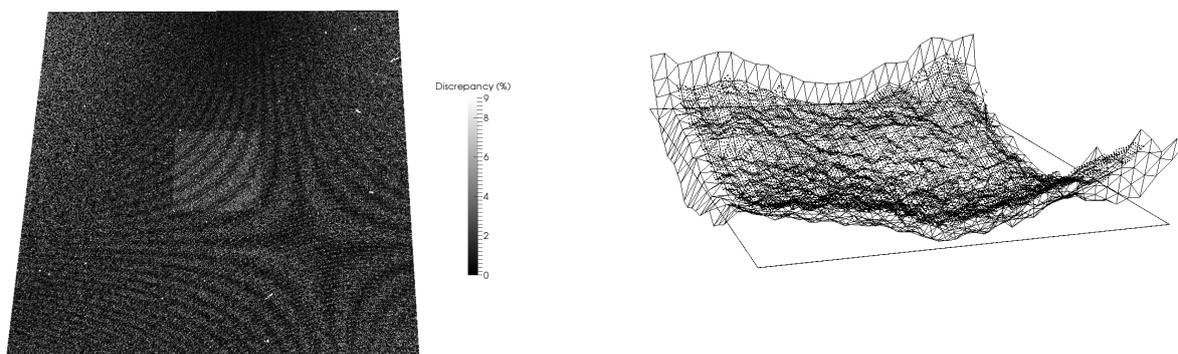


FIGURE 4.19 – Mesure de forme : carte de résidu de corrélation après mesure de forme (à gauche) et comparaison de la forme mesurée par EF et les points donnés par VIC-3D (à droite).

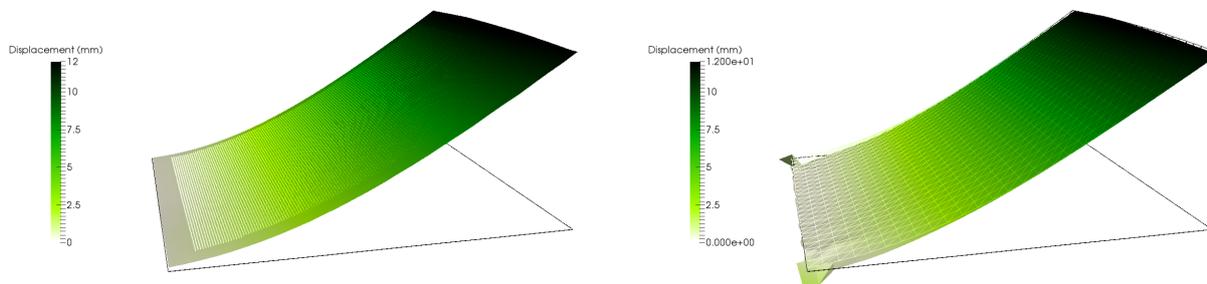


FIGURE 4.20 – Mesure de déplacement : champ de déplacement comparé à celui de VIC-3D (à gauche) et champ de rotation mesuré par la méthode régularisée (à droite).



# Bilan et perspectives

---

En mécanique des solides, on avait jadis l'habitude de différencier numériciens et expérimentateurs. Non seulement cette distinction n'a plus de sens aujourd'hui car les méthodes numériques dépassent largement le calcul des structures et investissent massivement le domaine de la mécanique expérimentale. Mais, dans de nombreux travaux (hybrides ou intégrés), il est aujourd'hui difficile de distinguer s'il l'analyse relève du domaine de la simulation ou de celui de la mesure. Les travaux présentés dans ce document tentent de contribuer au vaste domaine de la mécanique numérique au sens large. Ils consistent principalement à développer un certain nombre d'outils qui visent à réduire la complexité numérique des problèmes, à simplifier leur développement et leur usage, à accélérer leur résolution, à les enrichir localement et à simplifier le couplage des différents outils entre eux.

Une des principales contributions se situe autour des algorithmes de couplage non intrusif, puisqu'il m'a été donné d'y travailler de façon continue depuis mon arrivée à Toulouse. Une méthode multigrille non intrusive à trois échelles a été proposée pour la simulation de la propagation de fissures basée sur la méthode des éléments finis étendue. Différentes techniques d'accélération de convergence ont été analysées et comparées sur différents cas de plasticité locale, fissuration locale, contact local et dans le cas de patches multiples et d'interfaces non compatibles. Le concept de non-intrusivité a été étendu au cas où la non-linéarité n'est plus locale mais globale. Un algorithme de décomposition de domaine non linéaire et non intrusif a donc été proposé, qui permet, par exemple, de paralléliser un code industriel séquentiel, sur un ordinateur parallèle. Une extension directe concerne l'application de la méthode de décomposition de domaine non linéaire à des problèmes vraiment représentatifs des préoccupations industrielles. Nous tentons d'analyser dans la thèse de Mickaël Duval un problème de flambement local d'un tronçon de fuselage raidi. Ceci nécessitera sans doute une accélération de la résolution du problème global linéaire. Nous tentons actuellement d'étendre ce concept aux méthodes de domaine fictif pour proposer une façon non intrusive de prendre en compte les surfaces rognées dites "trimmed surfaces" de l'analyse isogéométrique dans le cadre du post-doc de Robin Bouclier. Plus généralement, la question du contrôle des calculs dans ce contexte non-intrusif est encore ouverte. Autant que celle du placement et de la taille optimale du patch pour une précision donnée. Cette piste est actuellement en cours d'étude dans la thèse de Mickaël Duval en collaboration avec Alexei Losinski. Des approches similaires ont été étendues au cadre de la dynamique dans le domaine temporel [Chantrait et al., 2014, Bettinotti et al., 2014] et également dans le domaine modal [Craig and Bampton, 1968]. Des approches voisines peuvent être développées dans le domaine fréquentiel. C'est ce que nous tentons de développer actuellement dans la thèse de Juan Loukota. Pour l'instant limité à des conditions de raccord parfaites, cette méthode pourrait s'appliquer au cas de conditions de raccord non linéaire (contact, interface cohésive) entre le domaine global et le patch.

Une seconde contribution se situe autour de solveurs efficaces pour la mesure par corrélation d'images numériques basée sur les éléments finis (CIN-EF). Nous nous sommes intéressés à la problématique du coût de l'inversion des systèmes linéaires en proposant une méthode de réduction de modèle par séparation de variables pour la résolution des problèmes de CIN/CIV. Nous avons également travaillé sur une méthode de décomposition de domaine permettant de paralléliser la résolution de ce problème et qui permet d'apporter une réponse également à la problématique de la manipulation des images. Une perspective intéressante serait de développer un cadre général pour le couplage de deux domaines régularisés en corrél-

lation d'image. Il s'agira d'assurer la continuité du déplacement, mais également de la contrainte normale des modèles de régularisation, afin d'assurer leur équilibre. Plus généralement, de nombreux chantiers sont encore ouverts en mesure CIN-EF. La question de l'adaptivité  $h$  ou  $p$  a fait l'objet de très récemment travaux dans la communauté de la mesure CIN [Wittevrongel et al., 2015, Kleinendorst et al., 2015]. Il nous semblerait plus propice de s'appuyer sur une mesure EF régularisée avec un maillage très fin et avec un paramètre de régularisation adaptatif. La problématique de la mesure de champ en vibrations est également intéressante. Une telle méthode pourrait avoir de l'intérêt dans le cas de vibrations linéaires, le temps pouvant être utilisé comme régularisation. Ceci pourrait permettre d'éviter le compromis vitesse d'acquisition / définition des images.

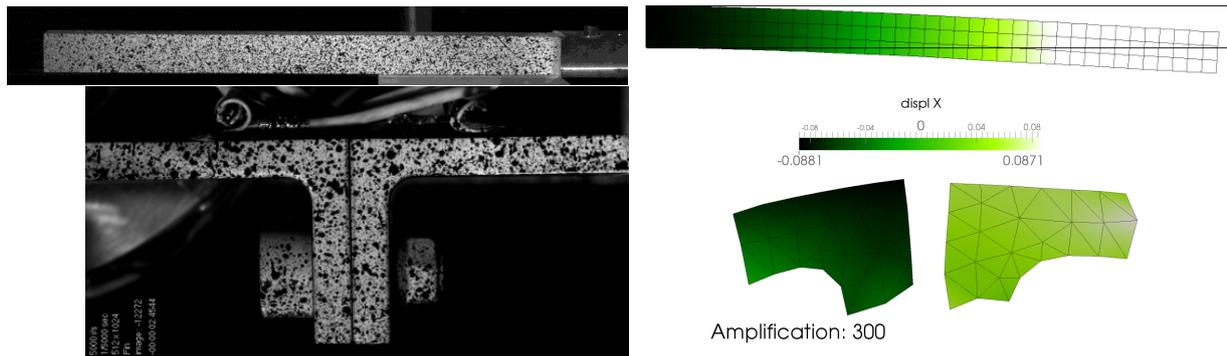


FIGURE 5.1 – Mesure de déformée modale dans le cas d'un mode linéaire d'une poutre en flexion (en haut). Mesure de déformée modale dans le cas d'un mode non linéaire d'un assemblage boulonné (en bas)

Une troisième contribution concerne la mesure de champ et l'identification à partir de mesures multi-échelles. La première étude de faisabilité en 2D présentée laisse entrevoir des perspectives intéressantes. Les travaux sur la formulation globale en stéréo devraient nous permettre à court terme de pouvoir envisager des mesures stéréo à partir d'images de résolutions hétérogènes. Ceci permettra par exemple, d'avoir accès à une mesure des conditions aux limites loin de la zone d'intérêt dans laquelle une mesure plus raffinée pourrait être conduite. Cette question devra nécessairement s'accompagner d'une réflexion sur le caractère multi-échelle du mouchetis, que nous avons seulement entamé.

En identification, le choix de la forme de l'éprouvette et du trajet de chargement sont pour l'instant fait de façon plus ou moins artisanale, bien que ce point ait fait l'objet d'une analyse assez fine dans [Pottier et al., 2012]. On pourrait avoir envie de résoudre un problème d'optimisation topologique ou de forme pour maximiser la sensibilité du champ de déplacement par rapport aux paramètres que l'on souhaite identifier. En plus de la maximisation de la sensibilité, l'idéal serait de s'assurer que les sensibilités de chaque paramètre soient du même niveau et que les incertitudes associées soient décorrélatées. La question centrale est celle de la définition de la fonctionnelle à optimiser. Une première tentative a été proposée très récemment [Bertin et al., 2015].

Pour aller encore plus loin, il faudra être capable de développer des stratégies numériques capables d'assimiler des données expérimentales de natures différentes (thermique, mécanique, ponctuelles, étendues...). Ceci nécessitera d'accorder un soin particulier à la calibration des référentiels de chaque instrument de mesure et, de manière plus générale, de renforcer le contrôle des incertitudes et des sources d'erreurs dans la chaîne essai/modèle/simulation.

Enfin, bien qu'absent de la pyramide des essais, ce genre d'approche mêlant mesure et modèles nous semble tout à fait pertinente pour analyser et caractériser le comportement des matériaux (par exemple composites) à l'échelle de leur micro-structure à partir d'images volumiques. Lorsque la microstructure ne se prête pas à la corrélation (mouchetis inexistant ou anisotrope), des traitements particuliers devront être développés. Nous avons abordé cette question dans la thèse de Luis A. G. Perini sur des éprouvettes

verre/époxy par l'ajout d'opacifiants à base de  $\text{BaSO}_4$ . Des techniques de mesure régularisées par des modèles basés sur les images [Maire et al., 2003, Mishnaevsky, 2005, Saito et al., 2010, Legrain et al., 2011] pourront également permettre de gérer ce problème. Le tomographe dont on vient de s'équiper à l'ICA, devrait nous permettre de pousser plus loin ces études.

Toutes ces questions sont autant de défis scientifiques interdisciplinaires qu'il s'agira de relever pour améliorer la compréhension des phénomènes physiques et l'efficacité avec laquelle les modèles les prédisent.



# Bibliographie

- [Abrate, 1998] Abrate, S. (1998). *Impact on composite structures*. Cambridge University Press. (Cité en page 21.)
- [Adrian, 1984] Adrian, R. J. (1984). Scattering particle characteristics and their effect on pulsed laser measurements of fluid flow : speckle velocimetry vs. particle image velocimetry. *Appl. Opt.*, 23 :1690–1691. (Cité en page 7.)
- [Adrian, 2005] Adrian, R. J. (2005). Twenty years of particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 39(2) :159–169. (Cité en page 7.)
- [Alfaiate et al., 2003] Alfaiate, J., Simone, A., and Sluys, L. (2003). Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *International Journal of Solids and Structures*, 40(21) :5799 – 5817. (Cité en page 52.)
- [Amiot et al., 2013] Amiot, E, Bornert, M., Doumalin, P, Dupré, J.-C., Fazzini, M., Orteu, J.-J., Poilâne, C., Robert, L., Rotinat, R., Toussaint, E., Wattrisse, B., and Wienin, J.-S. (2013). Assessment of digital image correlation measurement accuracy in the ultimate error regime : main results of a collaborative benchmark. *Strain*, 49(6) :483–496. (Cité en pages 17 et 46.)
- [Ammar et al., 2006] Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F, and Keunings, R. (2006). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 139(3) :153–176. (Cité en pages 20 et 42.)
- [Ammar et al., 2007] Ammar, A., Mokdad, B., Chinesta, F, and Keunings, R. (2007). A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids : Part II : Transient simulation using space-time separated representations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 144(2-3) :98–121. (Cité en page 42.)
- [Andrieux et al., 1997] Andrieux, S., Ben Abda, A., and Bui, H. (1997). Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *CRAS Mécanique*, 324 :1431–1438. (Cité en page 85.)
- [Apel et al., 2008] Apel, T., Leguillon, D., Pester, C., and Yosibach, Z. (2008). Edge singularities and structure of the 3-d williams expansion. *C.R. Mécanique*, 336 :629–635. (Cité en page 34.)
- [ASTM D3039-00, 2000] ASTM D3039-00 (2000). *Standard test method for tensile properties of polymer matrix composite materials*, volume 15. (Cité en page 1.)
- [ASTM E647, 2000] ASTM E647 (2000). *Standard Test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates*, volume 03.01. (Cité en page 2.)
- [Aubertin et al., 2009] Aubertin, P, Réthoré, J., and de Borst, R. (2009). Energy conservation of atomistic/continuum coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78(11) :1365–1386. (Cité en page 52.)
- [Aubry et al., 1991] Aubry, N., Guyonnet, R., and Lima, R. (1991). Spatiotemporal analysis of complex signals : theory and applications. *Journal of Statistical Physics*, 64 :683–739. (Cité en page 36.)
- [Avril et al., 2008a] Avril, S., Bonnet, M., Bretelle, A.-S., Grédiac, M., Hild, F, Ienny, P, Latourte, F, Lemosse, D., Pagano, S., Pagnacco, E., and Pierron, F (2008a). Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4) :381–402. (Cité en pages 8 et 85.)
- [Avril et al., 2008b] Avril, S., Feissel, P, Pierron, F, and Villon, P. (2008b). Estimation of strain field from full-field displacement noisy data. *European Journal on Computational Mechanics*, 17(5-7) :857–868. (Cité en page 86.)

- [Azzouna et al., 2013] Azzouna, M. B., Feissel, P., and Villon, P. (2013). Identification of elastic properties from full-field measurements : a numerical study of the effect of filtering on the identification results. *Measurement Science and Technology*, 24(5) :055603. (Cité en pages 7 et 85.)
- [Baldi et al., 2013] Baldi, A., Francesconi, L., Medda, A., and Bertolino, F. (2013). Comparing two damage models under shear stress. *Experimental Mechanics*, 53(7) :1105–1116. (Cité en page 14.)
- [Barbarulo et al., 2014] Barbarulo, A., Ladevèze, P., Riou, H., and Kovalevsky, L. (2014). Proper generalized decomposition applied to linear acoustic : A new tool for broad band calculation. *Journal of Sound and Vibration*, 333(11) :2422 – 2431. (Cité en page 42.)
- [Barker and Hollenbach, 1972] Barker, L. M. and Hollenbach, R. E. (1972). Laser interferometer for measuring high velocities of any reflecting surface. *J. Appl. Phys.*, 43 :4669–4675. (Cité en page 21.)
- [Barrault et al., 2004] Barrault, M., Maday, Y., Nguyen, N. C., and Patera, A. T. (2004). An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9) :667 – 672. (Cité en page 37.)
- [Barrière et al., 2013] Barrière, L., Marguet, S., Castanié, B., Cresta, P., and Passieux, J.-C. (2013). An adaptive model reduction strategy for post-buckling analysis of stiffened structures. *Thin-Walled Structures*, 73 :81–93. (Cité en pages 37, 38 et 41.)
- [Barrière, 2014] Barrière, L. (2014). *Stratégies de calcul intensif pour la simulation du post-flambement local des grandes structures composites raidies aéronautiques*. PhD thesis, Université de Toulouse. (Cité en pages 38, 41 et 74.)
- [Barsoum, 1974] Barsoum, R. (1974). Application of quadratic isoparametric elements in linear fracture mechanics. *Int. J. Fracture*, 10 :603–605. (Cité en pages 26 et 27.)
- [Bay et al., 1999] Bay, B., Smith, T., Fyhrie, D., and Saad, M. (1999). Digital volume correlation : three-dimensional strain mapping using x-ray tomography. *Experimental Mechanics*, 39(3) :217–226. (Cité en pages 8 et 14.)
- [Beaubier et al., 2014] Beaubier, B., Dufour, J., Hild, F., Roux, S., Lavernhe, S., and Lavernhe-Taillard, K. (2014). Cad-based calibration and shape measurement with stereodic - principle and application on test and industrial parts. *Experimental Mechanics*, 54(3) :329–341. (Cité en pages 14, 15, 93, 94 et 95.)
- [Ben Azzouna et al., 2011] Ben Azzouna, M., Périé, J.-N., Guimard, J.-M., Hild, F., and Roux, S. (2011). On the identification and validation of an anisotropic damage model using full-field measurements. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(8) :1130–1150. (Cité en page 86.)
- [Ben Belgacem, 1999] Ben Belgacem, F. (1999). The Mortar finite element method with Lagrangian multiplier. *Numerische Mathematik*, 84(2) :173–197. (Cité en pages 28 et 63.)
- [Ben Dhia, 1998] Ben Dhia, H. (1998). Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 326 :899–904. (Cité en page 52.)
- [Ben Dhia et al., 2011] Ben Dhia, H., Chamoin, L., Oden, J. T., and Prudhomme, S. (2011). A new adaptive modeling strategy based on optimal control for atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(37–40) :2675 – 2696. Special Issue on Modeling Error Estimation and Adaptive Modeling. (Cité en page 52.)
- [Ben Dhia et al., 2008] Ben Dhia, H., Elkhodja, N., and Roux, F.-X. (2008). Multimodeling of multi-altered structures in the arlequin framework. solution with a domain-decomposition solver. *European Journal of Computational Mechanics*, 17 :969 – 980. (Cité en page 52.)
- [Ben Dhia and Jamond, 2010] Ben Dhia, H. and Jamond, O. (2010). On the use of xfem within the arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 199(21-22) :1403–1414. (Cité en page 52.)

- [Ben Dhia and Rateau, 2005] Ben Dhia, H. and Rateau, G. (2005). The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62 :1442–1462. (Cité en pages 28 et 52.)
- [Benoit et al., 2009] Benoit, A., Guérard, S., Gillet, B., Guillot, G., Hild, F., Mitton, D., Périé, J.-N., and Roux, S. (2009). 3d analysis from micro-mri during in situ compression on cancellous bone. *Journal of Biomechanics*, 42(14) :2381–2386. (Cité en pages 8, 14, 16 et 48.)
- [Berger-Vergiat et al., 2012] Berger-Vergiat, L., Waisman, H., Hiriyyur, B., Tuminaro, R., and Keyes, D. (2012). Inexact schwarz-algebraic multigrid preconditioners for crack problems modeled by extended finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(3) :311–328. (Cité en page 59.)
- [Bernardi et al., 1994] Bernardi, C., Maday, Y., and Patera, A. (1994). A new nonconforming approach to domain decomposition : The Mortar element method. In *H. Brezis, and J.-L. Lions (Eds.), Collège de France Seminar XI, Pitman, 1994*, pages 13–51. (Cité en pages 28, 55 et 63.)
- [Bertin et al., 2015] Bertin, M., Hild, F., Roux, S., Mathieu, F., and Leclerc, H. (2015). Optimization and validation of a cruciform geometry for the identification of elastoplastic models. In *Photomechanics 15 (Delft, NL)*. (Cité en page 104.)
- [Besnard et al., 2011] Besnard, G., Guerard, S., Roux, S., and Hild, F. (2011). A space-time approach in digital image correlation : Movie-dic. *Opt. Lasers Eng.*, 49 :71–81. (Cité en pages 23 et 48.)
- [Besnard et al., 2012a] Besnard, G., Hild, F., Lagrange, J.-M., Martinuzzi, P., and Roux, S. (2012a). Analysis of necking in high speed experiments by stereocorrelation. *Int Jal of Impact Engineering*, 49 :179–191. (Cité en pages 14 et 23.)
- [Besnard et al., 2006] Besnard, G., Hild, F., and Roux, S. (2006). “finite-element” displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-le Châtelier bands. *Experimental Mechanics*, 46(6) :789–803. (Cité en pages 9, 14, 60, 71 et 87.)
- [Besnard et al., 2012b] Besnard, G., Leclerc, H., Roux, S., and Hild, F. (2012b). Analysis of image series through digital image correlation. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 47(4) :214–228. (Cité en pages 23 et 48.)
- [Bettinotti et al., 2014] Bettinotti, O., Allix, O., Perego, U., Oancea, V., and Malherbe, B. (2014). A fast weakly intrusive multiscale method in explicit dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 100(8) :577–595. (Cité en pages 62 et 103.)
- [Białecki et al., 2005] Białecki, R. A., Kassab, A. J., and Fic, A. (2005). Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(6) :774–797. (Cité en page 20.)
- [Biotteau et al., 2012] Biotteau, E., Gravouil, A., Lubrecht, A., and Combescure, A. (2012). Three dimensional automatic refinement method for transient small strain elastoplastic finite element computations. *Computational Mechanics*, 49(1) :123–136. (Cité en page 59.)
- [Bittencourt et al., 1996] Bittencourt, T., Wawrzynek, P., Ingraffea, A., and Sousa, J. (1996). Quasi-automatic simulation of crack propagation for 2D LEFM problems. *Engineering Fracture Mechanics*, 55(2) :321–334. (Cité en pages 26 et 64.)
- [Bizeul et al., 2010] Bizeul, M., Bouvet, C., Barrau, J.-J., and Cuenca, R. (2010). Influence of woven ply degradation on fatigue crack growth in thin notched composites under tensile loading. *International Journal of Fatigue*, 32(1) :60–65. (Cité en page 87.)
- [Blaysat et al., 2015] Blaysat, B., Grediac, M., and Sur, F. (2015). An experimental study of camera sensor noise propagation to displacement maps obtained by dic. In *Photomechanics 15 (Delft, NL)*. (Cité en page 17.)

- [Blaysat et al., 2014] Blaysat, B., Hoefnagels, J., Lubineau, G., Alfano, M., and Geers, M. (2014). Interface debonding characterization by image correlation integrated with double cantilever beam kinematics. *International Journal of Solids and Structures*, page Online first. (Cité en page 14.)
- [Bognet et al., 2012] Bognet, B., Bordeu, F., Chinesta, F., Leygue, A., and Poitou, A. (2012). Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 201-204(1) :1–12. (Cité en pages 20 et 42.)
- [Bognet et al., 2014] Bognet, B., Leygue, A., and Chinesta, F. (2014). Separated representations of 3d elastic solutions in shell geometries. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 1(1). (Cité en page 42.)
- [Bornert et al., 2009] Bornert, M., Brémand, F., Doumalin, P., Dupré, J.-C., Fazzini, M., Grédiac, M., Hild, F., Mistou, S., Molimard, J., Orteu, J.-J., Robert, L., Surrel, Y., Vacher, P., and Wattrisse, B. (2009). Assessment of digital image correlation measurement errors : methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49(3) :353–370. (Cité en pages 17, 46, 71 et 82.)
- [Bornert et al., 2004] Bornert, M., Chaix, J.-M., Doumalin, P., Dupré, J.-C., Fournel, T., Jeulin, D., Maire, E., Moreaud, M., and Moulinec, H. (2004). Mesure tridimensionnelle de champs cinématiques par imagerie volumique pour l'analyse des matériaux et des structures. *Inst. Mes. Métrol.*, 4 :43–88. (Cité en pages 8 et 14.)
- [Bouclier et al., 2015] Bouclier, R., Passieux, J.-C., and Salaün, M. (2015). Local enrichment of nurbs patches by non-intrusive coupling with a new mortar-based methodology. *Submitted to Finite Element in Analysis and Design*. (Cité en pages 62 et 69.)
- [Brandt, 1984] Brandt, A. (1984). *Multigrid Techniques : 1984 Guide with applications to fluid dynamics*. The Weizmann Institute of Science : Rehovot, Israel. (Cité en pages 51 et 53.)
- [Brezzi et al., 2001] Brezzi, F., Lions, J.-L., and Pironneau, O. (2001). Analysis of a chimera method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(7) :655 – 660. (Cité en page 52.)
- [Briggs, 1987] Briggs, W. (1987). *A multigrid tutorial*. Society for industrial and applied mathematics. (Cité en page 55.)
- [Budinger et al., 2014] Budinger, M., Passieux, J., Gogu, C., and Fraj, A. (2014). Scaling-law-based metamodels for the sizing of mechatronic systems. *Mechatronics*, 24(7) :775–787. (Cité en page 19.)
- [Bui, 1978] Bui, H. (1978). *Mécanique de la Rupture Fragile*. Masson, Paris, France. (Cité en page 29.)
- [Byklum et al., 2004] Byklum, E., Steen, E., and Amdahl, J. (2004). A semi-analytical model for global buckling and postbuckling analysis of stiffened panels. *Thin-Walled Structures*, 42(5) :701 – 717. (Cité en page 38.)
- [Cardenas-Garcia et al., 1995] Cardenas-Garcia, J., Yao, H., and Zheng, S. (1995). 3d reconstruction of objects using stereo imaging. *Optics and Lasers in Engineering*, 22(3) :193–213. (Cité en page 8.)
- [Carlberg, 2015] Carlberg, K. (2015). Adaptive h-refinement for reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page in press. (Cité en page 35.)
- [Carlberg et al., 2011] Carlberg, K., Bou-Mosleh, C., and Farhat, C. (2011). Efficient non-linear model reduction via a least-squares petrov–galerkin projection and compressive tensor approximations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(2) :155–181. (Cité en pages 34 et 35.)
- [Castanié et al., 2008] Castanié, B., Bouvet, C., Aminanda, Y., Barrau, J.-J., and Thevenet, P. (2008). Modeling of low energy/low velocity impact on nomex honeycomb sandwich structures with metallic skins. *International Journal of Impact Engineering*, 35 :620–634. (Cité en page 21.)
- [Chahine et al., 2008] Chahine, E., Laborde, P., and Renard, Y. (2008). Crack-tip enrichment in the XFEM method using a cutt-off function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75(6) :629–646. (Cité en page 27.)

- [Chahine et al., 2011] Chahine, E., Laborde, P., and Renard, Y. (2011). A non-conformal extended finite element approach : Integral matching xfm. *Applied Numerical Mathematics*, 61(3) :322–343. (Cité en page 27.)
- [Chantrait et al., 2014] Chantrait, T., Rannou, J., and Gravouil, A. (2014). Low intrusive coupling of implicit and explicit time integration schemes for structural dynamics : Application to low energy impacts on composite structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86 :23–33. (Cité en pages 62 et 103.)
- [Chao and Reuter, 1997] Chao, Y. and Reuter, W. (1997). Fracture of surface cracks under bending loads. In *Underwood JH, MacDonald B, Mitchell M, editors. ASTM STP 1321, Fatigue and Fracture Mechanics*, volume 28, pages 214–242. (Cité en page 24.)
- [Chasiotis and Knauss, 2002] Chasiotis, I. and Knauss, W. (2002). A new microtensile tester for the study of mems materials with the aid of atomic force microscopy. *Experimental Mechanics*, 42(1) :51–57. (Cité en page 8.)
- [Chatterjee, 2000] Chatterjee, A. (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science*, 78(7) :808–817. (Cité en page 20.)
- [Cheng et al., 2002] Cheng, P., Sutton, M., Schreier, H., and McNeill, S. R. (2002). Full-field speckle pattern image correlation with b-spline deformation function. *Experimental mechanics*, 42(3) :344–352. (Cité en pages 15 et 47.)
- [Chevreuil et al., 2013] Chevreuil, M., Nouy, A., and Safatly, E. (2013). A multiscale method with patch for the solution of stochastic partial differential equations with localized uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255 :255–274. (Cité en pages 62, 64, 65, 66 et 68.)
- [Chiaruttini et al., 2010] Chiaruttini, V., Feyel, F., and Chaboche, J.-L. (2010). A robust meshing algorithm for complex 3d crack growth simulations. In *European Congress on Computational Mechanics, Venice, Italy*. (Cité en page 28.)
- [Chiaruttini et al., 2011] Chiaruttini, V., Feyel, F., Rannou, J., and Guilie, J. (2011). An hybrid optimal approach for crack propagation : mixing conform remeshing and crack front enrichment. In *ECCOMAS thematic conference on eXtended Finite Element Methods, XFEM 2011. Cardiff, UK*. (Cité en page 28.)
- [Chinesta et al., 2011] Chinesta, E., Ladevèze, P., and Cueto, E. (2011). A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition. *Arch Comput Methods Eng*, 18 :395–404. (Cité en pages 20 et 43.)
- [Chinesta et al., 2013] Chinesta, E., Leygue, A., Bordeu, F., Aguado, J., Cueto, E., Gonzalez, D., Alfaro, I., Ammar, A., and Huerta, A. (2013). Pgd-based computational vademecum for efficient design, optimization and control. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(1) :31–59. (Cité en pages 19, 42 et 43.)
- [Claire et al., 2004] Claire, D., Hild, F., and Roux, S. (2004). A finite element formulation to identify damage fields : the equilibrium gap method. *Int J. Numer Methods Eng*, 61(2) :189–208. (Cité en page 85.)
- [Constantinescu, 1995] Constantinescu, A. (1995). On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 1(4) :293–313. (Cité en page 85.)
- [Courrier et al., 2014] Courrier, N., Boucard, P.-A., and Soulier, B. (2014). The use of partially converged simulations in building surrogate models. *Advances in Engineering Software*, 67(0) :186–197. (Cité en page 19.)
- [Craig and Bampton, 1968] Craig, R. and Bampton, M. (1968). Coupling of substructures for dynamic analysis. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 6(7) :1313–1319. (Cité en pages 35 et 103.)
- [Cresta et al., 2007] Cresta, P., Allix, O., Rey, C., and Guinard, S. (2007). Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods in structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :1436–1446. (Cité en pages 51 et 74.)

- [Crouzeix et al., 2009] Crouzeix, L., Périé, J.-N., Collombet, F., and Douchin, B. (2009). An orthotropic variant of the equilibrium gap method applied to the analysis of a biaxial test on a composite material. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 40(11) :1732 – 1740. (Cité en page 85.)
- [Daghia and Ladevèze, 2012] Daghia, F. and Ladevèze, P. (2012). A micro–meso computational strategy for the prediction of the damage and failure of laminates. *Composite Structures*, 94(12) :3644–3653. (Cité en page 62.)
- [David, 2014] David, C. (2014). *Identification de paramètres mécaniques de matériau composite à partir de corrélation d'images numériques multi-échelles*. PhD thesis, Université de Toulouse. (Cité en pages 16 et 69.)
- [de Borst et al., 2001] de Borst, R., Wells, G., and Sluys, L. (2001). Some observations on embedded discontinuity models. *Engineering Computations*, 18(1/2) :241–254. (Cité en page 52.)
- [Devries et al., 1989] Devries, F., Dumontet, F., Duvaut, G., and Léné, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27 :285–298. (Cité en page 51.)
- [Dickens et al., 1997] Dickens, J., Nakagawa, J., and Wittbrodt, M. (1997). A critique of mode acceleration and modal truncation augmentation methods for modal response analysis. *Computers and Structures*, 62(6) :985–998. (Cité en page 35.)
- [Dohrmann, 2003] Dohrmann, C. (2003). A preconditioner for substructuring based on constrained energy minimization. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 25 :246–258. (Cité en pages 51 et 74.)
- [Dufour et al., 2014] Dufour, J., Hild, F., and Roux, S. (2014). Integrated digital image correlation for the evaluation and correction of optical distortions. *Opt. Lasers Eng.*, 56 :121–133. (Cité en pages 14 et 15.)
- [Durif et al., 2012] Durif, E., Réthoré, J., Combescure, A., Fregonese, M., and Chaudet, P. (2012). Controlling stress intensity factors during a fatigue crack propagation using digital image correlation and a load shedding procedure. *Experimental Mechanics*, 52(8) :1021–1031. (Cité en page 81.)
- [Duval et al., 2015] Duval, M., Passieux, J.-C., Salün, M., and Guinard, S. (2015). Non-intrusive coupling : recent advances and scalable nonlinear domain decomposition. *Archives of Computational Methods in Engineering*, page Online first. (Cité en pages 52, 62, 63, 65, 66 et 74.)
- [Eftang et al., 2010] Eftang, J. L., Patera, A. T., and Rønquist, E. M. (2010). An "hp" certified reduced basis method for parametrized elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(6) :3170–3200. (Cité en page 42.)
- [Ekevid et al., 2004] Ekevid, T., Kettil, P., and Wiberg, N.-E. (2004). Adaptive multigrid for finite element computations in plasticity. *Computers and Structures*, 82(28) :2413 – 2424. (Cité en page 59.)
- [Elguedj et al., 2006] Elguedj, T., Gravouil, A., and Combescure, A. (2006). Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(7) :501–515. (Cité en page 27.)
- [Elguedj et al., 2010] Elguedj, T., Réthoré, J., and Buteri, A. (2010). Isogeometric analysis for strain field measurements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(1-4) :40–56. (Cité en pages 15 et 47.)
- [Farhat et al., 2001] Farhat, C., Lesoinne, M., Le Tallec, P., Pierson, K., and Rixen, D. (2001). A dual-primal unified FETI method–part I : A faster alternative to the two-level feti method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :1523–1544. (Cité en pages 51 et 74.)
- [Farhat and Roux, 1991] Farhat, C. and Roux, F. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227. (Cité en pages 40, 51, 73, 77 et 78.)
- [Fayolle and Hild, 2014] Fayolle, X. and Hild, F. (2014). Controlling stress intensity factor histories with digital images. *Experimental Mechanics*, 54(2) :305–314. (Cité en page 81.)

- [Fedele et al., 2013] Fedele, R., Galantucci, L., and Ciani, A. (2013). Global 2D digital image correlation for motion estimation in a finite element framework : a variational formulation and a regularized, pyramidal, multi-grid implementation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(12) :739–762. (Cité en pages 11, 12 et 61.)
- [Fehrenbach and Masmoudi, 2008] Fehrenbach, J. and Masmoudi, M. (2008). A fast algorithm for image registration. *Comptes Rendus Mathématique*, 346(9-10) :593–598. (Cité en pages 7, 14 et 60.)
- [Feissel and Allix, 2007] Feissel, P. and Allix, O. (2007). Modified constitutive error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : the elastic case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13/16) :1968–1983. (Cité en page 85.)
- [Feissel et al., 2013] Feissel, P., Schneider, J., Aboura, Z., and Villon, P. (2013). Use of diffuse approximation on {DIC} for early damage detection in 3d carbon/epoxy composites. *Composites Science and Technology*, 88(0) :16 – 25. (Cité en page 86.)
- [Feyel and Chaboche, 2000] Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000). FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 :309–330. (Cité en page 51.)
- [Fish and Belsky, 1995] Fish, J. and Belsky, V. (1995). Multigrid method for periodic heterogeneous media II. multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126(17-38). (Cité en pages 51 et 59.)
- [Fish et al., 1995] Fish, J., Pandheeradi, M., and Belsky, V. (1995). An efficient multilevel solution scheme for large scale non-linear systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(10) :1597–1610. (Cité en page 59.)
- [Fish et al., 1997] Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M., and Shephard, M. S. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148 :53–73. (Cité en page 51.)
- [Fleming, 1999] Fleming, D. C. (1999). Delamination modeling of composites for improved crash analysis. *NASA Technical Report Server*. (Cité en page 21.)
- [Florentin and Díez, 2012] Florentin, E. and Díez, P. (2012). Adaptive reduced basis strategy based on goal oriented error assessment for stochastic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 225 :116–127. (Cité en page 41.)
- [Forquin et al., 2004] Forquin, P., Rota, L., Charles, Y., and Hild, F. (2004). A method to determine the toughness scatter of brittle materials. *Int. J. Fract.*, 125(1) :171–187. (Cité en page 8.)
- [Forsberg et al., 2008] Forsberg, E., Mooser, R., Arnold, M., Hack, E., and Wyss, P. (2008). 3D micro-scale deformations of wood in bending : Synchrotron radiation  $\mu$ CT data analyzed with digital volume correlation. *Journal of Structural Biology*, 164(3) :255–262. (Cité en page 16.)
- [Franck et al., 2007] Franck, C., Hong, S., Maskarinec, S., Tirrell, D., and Ravichandran, G. (2007). Three-dimensional full-field measurements of large deformations in soft materials using confocal microscopy and digital volume correlation. *Experimental Mechanics*, 47 :427–438. (Cité en page 8.)
- [Freund, 1990] Freund, L. B. (1990). *Dynamic fracture mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. (Cité en page 34.)
- [Galland et al., 2011] Galland, F., Gravouil, A., Malvesin, E., and Rochette, M. (2011). A global model reduction approach for 3d fatigue crack growth with confined plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5–8) :699 – 716. (Cité en page 39.)
- [Garcia, 2001] Garcia, D. (2001). *Mesure de formes et de champs de déplacements tridimensionnels par st reo-corrélation d’images*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse. (Cité en page 92.)

- [Garcia et al., 2002] Garcia, D., Orteu, J.-J., and Penazzi, L. (2002). A combined temporal tracking and stereo-correlation technique for accurate measurement of 3d displacements : Application to sheet metal forming. *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126 :736–742. (Cité en pages 8, 14 et 92.)
- [Gendre et al., 2009] Gendre, L., Allix, O., and Gosselet, P. (2009). Non-intrusive and exact global/local techniques for structural problems with local plasticity. *Computational Mechanics*, 44 :233–245. (Cité en pages 51, 52, 62, 63, 66 et 68.)
- [Gendre et al., 2011] Gendre, L., Allix, O., and Gosselet, P. (2011). A two-scale approximation of the schur complement and its use for non-intrusive coupling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 87 :889–905. (Cité en pages 62 et 79.)
- [Geniaut and Galenne, 2012] Geniaut, S. and Galenne, E. (2012). A simple method for crack growth in mixed mode with x-fem. *International Journal of Solids and Structures*, 49(15-16) :2094–2106. (Cité en page 64.)
- [Germaneau et al., 2007] Germaneau, A., Doumalin, P., and Dupré, J. C. (2007). Full 3d measurement of strain field by scattered light for analysis of structures. *Experimental Mechanics*, 47(4) :523–532. (Cité en page 8.)
- [Gerstenberger and Tuminaro, 2012] Gerstenberger, A. and Tuminaro, R. (2012). An algebraic multigrid approach to solve XFEM based fracture problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page online first. (Cité en page 59.)
- [Ghosh et al., 1995] Ghosh, S., Lee, K., and Moorthy, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenization theory and Voronoï cell finite element method. *Journal of Solids and Structures*, 32(1) :27–62. (Cité en page 51.)
- [Giraldi et al., 2014] Giraldi, L., Nouy, A., and Legrain, G. (2014). Low-rank approximate inverse for preconditioning tensor-structured linear systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(4) :A1850–A1870. (Cité en page 42.)
- [Giraldi et al., 2013] Giraldi, L., Nouy, A., Legrain, G., and Cartraud, P. (2013). Tensor-based methods for numerical homogenization from high-resolution images. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 254(0) :154 – 169. (Cité en pages 42 et 44.)
- [Glowinski et al., 2005] Glowinski, R., He, J., Lozinski, A., Rappaz, J., and Wagner, J. (2005). Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements. *Numer. Math.*, 101(4) :663–687. (Cité en page 52.)
- [Glowinski and Le Tallec, 1989] Glowinski, R. and Le Tallec, P. (1989). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwarz alternating method. In SIAM, editor, *Proc. of the 3rd International Symposium on Domain Decomposition Methods for P.D.E.*, pages 224–231. (Cité en pages 53 et 54.)
- [Gogu and Passieux, 2013] Gogu, C. and Passieux, J. (2013). Efficient surrogate construction by combining response surface methodology and reduced order modeling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(6) :821–837. (Cité en pages 19 et 40.)
- [Gomes Perini, 2014] Gomes Perini, L. (2014). *La PGD au service de la corrélation volumique pour l'analyse du comportement des composites à l'échelle micro*. PhD thesis, Université de Toulouse. (Cité en pages 16 et 48.)
- [Gomes Perini et al., 2014] Gomes Perini, L., Passieux, J.-C., and Périé, J.-N. (2014). A multigrid PGD-based algorithm for volumetric displacement fields measurements. *Strain*, 50(4) :355–367. (Cité en pages 15, 42, 44, 48, 60 et 83.)
- [González et al., 2010] González, D., Ammar, A., Chinesta, F., and Cueto, E. (2010). Recent advances on the use of separated representations. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 81 :637–659. (Cité en pages 42 et 47.)
- [Gosselet and Rey, 2002] Gosselet, P. and Rey, C. (2002). On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for non-linear elasticity. In *Proceedings of the 14<sup>th</sup> conference on domain decomposition methods*, pages 419–426. (Cité en pages 20 et 43.)

- [Gosselet and Rey, 2006] Gosselet, P. and Rey, C. (2006). Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 13 :515–572. (Cité en pages 51 et 73.)
- [Gosselet et al., 2013] Gosselet, P., Rey, C., and Pebrel, J. (2013). Total and selective reuse of Krylov subspaces for the resolution of sequences of nonlinear structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 94(1) :60–83. (Cité en pages 20 et 43.)
- [Gosselet et al., 2015] Gosselet, P., Rixen, D., Roux, F.-X., and Spillane, N. (2015). Simultaneous-FETI and block-FETI : robust domain decomposition with multiple search directions. hal-01056928v2. (Cité en page 74.)
- [Gras et al., 2013] Gras, R., Leclerc, H., Roux, S., Otin, S., Schneider, J., and Périé, J.-N. (2013). Identification of the out-of-plane shear modulus of a 3d woven composite. *Experimental Mechanics*, 53(5) :719–730. (Cité en pages 85 et 87.)
- [Gravouil and Combescure, 2001] Gravouil, A. and Combescure, A. (2001). Multi-time-step explicit implicit method for non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50 :199–225. (Cité en pages 52 et 55.)
- [Grediac, 1989] Grediac, M. (1989). Principe des travaux virtuels et identification/principle of virtual work and identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 302 :1–5. (Cité en page 85.)
- [Grédiac and Hild, 2012] Grédiac, M. and Hild, F., editors (2012). *Full-Field Measurements and Identification in Solid Mechanics*. Wiley. ISBN 9781848212947. (Cité en pages 46 et 85.)
- [Grédiac et al., 2006] Grédiac, M., Pierron, F., Avril, S., and Toussaint, E. (2006). The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements : a review. *Strain*, 42(4) :233–253. (Cité en page 85.)
- [Guguin et al., 2014] Guguin, G., Allix, O., Gosselet, P., and Guinard, S. (2014). Nonintrusive coupling of 3D and 2D laminated composite models based on finite element 3D recovery. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(5) :324–343. (Cité en page 62.)
- [Guidault et al., 2008] Guidault, P.-A., Allix, O., Champaney, L., and Cornuault, C. (2008). A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5) :381–399. (Cité en pages 56 et 64.)
- [Guidault and Belytschko, 2007] Guidault, P.-A. and Belytschko, T. (2007). On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 70(3) :322–350. (Cité en page 52.)
- [Guidault and Belytschko, 2009] Guidault, P.-A. and Belytschko, T. (2009). Bridging domain methods for coupled atomistic–continuum models with l2 or h1 couplings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(11) :1566–1592. (Cité en page 52.)
- [Guinard et al., 2002] Guinard, S., Allix, O., Guedra-Degeorges, D., and Vinet, A. (2002). A 3d damage analysis of low-velocity impacts on laminated composites. *Composites Science & Technology*, 62(02) :585–589. (Cité en page 21.)
- [Gupta et al., 2012] Gupta, P., Pereira, J., Kim, D.-J., Duarte, C., and Eason, T. (2012). Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A non-intrusive approach using a generalized finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 90 :41–64. (Cité en page 62.)
- [Guyan, 1965] Guyan, R. (1965). Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2) :380. (Cité en page 20.)
- [Hamam et al., 2007] Hamam, R., Hild, F., and Roux, S. (2007). Stress intensity factor gauging by digital image correlation : Application in cyclic fatigue. *Strain*, 43(3) :181–192. (Cité en pages 2, 25, 26, 81 et 83.)

- [Han et al., 2012] Han, Y., Kim, D., , and Kwon, H.-J. (2012). Application of digital image cross-correlation and smoothing function to the diagnosis of breast cancer. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 14(0) :7–18. (Cité en page 8.)
- [Hartley and Zisserman, 2003] Hartley, R. and Zisserman, A. (2003). *Multiple view geometry in computer vision*. Cambridge University Press, UK. (Cité en pages 91 et 92.)
- [Harvent et al., 2013] Harvent, J., Coudrin, B., Brèthes, L., Orteu, J.-J., and Devy, M. (2013). Multi-view dense 3d modelling of untextured objects from a moving projector-cameras system. *Machine Vision and Applications*, 24(8) :1645–1659. (Cité en page 8.)
- [Häusler et al., 2011] Häusler, S. M., Lindhorst, K., and Horst, P. (2011). Combination of the material force concept and the extended finite element method for mixed mode crack growth simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(12) :1522–1542. (Cité en page 64.)
- [He et al., 2007] He, J., Lozinski, A., and Rappaz, J. (2007). Accelerating the method of finite element patches using approximately harmonic functions. *Comptes rendus Mathématique*, 345(2) :107–112. (Cité en page 52.)
- [Helfrick et al., 2011] Helfrick, M. N., Niezrecki, C., Avitabile, P., and Schmidt, T. (2011). 3D digital image correlation methods for full-field vibration measurement. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :917–927. (Cité en page 8.)
- [Hild et al., 2009] Hild, F., Maire, E., Roux, S., and Witz, J.-F. (2009). Three-dimensional analysis of a compression test on stone wool. *Acta Materialia*, 57(11) :3310–3320. (Cité en pages 8 et 14.)
- [Hild et al., 2002] Hild, F., Raka, B., Baudequin, M., Roux, S., and Cantelaube, F. (2002). Multi-scale displacement field measurements of compressed mineral wool samples by digital image correlation. *Applied Optics*, 32 :6815–6828. (Cité en page 60.)
- [Hild and Roux, 2006] Hild, F. and Roux, S. (2006). Digital image correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties - a review. *Strain*, 42 :69–80. (Cité en pages 2 et 14.)
- [Hild et al., 2011] Hild, F., Roux, S., Guerrero, N., Marante, M., and Flórez-López, J. (2011). Calibration of constitutive models of steel beams subject to local buckling by using digital image correlation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 30(1) :1 – 10. (Cité en page 14.)
- [Hoang et al., 2014] Hoang, K. C., Kerfriden, P., and Bordas, S. (2014). An efficient goal-oriented sampling strategy using reduced basis method for parametrized elastodynamic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. (Cité en page 41.)
- [Hoang et al., 2015] Hoang, K. C., Kerfriden, P., and Bordas, S. (2015). A fast, certified and " tuning-free" two-field reduced basis method for the metamodelling of parametrised elasticity problems. (Cité en page 41.)
- [Horn and Schunck, 1981] Horn, B. and Schunck, G. (1981). Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203. (Cité en page 9.)
- [Hotelling, 1933] Hotelling, H. (1933). Analysis of complex of statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24 :417–441. (Cité en pages 20 et 36.)
- [Hough, 1959] Hough, P. (1959). Machine analysis of bubble chamber pictures. In *Int. Conf. High Energy Accelerators and Instrumentation*. (Cité en page 22.)
- [Hughes, 1995] Hughes, T. J. R. (1995). Multiscale phenomena : Green's function, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origin of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127 :387–401. (Cité en page 52.)
- [Hughes et al., 2005] Hughes, T. J. R., Cottrell, J., and Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :4135–4195. (Cité en page 7.)

- [Hughes et al., 1998] Hughes, T. J. R., Feijoo, G. R., Mazzei, L., and Quincy, J.-B. (1998). The variational multiscale—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166 :3–24. (Cité en page 52.)
- [Hurty, 1965] Hurty, W. C. (1965). Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4) :678–685. (Cité en page 35.)
- [Hutař et al., 2004] Hutař, P., Seitzl, S., and Knésl, Z. (2004). Quantification of the effect of specimen geometry on the fatigue crack growth response by two-parameter fracture mechanics. *Materials Science and Engineering : A*, 387–389(0) :491 – 494. (Cité en page 24.)
- [Hutchinson, 1968] Hutchinson, J. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1) :13–31. (Cité en page 34.)
- [Ibrahimbegović and Markovič, 2003] Ibrahimbegović, A. and Markovič, D. (2003). Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3089–3108. (Cité en page 52.)
- [Ibrahimbegović and Melnyk, 2007] Ibrahimbegović, A. and Melnyk, S. (2007). Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh : an alternative to the extended finite element method. *Computational mechanics*, 40 :149–155. (Cité en page 52.)
- [Ikehata, 1990] Ikehata, M. (1990). Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J Appl Math*, 50 :1635–1644. (Cité en page 85.)
- [Ingraffea and Grigoriu, 1990] Ingraffea, A. and Grigoriu, M. (1990). Probabilistic fracture mechanics : A validation of predictive capability. Technical Report 90-8, Department of Structural Engineering, Cornell University. (Cité en pages 26 et 64.)
- [Irons and Tuck, 1969] Irons, B. and Tuck, R. (1969). A version of the aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(3) :275–277. (Cité en page 66.)
- [Johnson et al., 2001] Johnson, A., Pickett, A., and Rozycki, P. (2001). Computational methods for predicting impact damage in composite structures. *Composites Science and Technology*, 61(15) :2183–2192. (Cité en page 21.)
- [Karhunen, 1943] Karhunen, K. (1943). Uber lineare methoden für wahrscheinigkeitsrechnung. *Annales of Academic Science Fennicae Series A1 Mathematical Physics*, 37 :3–79. (Cité en pages 20 et 36.)
- [Karihaloo and Xiao, 2001] Karihaloo, B. and Xiao, Q. (2001). Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with  $p$ -adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 68 :1609–1630. (Cité en page 28.)
- [Karihaloo and Xiao, 2008] Karihaloo, B. and Xiao, Q. (2008). Asymptotic fields at the tip of a cohesive crack. *International Journal of Fracture*, 150(1-2) :55–74. (Cité en page 34.)
- [Kavanagh and Clough, 1971] Kavanagh, K. T. and Clough, R. W. (1971). Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7 :11–23. (Cité en page 85.)
- [Kerfriden et al., 2011] Kerfriden, P., Gosselet, P., Adhikaric, S., and Bordas, S. (2011). Bridging proper orthogonal decomposition methods and augmented newton–krylov algorithms : An adaptive model order reduction for highly nonlinear mechanical problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 200(5–8) :850–866. (Cité en pages 37 et 39.)
- [Kerfriden et al., 2012] Kerfriden, P., Passieux, J., and Bordas, S. (2012). Local/global model order reduction strategy for the simulation of quasi-brittle fracture. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89(2) :154–179. (Cité en pages 37, 39 et 40.)

- [Kerschen et al., 2009] Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J. C., and Vakakis, A. (2009). Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(1) :170–194. (Cité en page 35.)
- [Kim et al., 2010] Kim, D.-J., Pereira, J., and Duarte, C. (2010). Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems : A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81 :335–365. (Cité en pages 27 et 56.)
- [Kleinendorst et al., 2015] Kleinendorst, S., Hoefnagels, J., Verhoosel, V., and Ruybalid, A. (2015). On the use of adaptive refinement in isogeometric digital image correlation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page Online First. (Cité en pages 82 et 104.)
- [Krysl et al., 2001] Krysl, P., Lall, S., and Marsden, J. (2001). Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 :479–504. (Cité en pages 20 et 35.)
- [Kunisch and Volkwein, 2002] Kunisch, K. and Volkwein, S. (2002). Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2) :492–515. (Cité en pages 20 et 36.)
- [Küntz et al., 2006] Küntz, M., Jolin, M., Bastien, J., Perez, F., and Hild, F. (2006). Digital image correlation analysis of crack behavior in a reinforced concrete beam during a load test. *Canad. J. Civil Eng.* 33 :1418–1425. (Cité en page 8.)
- [Küttler and Wall, 2008] Küttler, U. and Wall, W. (2008). Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational Mechanics*, 43(1) :61–72. (Cité en page 66.)
- [Laborde and Lozinski, 2015] Laborde, P. and Lozinski, A. (2015). Numerical zoom for multiscale and multi-model problems. en cours. (Cité en pages 52, 62, 65, 66 et 68.)
- [Laborde et al., 2005] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y., and Salaün, M. (2005). High order extended finite element method for cracked domains. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 64 :354–381. (Cité en page 27.)
- [Lachambre et al., 2015] Lachambre, J., Réthoré, J., Weck, A., and Buffiere, J.-Y. (2015). Extraction of stress intensity factors for 3d small fatigue cracks using digital volume correlation and x-ray tomography. *International Journal of Fatigue*, 71(0) :3–10. (Cité en page 34.)
- [Ladevèze, 1985a] Ladevèze, J. (1985a). Algorithmes adaptés aux calculs vectoriels et parallèles pour des méthodes de décomposition de domaines. In *Actes du troisième colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, pages 893–907. Pluralis. (Cité en pages 53 et 54.)
- [Ladevèze, 1985b] Ladevèze, P. (1985b). New algorithms : mechanical framework and development (in french). Technical Report 57, LMT-Cachan. (Cité en pages 20 et 42.)
- [Ladevèze, 1985c] Ladevèze, P. (1985c). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Compte rendu de l’académie des Sciences*, 300(2) :41–44. (Cité en page 42.)
- [Ladevèze, 1999] Ladevèze, P. (1999). *Nonlinear computational structural mechanics—New approaches and non-incremental methods of calculation*. Springer Verlag. (Cité en pages 20, 42 et 73.)
- [Ladevèze and Dureisseix, 2000] Ladevèze, P. and Dureisseix, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for computational Civil and Structural Engineering*, 1 :18–28. (Cité en pages 51 et 73.)
- [Ladevèze et al., 2001] Ladevèze, P., Loiseau, O., and Dureisseix, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :121–138. (Cité en pages 51 et 73.)
- [Ladevèze et al., 2009] Ladevèze, P., Néron, D., and Passieux, J.-C. (2009). On multiscale computational mechanics with time-space homogenization. In *Multiscale methods—Bridging the scales in Science and Engineering*, chapter Space Time Scale Bridging methods. Oxford University Press. Ed. J. Fish. (Cité en pages 42 et 43.)

- [Ladevèze et al., 2002] Ladevèze, P., Nouy, A., and Loiseau, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :4869–4891. (Cité en page 74.)
- [Ladevèze et al., 2010] Ladevèze, P., Passieux, J.-C., and Néron, D. (2010). The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 199(21) :1287–1296. (Cité en pages 20, 42, 43 et 44.)
- [Lava et al., 2013] Lava, P., Van Paepegem, W., Coppieters, S., De Baere, I., Wang, Y., and Debruyne, D. (2013). Impact of lens distortions on strain measurements obtained with 2d digital image correlation. *Optics and Lasers in Engineering*, 51(5) :576–584. (Cité en page 15.)
- [Leclerc et al., 2009] Leclerc, H., Périé, J.-N., Roux, S., and Hild, F. (2009). Integrated digital image correlation for the identification of mechanical properties. *Lectures Notes in Computer Sciences*, 5496 :161–171. (Cité en pages 14, 15, 42, 83, 84 et 87.)
- [Leclerc et al., 2011] Leclerc, H., Périé, J.-N., Roux, S., and Hild, F. (2011). Voxel-scale digital volume correlation. *Experimental Mechanics*, 51(4) :479–490. (Cité en pages 15, 48, 81, 82 et 84.)
- [Leclerc et al., 2014] Leclerc, H., Roux, S., and Hild, F. (2014). Projection savings in ct-based digital volume correlation. *Experimental Mechanics*, page In press. (Cité en page 9.)
- [Lecompte et al., 2007] Lecompte, D., Smits, A., Sol, H., Vantomme, J., and Hemelrijck, D. V. (2007). Mixed numerical–experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5) :1643 – 1656. (Cité en pages 1, 85, 86 et 87.)
- [Legrain et al., 2011] Legrain, G., Cartraud, P., Perreard, I., and Moës, N. (2011). An x-fem and level set computational approach for image-based modelling : Application to homogenization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86(7) :915–934. (Cité en page 105.)
- [Legrain et al., 2008] Legrain, G., Moës, N., and Verron, E. (2008). Robust and direct evaluation of  $J_2$  in linear elastic fracture mechanics with the X-FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76 :1471–1488. (Cité en page 28.)
- [Lekhnitskii et al., 1968] Lekhnitskii, S., Tsai, S. W., and Cheron, T. (1968). *Anisotropic Plates*. Gordon and Breach, New York, USA. (Cité en pages 70 et 89.)
- [Leprince et al., 2007] Leprince, S., Barbot, S., Ayoub, F., and Avouac, J. P. (2007). Automatic and precise ortho-rectification, coregistration, and subpixel correlation of satellite images, application to ground deformation measurements. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 45(6) :1529 – 1558. (Cité en page 8.)
- [Liang et al., 2002] Liang, Y., Lee, H., Lim, S., Lin, W., Lee, K., and Wu, C. (2002). Proper orthogonal decomposition and its applications—part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3) :527–544. (Cité en pages 20 et 36.)
- [Lions, 1987] Lions, P.-L. (1987). On the Schwarz method. In *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Paris, France. R. Glowinski, G.H. Golub, G.A. Meurant, J. Périaux (Eds.). (Cité en pages 51 et 73.)
- [Lions, 1990] Lions, P.-L. (1990). On the schwarz alternating method III : A variant for nonoverlapping subdomains. In *Proc. of the third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, pages 202–223. SIAM. (Cité en pages 51, 53 et 54.)
- [Liu et al., 2004] Liu, X., Xiao, Q., and Karihaloo, B. (2004). Xfem for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59 :1103–1118. (Cité en pages 28 et 34.)

- [Liu et al., 2014] Liu, Y. J., Sun, Q., and Fan, X. L. (2014). A non-intrusive global/local algorithm with non-matching interface : Derivation and numerical validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 277 :81–103. (Cité en pages 62, 63, 66 et 68.)
- [Loeve, 1955] Loeve, M. (1955). *Probability Theory*. Van Nostrand, Princeton, NY. (Cité en page 36.)
- [Lowe, 2004] Lowe, D. G. (2004). Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International Journal of Computer Vision*, 60(2) :91–110. (Cité en page 71.)
- [Lozinski and Pironneau, 2011] Lozinski, A. and Pironneau, O. (2011). Numerical zoom for localized multiscales. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27 :197–207. (Cité en page 52.)
- [Lubrecht and Venner, 2000] Lubrecht, A. and Venner, C. (2000). *Multilevel methods in lubrication*. Elsevier, Amsterdam. (Cité en page 54.)
- [Lucas and Kanade, 1981] Lucas, B. and Kanade, T. (1981). An iterative image registration technique with an application to stereo vision. In *Proceedings of Imaging Understanding Workshop*, pages 121–130. (Cité en pages 7, 8, 13, 14 et 22.)
- [Luo et al., 1993] Luo, P. F., Chao, Y. J., Sutton, M. A., and Peters, W. H. (1993). Accurate measurement of three-dimensional deformations in deformable and rigid bodies using computer vision. *Experimental Mechanics*, 33(2) :123–132. (Cité en pages 8 et 14.)
- [Maday and Stamm, 2013] Maday, Y. and Stamm, B. (2013). Locally adaptive greedy approximations for anisotropic parameter reduced basis spaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(6) :A2417–A2441. (Cité en page 42.)
- [Maire et al., 2003] Maire, E., Fazekas, A., Salvo, L., Dendievel, R., Youssef, S., Cloetens, P., and Letang, J. M. (2003). X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials. related finite element modeling problems. *Composites Science and Technology*, 63(16) :2431 – 2443. (Cité en page 105.)
- [Mandel, 1993] Mandel, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9 :233–241. (Cité en pages 40, 51 et 73.)
- [Mandel and Dohrmann, 2003] Mandel, J. and Dohrmann, C. R. (2003). Convergence of a balancing domain decomposition by constraints and energy minimization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 10(7) :639–659. (Cité en page 74.)
- [Markovič and Ibrahimbegović, 2004] Markovič, D. and Ibrahimbegović, A. (2004). On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(48-51) :5503–5523. (Cité en page 52.)
- [Mathieu et al., 2015] Mathieu, F., Leclerc, H., Hild, H., and Roux, S. (2015). Estimation of elastoplastic parameters via weighted FEMU and intergrated DIC. *Experimental Mechanics*, 55(1) :105–119. (Cité en pages 84 et 85.)
- [McNeill et al., 1987] McNeill, S., Peters, W., and Sutton, M. (1987). Estimation of stress intensity factor by digital image correlation. *Engineering Fracture Mechanics*, 28(1) :101 – 112. (Cité en page 25.)
- [Melenk and Babuška, 1996] Melenk, J. and Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method : basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314. (Cité en pages 26, 28 et 52.)
- [Mishnaevsky, 2005] Mishnaevsky, L. L. (2005). Automatic voxel-based generation of 3d microstructural FE models and its application to the damage analysis of composites. *Materials Science and Engineering : A*, 407(1–2) :11–23. (Cité en page 105.)
- [Moës et al., 1999] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1) :131–150. (Cité en pages 2, 26, 27 et 52.)

- [Molimard et al., 2005] Molimard, J., Riche, R., Vautrin, A., and Lee, J. (2005). Identification of the four orthotropic plate stiffnesses using a single open-hole tensile test. *Experimental Mechanics*, 45(5) :404–411. (Cité en pages 1, 70, 85, 86 et 87.)
- [Morgeneyer et al., 2013] Morgeneyer, T., Helfen, L., Mubarak, H., and Hild, F. (2013). 3D digital volume correlation of synchrotron radiation laminography images of ductile crack initiation : An initial feasibility study. *Experimental Mechanics*, 53(4) :543–556. (Cité en pages 8 et 16.)
- [Mortazavi et al., 2013] Mortazavi, F., Levesque, M., and Villemure, I. (2013). Image-based continuous displacement measurements using an improved spectral approach. *Strain*, 49(3) :233–248. (Cité en page 14.)
- [Murphy, 1950] Murphy, G. (1950). *Similitude in engineering*. The Ronald Press Company, New York, NY. (Cité en page 19.)
- [Myers and Montgomery, 2002] Myers, R. and Montgomery, D. (2002). *Response surface methodology : process and product in optimization using designed experiments*. Wiley, New York, NY. (Cité en page 19.)
- [Navarro et al., 2012] Navarro, P., Aubry, J., Marguet, S., Ferrero, J.-F., Lemaire, S., and Rauch, P. (2012). Semi-continuous approach for the modelling of thin woven composite panels applied to oblique impacts on helicopter blades. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(6) :871–879. (Cité en page 21.)
- [Neu and Walton, 2008] Neu, C. and Walton, J. (2008). Displacement encoding for the measurement of cartilage deformation. *Magn. Reson. Med.*, 59 :149–155. (Cité en page 8.)
- [Niroomandi et al., 2013] Niroomandi, S., González, D., Alfaro, I., Bordeu, F., Leygue, A., Cueto, E., and Chinesta, F. (2013). Real-time simulation of biological soft tissues : a pgd approach. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 29(5) :586–600. (Cité en page 43.)
- [Noor, 1980] Noor, A.-K. et Peters, J.-M. (1980). Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4) :455–462. (Cité en page 35.)
- [Nouy, 2007] Nouy, A. (2007). A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(45-48) :4521–4537. (Cité en pages 20 et 42.)
- [Nouy, 2008] Nouy, A. (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 197(51-52) :4718–4736. (Cité en page 42.)
- [Nouy, 2010] Nouy, A. (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 199(23-24) :1603–1626. (Cité en pages 20 et 42.)
- [Nouy and Ladevèze, 2004] Nouy, A. and Ladevèze, P. (2004). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :3061–3087. (Cité en pages 42 et 74.)
- [Nouy and Le Maître, 2008] Nouy, A. and Le Maître, O. (2008). Generalized spectral decomposition method for stochastic non linear problems. *Journal of Computational Physics*. (Cité en page 42.)
- [Oden et al., 2006] Oden, J. T., Prudhomme, S., Romkes, A., and Bauman, P. T. (2006). Multi-scale modeling of physical phenomena : Adaptive control of models. *SIAM Journal for Scientific Computing*, 28 :2359–2389. (Cité en page 52.)
- [Oden et al., 1999] Oden, J. T., Vemaganti, K., and Moës, N. (1999). Hierarchical modeling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172 :3–25. (Cité en page 52.)
- [Orteu et al., 2011] Orteu, J.-J., Bugarin, F., Harvent, J., Robert, L., and Velay, V. (2011). Multiple-camera instrumentation of a single point incremental forming process pilot for shape and 3D displacement measurements : Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 51(4) :625–639. (Cité en page 8.)

- [Orteu et al., 2006] Orteu, J.-J., Garcia, D., Robert, L., and Bugarin, F. (2006). A speckle-texture image generator. In *Speckle'06 International Conference*, volume 6341, page <http://dx.doi.org/10.1117/12.695280>. (Cité en page 70.)
- [Ortiz et al., 1987] Ortiz, M., Leroy, Y., and Needleman, A. (1987). A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 61(2) :189 – 214. (Cité en page 52.)
- [Paris et al., 1961] Paris, P., Gomes, M., and Anderson, W. (1961). A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13 :9–14. (Cité en page 24.)
- [Park and Sandberg, 1991] Park, J. and Sandberg, I. (1991). Universal approximation using radial-basis-function networks. *Neural Comput.*, 3(2) :246–257. (Cité en page 19.)
- [Parsons and Hall, 1990] Parsons, I. and Hall, J. (1990). The multigrid method in solid mechanics : part I—algorithm description and behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29 :719–737. (Cité en pages 51 et 53.)
- [Passieux, 2008] Passieux, J. (2008). *Approximation radiale et méthode LATIN multiéchelle en temps et espace*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan. (Cité en page 42.)
- [Passieux et al., 2015a] Passieux, J.-C., Bugarin, F., David, C., Périé, J.-N., and Robert, L. (2015a). Multiscale displacement field measurement using digital image correlation : Application to the identification of elastic properties. *Experimental Mechanics*, 55(1) :121–137. (Cité en pages 14, 59, 70, 71, 87, 89 et 90.)
- [Passieux et al., 2013a] Passieux, J.-C., Gomes Perini, L., De Luycker, E., and Périé, J.-N. (2013a). Pgd et mesure de champs par corrélation d'images. In *11e Colloque National en Calcul des Structures, CSMA (Giens, Fr)*. (Cité en pages 15 et 47.)
- [Passieux et al., 2011] Passieux, J.-C., Gravouil, A., Réthoré, J., and Baietto, M.-C. (2011). Direct estimation of generalized stress intensity factors using a three-scale concurrent multigrid x-fem. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 85(13) :1648–1666. (Cité en pages 15, 21, 24, 28, 29, 30, 31, 52, 54, 56, 57, 62 et 64.)
- [Passieux et al., 2010] Passieux, J.-C., Ladevèze, P., and Néron, D. (2010). A scalable time-space multiscale domain decomposition method : adaptive time scale separation. *Comput. Mech.*, 46(4) :621–633. (Cité en pages 42 et 74.)
- [Passieux et al., 2014] Passieux, J.-C., Navarro, P., Périé, J.-N., Marguet, S., and Ferrero, J.-F. (2014). A digital image correlation method for tracking planar motions of rigid spheres : application to medium velocity impacts. *Experimental Mechanics*, 54(8) :1453–1466. (Cité en pages 14, 17, 21 et 22.)
- [Passieux and Périé, 2012] Passieux, J.-C. and Périé, J.-N. (2012). High resolution digital image correlation using Proper Generalized Decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(6) :531–550. (Cité en pages 15, 42, 43, 44, 45 et 82.)
- [Passieux et al., 2015b] Passieux, J.-C., Périé, J.-N., and Salaün, M. (2015b). A dual domain decomposition method for finite element digital image correlation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(10) :1670–1682. (Cité en pages 48, 75 et 78.)
- [Passieux et al., 2013b] Passieux, J.-C., Réthoré, J., Gravouil, A., and Baietto, M.-C. (2013b). Local/global non-intrusive crack propagation simulation using a multigrid X-FEM solver. *Computational Mechanics*, 56(2) :1381–1393. (Cité en pages 24, 31, 52, 56, 57, 62, 64 et 65.)
- [Paul-Dubois-Taine and Amsallem, 2015] Paul-Dubois-Taine, A. and Amsallem, D. (2015). An adaptive and efficient greedy procedure for the optimal training of parametric reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, page in press. (Cité en page 37.)
- [Pebrel et al., 2008a] Pebrel, J., Gosselet, P., and Rey, C. (2008a). Multiscale analysis of structures using overlapping nonlinear patches. In *3rd International Conference on Computational Methods for Coupled Problems*. (Cité en page 52.)

- [Pebrel et al., 2008b] Pebrel, J., Rey, C., and Gosselet, P. (2008b). A nonlinear dual domain decomposition method : application to structural problems with damage. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 6(3) :251–262. (Cité en page 74.)
- [Pereira and Duarte, 2005] Pereira, J. and Duarte, C. (2005). Extraction of stress intensity factors from generalized finite element solutions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29 :397–413. (Cité en page 28.)
- [Pereira et al., 2012] Pereira, J., Kim, D., and Duarte, C. (2012). A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures. *Computational Mechanics*, 49(1) :99–121. (Cité en page 56.)
- [Périé et al., 2002] Périé, J.-N., Calloch, S., Cluzel, C., and Hild, F. (2002). Analysis of a multiaxial test on a c/c composite by using digital image correlation and a damage model. *Experimental Mechanics*, 42 :318–328. (Cité en pages 44 et 82.)
- [Perlin, 1985] Perlin, K. (1985). An image synthesizer. In *SIGGRAPH'85 international conference, San Francisco, California, USA*, pages 1643 – 1656. (Cité en page 70.)
- [Pierré et al., 2016] Pierré, J.-E., Passieux, J.-C., Périé, J.-N., Bugarin, F., and Robert, L. (2016). Unstructured finite element-based digital image correlation with enhanced management of quadrature and lens distortions. *Optics and Lasers in Engineering*, 77 :44–53. (Cité en pages 92 et 97.)
- [Poncelet and Leclerc, 2015] Poncelet, M. and Leclerc, H. (2015). A digital image correlation algorithm with light reflection compensation. *Experimental Mechanics*, In Press. (Cité en page 17.)
- [Pottier et al., 2012] Pottier, T., Vacher, P., Toussaint, F., Louche, H., and Coudert, T. (2012). Out-of-plane testing procedure for inverse identification purpose : application in sheet metal plasticity. *Experimental Mechanics*, 52(7) :951–963. (Cité en page 104.)
- [Prabhu and Lambros, 2002] Prabhu, S. and Lambros, J. (2002). Mixed mode asymptotic crack tip fields in orthotropic materials : Derivation and range of dominance. *International Journal of Fracture*, 118(4) :339–361. (Cité en page 34.)
- [Prudhomme et al., 2012] Prudhomme, S., Bouclier, R., Chamoïn, L., Ben Dhia, H., and Oden, J. (2012). Analysis of an averaging operator for atomic-to-continuum coupling methods by the arlequin approach. In Engquist, B., Runborg, O., and Tsai, Y.-H. R., editors, *Numerical Analysis of Multiscale Computations*, volume 82 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 369–400. Springer Berlin Heidelberg. (Cité en page 52.)
- [Pruliere et al., 2010] Pruliere, E., Chinesta, F., and Ammar, A. (2010). On the deterministic solution of multidimensional parametric models using the proper generalized decomposition. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(4) :791 – 810. (Cité en page 42.)
- [Rannou et al., 2008] Rannou, J., Gravouil, A., and Baietto-Dubourg, M.-C. (2008). A local multigrid X-FEM strategy for 3-D crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77 :581–600. (Cité en pages 52, 55, 56 et 57.)
- [Rannou et al., 2007] Rannou, J., Gravouil, A., and Combescure, A. (2007). A multi-grid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *European Journal on Computational Mechanics*, 16 :161–182. (Cité en pages 55 et 56.)
- [Rannou et al., 2010] Rannou, J., Limodin, N., Réthoré, J., Gravouil, A., Ludwig, W., Baietto-Dubourg, M.-C., Buffière, J.-Y., Combescure, A., Hild, F., and Roux, S. (2010). Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1307–1325. (Cité en pages 8, 13, 14, 16, 34 et 81.)
- [Rayleigh and Lindsay, 1877] Rayleigh, J. and Lindsay, R. (1877). *The Theory of Sound*. Dover Publications. (Cité en page 35.)

- [Requena et al., 2009] Requena, G., Fiedler, G., Seiser, B., Degischer, P., Michiel, M. D., and Buslaps, T. (2009). 3D-quantification of the distribution of continuous fibres in unidirectionally reinforced composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(2) :152–163. (Cité en page 16.)
- [Réthoré, 2010] Réthoré, J. (2010). A fully integrated noise robust strategy for the identification of constitutive laws from digital images. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 84(6) :631–660. (Cité en pages 15, 17, 48, 83, 84 et 85.)
- [Réthoré et al., 2010a] Réthoré, J., Elguedj, T., Simon, P., and Coret, M. (2010a). On the use of nurbs functions for displacement derivatives measurement by digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 50 :1099–1116. (Cité en pages 14 et 15.)
- [Réthoré et al., 2007a] Réthoré, J., Hild, F., and Roux, S. (2007a). Shear-band capturing using a multiscale extended digital image correlation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52) :5016–5030. (Cité en pages 14, 30 et 60.)
- [Réthoré et al., 2008a] Réthoré, J., Hild, F., and Roux, S. (2008a). Extended digital image correlation with crack shape optimization. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 73(2) :248–272. (Cité en pages 14, 25, 26 et 30.)
- [Réthoré et al., 2008b] Réthoré, J., Hild, F., and Roux, S. (2008b). Noise-robust stress intensity factor determination from kinematic field measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(13) :3763–3781. (Cité en pages 25 et 30.)
- [Réthoré et al., 2011] Réthoré, J., Hild, F., and Roux, S. (2011). Optimal and noise-robust extraction of fracture mechanics parameters from kinematic measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(9) :1827–1845. (Cité en page 30.)
- [Réthoré et al., 2014] Réthoré, J., Morestin, F., Lafarge, L., and Valverde, P. (2014). 3D displacement measurements using a single camera. *Optics and Lasers in Engineering*, 57(0) :20 – 27. (Cité en page 14.)
- [Réthoré et al., 2013] Réthoré, J., Muhibullah, Elguedj, T., Coret, M., Chaudet, P., and Combescure, A. (2013). Robust identification of elasto-plastic constitutive law parameters from digital image using 3D kinematics. *Int. J. Solids and Structures*, 50 :73–85. (Cité en pages 14, 31, 48, 82, 83, 84, 85 et 97.)
- [Réthoré et al., 2007b] Réthoré, J., Roux, S., and Hild, F. (2007b). From pictures to extended finite elements : extended digital image correlation (X-DIC). *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3) :131 – 137. (Cité en pages 14 et 30.)
- [Réthoré et al., 2009] Réthoré, J., Roux, S., and Hild, F. (2009). An extended and integrated digital image correlation technique applied to the analysis of fractured samples. *Eur J. Comput Mech*, 18 :285–306. (Cité en pages 30, 82, 83 et 84.)
- [Réthoré et al., 2010b] Réthoré, J., Roux, S., and Hild, F. (2010b). Hybrid analytical and extended finite element method (HAX-FEM) : A new enrichment procedure for cracked solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(3) :269–285. (Cité en pages 15, 21, 24, 28, 30, 31, 52 et 56.)
- [Réthoré et al., 2010c] Réthoré, J., Roux, S., and Hild, F. (2010c). Mixed-mode crack propagation using a hybrid analytical and extended finite element method. *Comptes Rendus de Mécanique*, 338 :201–126. (Cité en pages 31 et 52.)
- [Reu, 2013] Reu, P. (2013). A study of the influence of calibration uncertainty on the global uncertainty for digital image correlation using a monte carlo approach. *Experimental mechanics*, 53(9) :1661–1680. (Cité en page 23.)
- [Reu and Miller, 2008] Reu, P. and Miller, T. (2008). The application of high-speed digital image correlation. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 43(8) :673–688. (Cité en pages 8 et 23.)
- [Rey and Léné, 1998] Rey, C. and Léné, F. (1998). Reuse of Krylov spaces in the solution of large scale non-linear elasticity problems. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering*, pages 465–471. Springer. (Cité en pages 20 et 43.)

- [Rezzonico et al., 2007] Rezzonico, V., Lozinski, A., Picasso, M., Rappaz, J., and Wagner, J. (2007). Multiscale algorithm with patches of finite elements. *Math. Comput. Simulation*, 76 :181–187. (Cité en page 52.)
- [Robert et al., 2012] Robert, L., Velay, V., Decultot, N., and Ramde, S. (2012). Identification of hardening parameters using finite element models and full-field measurements : some case studies. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 47(1) :3–17. (Cité en page 86.)
- [Romeiro et al., 2004] Romeiro, F., de Freitas, M., and Pommier, S. (2004). Effect of overloads and underloads on fatigue crack growth and interaction effects. *Jal of ASTM Intl*, 1(9). (Cité en page 25.)
- [Roux, 2009] Roux, F.-X. (2009). A FETI-2lm method for non-matching grids. In *Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII*, number 70 in Lecture Notes in Computational Science and Engineering, pages 121–128. Springer Berlin Heidelberg. (Cité en pages 51 et 73.)
- [Roux and Hild, 2006] Roux, S. and Hild, F. (2006). Stress intensity factor measurements from digital image correlation : post-processing and integrated approaches. *Int J. Fract*, 140 :141–157. (Cité en pages 14, 17, 21, 24, 25, 46 et 83.)
- [Roux et al., 2002] Roux, S., Hild, F., and Berthaud, Y. (2002). Correlation image velocimetry : a spectral approach. *Applied Optics*, 41(108–115). (Cité en page 14.)
- [Roux et al., 2008] Roux, S., Hild, F., Viot, P., and Bernard, D. (2008). Three dimensional image correlation from x-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8) :1253–1265. (Cité en page 14.)
- [Roux et al., 2009] Roux, S., Réthoré, J., and Hild, F. (2009). Digital image correlation and fracture : an advanced technique for estimating stress intensity factors of 2D and 3D cracks. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 42(214004). (Cité en pages 2, 9, 11, 13, 16, 24, 25, 26 et 81.)
- [Roux-Langlois et al., 2015] Roux-Langlois, C., Gravouil, A., Baietto, M.-C., and Réthoré, J. (2015). Three-dimensional simulation of crack with curved front with direct estimation of stress intensity factors. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(8) :635–652. (Cité en pages 34 et 57.)
- [Roux-Langlois et al., 2015] Roux-Langlois, C., Gravouil, A., Baietto, M.-C., Réthoré, J., Mathieu, F., Hild, F., and Roux, S. (2015). {DIC} identification and x-fem simulation of fatigue crack growth based on the williams' series. *International Journal of Solids and Structures*, 53(0) :38 – 47. (Cité en pages 34 et 81.)
- [Ryckelynck, 2002] Ryckelynck, D. (2002). Réduction a priori de modèles thermomécaniques. *Comptes Rendus de Mécanique*, 330 :299–505. (Cité en page 37.)
- [Ryckelynck, 2005] Ryckelynck, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202 :346–366. (Cité en pages 20, 37, 39 et 41.)
- [Réthoré, 2015] Réthoré, J. (2015). Automatic crack tip detection and stress intensity factors estimation of curved cracks from digital images. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. (Cité en page 32.)
- [Réthoré and François, 2014] Réthoré, J. and François, M. (2014). Curve and boundaries measurement using b-splines and virtual images. *Optics and Lasers in Engineering*, 52(0) :145 – 155. (Cité en page 26.)
- [Réthoré et al., 2005] Réthoré, J., Gravouil, A., Morestin, F., and Combescure, A. (2005). Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral. *International Journal of Fracture*, 132(1) :65–79. (Cité en page 30.)
- [Saad, 2000] Saad, Y. (2000). *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Compagny, 3rd edition. (Cité en page 78.)
- [Saito et al., 2010] Saito, E., Kang, H., Taboas, J. M., Diggs, A., Flanagan, C. L., and Hollister, S. J. (2010). Experimental and computational characterization of designed and fabricated 50 :50 PLGA porous scaffolds for human trabecular bone applications. *Journal of Materials Science Materials in Medicine*, 21(8) :2371–83. (Cité en page 105.)

- [Sanchez-Palencia, 1974] Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal of Engineering Science*, 12(4) :331–351. (Cité en page 51.)
- [Schmitt, 1998] Schmitt, J. (1998). Oct elastography : imaging microscopic deformation and strain of tissue. *Opt. Express*, 3(6) :199–211. (Cité en page 8.)
- [Schreier et al., 2000] Schreier, H., Braasch, J., and Sutton, M. (2000). Systematic errors in digital image correlation caused by intensity interpolation. *Optical Engineering*, 39(11) :2915–2921. (Cité en page 9.)
- [Spillane et al., 2014] Spillane, N., Dolean, V., Hauret, P., Nataf, F., Pechstein, C., and Scheichl, R. (2014). Abstract robust coarse spaces for systems of pdes via generalized eigenproblems in the overlaps. *Numerische Mathematik*, 126(4) :741–770. (Cité en page 74.)
- [Spillane and Rixen, 2013] Spillane, N. and Rixen, D. (2013). Automatic spectral coarse spaces for robust finite element tearing and interconnecting and balanced domain decomposition algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95(11) :953–990. (Cité en page 74.)
- [Steger, 1991] Steger, J. (1991). The chimera method of flow simulation. In *Workshop on applied CFD, Univ of Tennessee Space Institute*. (Cité en page 52.)
- [Stein, 1999] Stein, M. (1999). *Interpolation of spatial data : some theory for kriging*. Springer, New York, NY. (Cité en page 19.)
- [Strouboulis et al., 2001] Strouboulis, T., Coops, K., and Babuška, I. (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(32–33) :4081–4193. (Cité en pages 27 et 52.)
- [Sun et al., 2005] Sun, Y., Pang, J., Wong, C. K., and Su, F. (2005). Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied Optics*, 44(34) :7357–7363. (Cité en page 14.)
- [Sur and Grediac, 2014] Sur, F. and Grediac, M. (2014). Sensor noise modeling by stacking pseudo-periodic grid images affected by vibrations. *IEEE Signal processing Letters*, 21(4) :432–436. (Cité en pages 10 et 17.)
- [Sutton et al., 2006] Sutton, M., Li, N., Garcia, D., Cornille, N., Orteu, J.-J., McNeill, S., Schreier, H., and Li, X. (2006). Metrology in a scanning electron microscope : theoretical developments and experimental validation. *Measurement Science and Technology*, 17(10) :2613–2622. (Cité en page 15.)
- [Sutton et al., 1986] Sutton, M., Mingqi, C., Peters, W., Chao, Y., and McNeill, S. (1986). Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis. *Image and Vision Computing*, 4(3) :143–150. (Cité en page 14.)
- [Sutton et al., 2009] Sutton, M., Orteu, J.-J., and Schreier, H. (2009). *Image correlation for shape, motion and deformation measurements : Basic Concepts, Theory and Applications*. Springer, New York, NY (USA). (Cité en pages 9, 14, 15 et 17.)
- [Sutton et al., 1983] Sutton, M., Wolters, W., Peters, W., Ranson, W., and McNeill, S. (1983). Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139. (Cité en pages 7, 9 et 14.)
- [Sutton et al., 1999] Sutton, M. A., Zhao, W., McNeill, S. R., Helm, J. D., Piascik, R. S., and Riddell, W. T. (1999). Local crack closure measurements : Development of a measurement system using computer vision and a far-field microscope. In *Advances in fatigue crack closure measurement and analysis : second volume, STP 1343, R. C. McClung and J. C. Newman Jr., eds.*, pages 145–156. (Cité en pages 8 et 25.)
- [Sztefek and Olsson, 2009] Sztefek, P. and Olsson, R. (2009). Nonlinear compressive stiffness in impacted composite laminates determined by an inverse method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40(3) :260–272. (Cité en page 81.)
- [Taillandier-Thomas et al., 2014] Taillandier-Thomas, T., Roux, S., Hild, F., and Morgeneyer, T. (2014). Localized strain field measurement on laminography data with mechanical regularization. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section B*, 324 :70–79. (Cité en page 16.)

- [Talreja, 2008] Talreja, R. (2008). Damage and fatigue in composites – a personal account. *Composites Science and Technology*, 68(13) :2585–2591. (Cité en page 21.)
- [Temizer and Wriggers, 2007] Temizer, I. and Wriggers, P. (2007). An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196 :3409–3423. (Cité en page 51.)
- [Tong et al., 1973] Tong, P., Pian, T. H. H., and Lasry, S. J. (1973). A hybrid-element approach to crack problems in plane elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7(3) :297–308. (Cité en page 28.)
- [Triggs et al., 2000] Triggs, B., McLauchlan, P., Hartley, R., and Fitzgibbon, A. (2000). Bundle adjustment—a modern synthesis. In *Vision algorithms : theory and practice*. Springer Berlin Heidelberg. (Cité en page 92.)
- [Van Beeck et al., 2014] Van Beeck, J., Neggers, J., Schreurs, P., Hoefnagels, J., and Geers, M. (2014). Quantification of three-dimensional surface deformation using global digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 54(4) :557–570. (Cité en pages 8 et 14.)
- [Vescovini and Bisagni, 2012] Vescovini, R. and Bisagni, C. (2012). Single-mode solution for post-buckling analysis of composite panels with elastic restraints loaded in compression. *Composites Part B : Engineering*, 43(3) :1258 – 1274. (Cité en page 38.)
- [Wang et al., 2011] Wang, W., Mottershead, J. E., Ihle, A., Siebert, T., and Schubach, H. R. (2011). Finite element model updating from full-field vibration measurement using digital image correlation. *Journal of Sound and Vibration*, 330(8) :1599–1620. (Cité en page 8.)
- [Wang et al., 2009] Wang, Y. Q., Sutton, M. A., Bruck, H. A., and Schreier, H. W. (2009). Quantitative error assessment in pattern matching : Effects of intensity pattern noise, interpolation, strain and image contrast on motion measurements. *Strain*, 45(2) :160–178. (Cité en pages 17, 46 et 71.)
- [Warren et al., 2011] Warren, C., Niezrecki, C., Avitabile, P., and Pingle, P. (2011). Comparison of FRF measurements and mode shapes determined using optically image based, laser, and accelerometer measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25 :2191–2202. (Cité en page 8.)
- [Whitcomb, 1991] Whitcomb, J. (1991). Iterative global/local finite element analysis. *Computers and Structures*, 40(4) :1027–1031. (Cité en pages 52, 56 et 62.)
- [Williams, 1957] Williams, M. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 24 :109–114. (Cité en page 24.)
- [Wilson, 1969] Wilson, W. (1969). *Combined mode fracture mechanics*. PhD thesis, University of Pittsburgh. (Cité en page 58.)
- [Wittevrongel et al., 2015] Wittevrongel, L., Lava, P., Lomov, S., and Debruyne, D. (2015). A self adaptive global digital image correlation algorithm. *Experimental Mechanics*, 55(2) :361–378. (Cité en pages 14, 82 et 104.)
- [Xiao and Karihaloo, 2003] Xiao, Q. and Karihaloo, B. (2003). Direct evaluation of accurate coefficients of the linear elastic crack tip asymptotic field. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 25 :719–729. (Cité en page 28.)
- [Xiao and Karihaloo, 2006] Xiao, Q. and Karihaloo, B. (2006). Asymptotic fields at frictionless and frictional cohesive crack tips in quasibrittle materials. *Journal of Mechanics of materials and structures*, 1(5). (Cité en page 34.)
- [Xiao and Karihaloo, 2007] Xiao, Q. and Karihaloo, B. (2007). An overview of a hybrid crack element and determination of its complete displacement field. *Engineering Fracture Mechanics*, 74 :1107–1117. (Cité en page 30.)
- [Xu and Zhang, 1996] Xu, G. and Zhang, Z. (1996). *Epipolar geometry in Stereo, Motion and Object Recognition*. Kluwer Academic Publishers. (Cité en page 92.)

- [Xu, 1992] Xu, J. (1992). Iterative methods by space decomposition and subspace correction. *SIAM Review*, 34(4) :581–613. (Cité en page 66.)
- [Yoneyama et al., 2006] Yoneyama, S., Kitagawa, A., Kitamura, K., and Kikuta, H. (2006). In-plane displacement measurement using digital image correlation with lens distortion correction. *JSME International Journal*, 49(3) :458–467. (Cité en page 15.)
- [Yvonnet and He, 2007] Yvonnet, J. and He, Q.-C. (2007). The reduced model multiscale method (r3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains. *Journal of Computational Physics*, 223(1) :341 – 368. (Cité en page 51.)
- [Zohdi et al., 1996] Zohdi, T., Oden, J., and Rodin, G. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1–4) :273–298. (Cité en page 52.)