



HAL
open science

NOMBRES $S+P$, $\max SP$, $\min SP$ et $|P-S|$

Rene-Louis Clerc

► **To cite this version:**

| Rene-Louis Clerc. NOMBRES $S+P$, $\max SP$, $\min SP$ et $|P-S|$. 2024. hal-04507547v2

HAL Id: hal-04507547

<https://ut3-toulouseinp.hal.science/hal-04507547v2>

Preprint submitted on 24 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NOMBRES S+P, maxSP, minSP et |P-S|

René-Louis Clerc (mars 2024) (*)

ABSTRACT

-NUMBERS S+P, maxSP, minSP and |P-S|

Given an integer n , we define $S(n)$ as the sum of all its digits and $P(n)$ as the product of all its non-zero digits. Among the different Niven numbers ([2], [3], [9], [OE3], [OE6], [OE7]) which are multiples of $S(n)$, there have been many results on the numbers SP, defined by the product $S(n)*P(n)$ ([4], [5], [6], [7], [9], [OE4], [OE5], [OE9], [OE10], [OE12]); furthermore, the various Armstrong numbers ([1], [11], [OE2]) are also defined by the sum of their digits raised to a certain power most of the time.

As another choice of function of the digits of n , it seemed legitimate to consider the numbers S+P, defined by the sum $S(n)+P(n)$, the numbers |P-S| defined by the absolute value of the difference, as well as the numbers maxSP and minSP, defined by the maximum, respectively the minimum, between $S(n)$ and $P(n)$.

We will determine such numbers in decimal base, as well as in any base, and we will expand the search (as we did for the rppdi ([10], [OE8]) by considering the power $r > 1$ of the n considered to obtain r -numbers S+P, maxSP, minSP or |P-S|; the trivial solution 0 will not be taken into account. In each of these cases, we will try to determine the set of attractors (fixed points and cycles) of the associated transformations and deduce, sometimes, the pleasantness of said transformation (in the sense of [8]).

Finally, we propose a use of S+P and |P-S| to generate classes of particular prime numbers that have only one digit C strictly greater than 1, then 3 or 5 digits 1 (number depending on C), and any positive or zero number of 0s. Thus, we can easily and quickly exhibit (1 to 2 minutes of calculation time with the software PARI/GP) such primes with up to 3000 digits.

An online simulation of the [S+P, maxSP, minSP, and |P-S|](#) is proposed.

INTRODUCTION

Etant donné un entier n , on appelle $S(n)$ la somme de tous ses chiffres et $P(n)$ le produit de tous ses chiffres non nuls. Parmi les différents nombres de Niven ([2], [3], [9], [OE3], [OE6], [OE7]) qui sont des multiples de $S(n)$, on a beaucoup de résultats sur les nombres SP, définis par le produit $S(n)*P(n)$ ([4], [5], [6], [7], [9], [OE4], [OE5], [OE9], [OE10], [OE12]); par ailleurs, les divers nombres de Armstrong ([1], [11], [OE2]) sont aussi définis par des sommes de leurs seuls chiffres le plus souvent élevés à une certaine puissance.

Comme autre choix de fonction des chiffres de n , il nous a semblé légitime d'envisager les nombres S+P, définis par la somme $S(n)+P(n)$, les nombres |P-S| définis par la valeur absolue de la différence ainsi que les nombres maxSP et minSP, définis par le maximum, respectivement le minimum, entre $S(n)$ et $P(n)$.

On déterminera de tels nombres en base décimale, ainsi qu'en base quelconque et on élargira la recherche (comme nous l'avons fait pour les rppdi ([10], [OE8]) en considérant la puissance $r > 1$ du n considéré pour obtenir des r -nombres S+P, maxSP, minSP ou |P-S|; la solution triviale 0 ne sera pas prise en compte. On cherchera dans chacun de ces cas à déterminer l'ensemble des attracteurs (points fixes et cycles) des transformations associées et à en déduire, certaines fois, le caractère agréable (au sens de [8]) de ladite transformation.

On propose enfin une utilisation des S+P et |P-S| pour générer des classes de nombres premiers particuliers qui n'ont qu'un seul chiffre C strictement supérieur à 1, puis 3 ou 5 chiffres 1 (nombre dépendant de C) et des 0 en nombre quelconque positif ou nul. On peut ainsi exhiber assez facilement et vite (1 à 2 minutes de temps de calcul avec le logiciel PARI/GP) de tels premiers possédant jusqu'à 3000 chiffres.

Une simulation en ligne des [S+P, maxSP, minSP et |P-S|](#) est proposée.

- 1 - LES NOMBRES S+P

Pour un entier n donné (non nul) à k chiffres (exprimé en base 10)

$$n = \sum_{i=1}^{i=k} a_i 10^{k-i}, a_1 > 0,$$

on considère l'application

$$(1) \quad n \rightarrow S(n) + P(n),$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{i=k} a_i, \quad P(n) = \prod_{i=1}^{i=k} a_i \text{ pour les } a_i \neq 0.$$

Pour passer à une base b quelconque, étant donné un entier n , écrit en base décimale, on appliquera (1) à son transformé n_b ; pour itérer le processus, on transformera l'image obtenue dans la base b et on appliquera (1) à nouveau: par exemple 24 devient $24_6 = 40$, qui donne 8 qui devient $8_6 = 12$ qui donne 5 ...

Par construction, en base décimale, un nombre n exprimé par un seul chiffre c ou par le produit de c par une puissance de 10 donnera $2c$ par l'application (1) (7 ou 70 donne 14):

$$\text{pour tout } n = c10^k, c \in [1, 9], k \geq 0, (S+P)(n) = 2c.$$

On montre facilement que cette application est décroissante, en base 10, pour tout $n > 9$ ($9p + 9^p \leq 9.10^{p-1} + \dots + 9$ pour tout $p > 1$); elle est donc partout et toujours convergente.

Il est immédiat de montrer que, pour toute base b , il ne peut exister de solution non nulle (écrite en base b) à un seul chiffre.

Pour des solutions à deux chiffres ($x > 0, y$), en bases $b < 11$, il faut assurer $bx + y = x + y + xy$ et donc le chiffre des unités de la solution (exprimée en base b) est $b-1$, x pouvant valoir de 1 à $b-1$, d'où l'on déduira facilement toutes les solutions à 2 chiffres pour toute base $b < 11$ (Tableaux 1 et 2); pour ces bases, en dehors des solutions correspondantes, l'application est strictement décroissante.

Pour les bases b supérieures à 10, certaines solutions à deux chiffres peuvent s'écrire $0b + y$ avec $y > 9$, ou encore par exemple $12b + 15$ pour 207 en base $b = 16$; ses 'deux chiffres' sont 12 et 15 et par conséquent $S(1215) = 12+15$ et $P(1215) = 12*15$ (on verra plus bas que 207 est l'un des nombres $S+P$ de la base 16).

Pour les bases b supérieures à 10, dans les calculs de $S(n)$ et $P(n)$, on devra prendre en compte en tant que chiffres tous les éventuels 10, 11, ..., $(b-1)$ apparaissant dans l'expression de n dans une telle base b .

On montre facilement par récurrence que, pour tout $k > 1$ et tout $b > 1$, on a $b^k - 1 > (b-1)^k$, ce qui permet de déduire que les solutions à strictement plus de deux chiffres sont impossibles en toute base < 11 , aussi bien pour les points fixes que pour les éléments des éventuels cycles (si un élément de cycle avait plus de deux chiffres, par décroissance l'itération nous donnerait un nombre à deux chiffres et il serait impossible de retourner sur le nombre initial).

Pour $10 < b < 101$ on en déduit aussi que les solutions (en écriture décimale) n'ont pas plus de 4 chiffres et c'est en particulier le cas pour $2 < b < 37$.

On montre ainsi que, pour $1 < b < 11$, tous les points fixes non nuls, exprimés en base b , ont toujours nécessairement exactement 2 chiffres et constituent une progression arithmétique de raison 10 (ou b pour une écriture en base 10):

$$(2) \quad b + 9 + 10m, m = 0, 1, \dots, b-2, 2 < b < 11.$$

(ou écrit en base 10: $(2b-1) + mb$)

La base 2 a en outre aussi la solution triviale 2 en base décimale ($2 = 10_2$).

- TABLEAU 1 (en base b)

Le 'triangle des nombres $S+P$ non nuls' en bases de 2 à 10, exprimés dans leur propre base a l'aspect suivant:

base 10: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

base 9 : 18, 28, 38, 48, 58, 68, 78, 88

base 8 : 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77

base 7 : 16, 26, 36, 46, 56, 66

base 6 : 15, 25, 35, 45, 55

base 5 : 14, 24, 34, 44

base 4 : 13, 23, 33

base 3 : 12, 22

base 2 : 11

- TABLEAU 2 (en base décimale)

Les solutions du tableau 1 exprimées en base décimale se notent pour tout $b < 11$:

base 10: 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99

base 9 : 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80

base 8 : 15, 23, 31, 39, 47, 55, 63

base 7 : 13, 20, 27, 34, 41, 48

base 6 : 11, 17, 23, 29, 35

base 5 : 9, 14, 19, 24

base 4 : 7, 11, 15

base 3 : 5, 8

base 2 : 3

Pour chacune de ces bases, il y a toujours au moins une solution qui (exprimée en base décimale) est un nombre premier.

La base 10 possède aussi le cycle $C_{17}(18, 17, 15, \dots, 7, 14, 9)$ dont tous les éléments ont au plus deux chiffres: il est constitué de tous les nombres de 2 à 18, bornes incluses.

L'itération (en base 10) par S+P est ainsi toujours convergente vers ses seuls attracteurs qui sont les 9 points fixes cités plus haut et le cycle C_{17} , ce qui fait de S+P une transformation agréable ([8]).

Pour les autres bases (de 2 à 9), on a aussi un nombre fini de cycles avec tous les éléments à au plus deux chiffres.

Par exemple, pour $b = 9$, il y a le cycle $C_8(14, 11, 15, \dots, 7)$, pour $b = 8$ les cycles $C_2(10, 5)$, $C_4(12, 9, 3, 6)$, pour $b = 7$, le cycle $C_{11}(12, 11, \dots, 3, 6)$, pour $b = 6$, le cycle $C_9(10, 9, \dots, 8, 5)$, pour $b = 5$ le cycle $C_2(6, 3)$, pour $b = 4$ le cycle $C_2(4, 2)$ et pour $b = 3$, le cycle $C_3(4, 3, 2)$.

- PROPRIETE 1

L'ensemble des nombres S+P est toujours fini pour toute base.

En base b de 2 à 10, il existe $b-1$ nombres non nuls S+P qui, exprimés en base décimale, sont dans l'intervalle $[2, 99]$.

L'itération en bases de 2 à 10 par S+P est toujours convergente vers un nombre fini d'attracteurs (points fixes non nuls et cycles) dont tous les éléments appartiennent à $[2, 99]$ et la transformation S+P est donc toujours agréable (au sens de [8]).

On peut étendre le résultat précédent aux bases quelconques et montrer:

- PROPRIETE 2

Pour toute base $b (> 1)$ on a un nombre fini de solutions qui constituent une progression arithmétique de raison b , de la forme (écrite en base 10):

$$(3) \quad (2b-1) + mb, \quad m = 0, 1, \dots, b-2$$

Il y a donc toujours exactement $(b-1)$ solutions toutes situées dans l'intervalle $I_b = [2, b^2 - 1]$.

- Exemple: les 15 nombres S+P de la base 16 (exprimés en écriture décimale):

31, 47, 63, 79, 95, 111, 127, 143, 159, 175, 191, 207, 223, 239, 255.

(Pour $239_{16} = 14 \cdot 16 + 15$ on a bien $S=14+15$, $P=14 \cdot 16$ et $S+P=239$).

En particulier, tous les nombres S+P des bases de 2 à 36 sont (exprimés en base 10) dans $[2, 1295]$.

Par ailleurs, la propriété de décroissance en base 10 (pour tout $n > 9$) se généralise en toute base b pour tout $n > b-1$ ($p(b-1) + (b-1)^p \leq b^p - 1$ pour tout $p > 1$ et tout $b > 1$) et assure la finitude de l'ensemble des attracteurs (points fixes et cycles) pour toute base.

Pour les bases supérieures à 10, on obtiendra facilement divers cycles, par exemple:

pour $b = 11$, $C_2(14, 7)$, $C_3(12, 3, 6)$, $C_3(18, 15, 9)$, $C_5(16, \dots, 8)$, $C_6(20, \dots, 10)$, ...; tous les attracteurs sont dans $I_{11} = [1, 120]$;

pour $b = 16$, $C_4(16, 2, 4, 8)$, $C_5(20, \dots, 10)$, $C_5(24, \dots, 12)$, $C_5(26, \dots, 13)$, $C_5(28, \dots, 14)$, $C_5(30, \dots, 15)$, ...; tous les attracteurs sont dans $I_{16} = [1, 255]$;

pour $b = 36$, $C_{34}(64, \dots, 32)$, $C_{35}(70, \dots, 35)$, ...; tous les attracteurs sont dans $I_{36} = [1, 1295]$.

Tous les attracteurs en toutes bases de l'application S+P sont en nombre fini et faciles à déterminer et donc, la transformation S+P est agréable pour tout b .

Les nombres S+P, uniquement en base 10, ont été répertoriés dans OEIS par Felice Russo [OE1] en 2014, mais depuis, à notre connaissance, aucun article ne leur a été consacré.

- 2 - LES R-NOMBRES S+P

On remplace maintenant n par n^r , $r > 1$, pour déterminer des r -nombres S+P non nuls; pour les exprimer dans une base quelconque, n^r est transformé en $(n^r)_b$ ($n \rightarrow n^r \rightarrow (n^r)_b$), puis on applique (1) à ce $(n^r)_b$ et on itère le processus .

Nous conviendrons donc d'appeler r-nombres S+P, les solutions de $(S+P)((n^r)_b) = n$.

-REMARQUE TECHNIQUE

Dans un autre contexte ([10], [11]), où on se limitait aux bases de 2 à 10 (et donc avec les seuls chiffres 0 à 9), on utilisait $(n_b)^r$ pour définir des r-nombres $(n \rightarrow n_b \rightarrow (n_b)^r)$ solutions de $(S+P)((n_b)^r) = n$.

Ici, l'objectif est de pouvoir passer à toutes bases plus grandes que 10 (et donc avec possiblement des 'grands chiffres 10, 11, ...') et de faire jouer un rôle effectif à tous les chiffres de la base envisagée:

par exemple pour la solution 316 avec $r = 2$ en base $b = 36$, on aura $316^2 = 99856$, $99856_{36} = 2*36^3 + 5*36^2 + 1*36 + 28$ et $S = 2+5+1+28 = 36$, $P = 2*5*1*28 = 280$, d'où $S + P = 316$; on a bien effectué somme et produit avec les 'vrais chiffres' de la base 36, en particulier le 28.

Observons bien que les deux démarches s'identifient (et produisent donc les mêmes solutions) en base 10 pour tout r et en base $b < 11$ pour $r = 1$, et même pour $r = 1$ en toute base, chaque fois qu'il n'intervient pas (pour $b > 11$) de chiffres plus grands que 9.

Pour $r > 1$, l'encadrement des solutions x à p chiffres (souvent utilisé dans [9] et [10])

$$b^{p-1} < x < rp(b-1) + (b-1)^{rP}$$

ne permet pas de conclure et les solutions peuvent croître bien au-delà de l'intervalle du cas $r = 1$...

D'ailleurs ici, l'application n'est plus décroissante (mais le plus souvent croissante) ni convergente partout; la finitude des solutions n'est donc plus assurée.

Dans notre intervalle de recherche jusqu'à $r = 7$, on note qu'en base 10 seul $r = 2$ donne des solutions, et que pour les autres bases, on peut avoir des solutions jusqu'à $r = 7$ (pour les bases 2, 3 et 9).

Pour la base 10, nous avons calculé les 8 solutions de l'intervalle $[2, 10^9]$ pour $r = 2$:

base 10: 127, 1467, 3052, 5860, 653230, 3483702, 43352128, 783820873,

on notera aussi l'existence, pour $r = 2$, du cycle $C_2(45, 29)$ qui est en quelque sorte un 'souvenir' du point fixe 29 du cas $r = 1$, et aussi des cycles $C_2(270, 144)$, $C_2(402, 162)$, $C_2(1209645, 69156)$ (seuls cycles 2 dans l'intervalle considéré), $C_4(31744742490, 553190472, 3762339921, 36864063)$, ...

Pour les autres bases dans $[1, 10^7]$, on obtient (1705(2) est la notation pour la solution 1705 avec $r = 2$):

base 9: 1705(2), 18177(2), 105880(2), 903216(2), 2903088(2), 3456048(2);

45(3), 87(3), 135(3), 163(3), 4354615(3);

18(7).

base 8: 3(2), 4(2), 20(2), 418(2), 102943(2), 3161138(2);

2(3), 1016112(3);

142(4);

4(5);

2(6).

base 7: 22(2), 34(2), 73(2), 160(2), 208(2), 318(2), 7804(2), 9630(2), 17313(2), 38434(2), 60037(2), 92196(2), 108039(2), 180039(2), 388843(2), 460840(2), 518443(2), 2099565(2), 89579578(2);

64(3), 112(3), 453(3);

309(4);

21(6), 42(6).

base 6: 27(2), 95(2), 741(2), 614441(2), 4915250(2);

259(3), 5429(3);

30(4), 277(4).

base 5: 6(2), 61(2), 77(2), 208(2), 209(2), 6941(2), 18464(2);

788(3), 13856(3);

51(5), 81(5), 127(5).

base 4: 2(2), 7(2), 21(2), 1750(2);

12(3), 17(3), 21(3), 49(3), 307(3), 509(3), 1319(3), 13857(3), 15585(3);

2(4);

211(5);

2(6), 54(6).

base 3: 7(2);

7(3), 24(3), 32804(3);

6(4), 10(4), 31(4), 524342(4);

6(5), 12(5), 29(5), 88(5), 279(5), 283(5), 284(5), 2097215(5);
6(6), 20(6), 283(6), 8236(6), 16433(6), 262205(6);
84(7).

base 2: 2(2), 3(2);

2(3), 7(3);

2(4);

2(5), 11(5);

2(6), 13(6);

2(7), 6(7), 19(7).

Pour $b > 10$ dans $[1, 10^7]$, on obtient des solutions avec $r = 2$, comme par exemple:

base 11: 27(2), 271(2), 2545(2), 26915(2), 58841(2), 60521(2).

base 12: 5(2), 6(2), 25(2), 94(2), 287(2).

base 13: 2193(2), 7809(2).

base 14: 1319(2), 25387(2).

base 16: 7(2), 8(2);

17(3).

base 20: 9(2), 10(2), 641(2), 46022(2).

base 22: 35950(2).

base 28: 13(2), 14(2), 265(2), 2724(2), 4836(2), 17838(2).

base 36: 17(2), 18(2), 316(2).

...

base 124: 61(2), 62(2).

On obtient de moins en moins de solutions pour $r > 2$...

A côté de ces points fixes, on peut facilement obtenir pour $r = 2$, des attracteurs de type cycles d'ordre 2:

base 9: $C_2(29, 21)$, $C_2(144, 20)$;

base 8: $C_2(8, 2)$, $C_2(80677, 9482)$, $C_2(105879, 5406)$;

base 7: $C_2(63, 25)$, $C_2(8670, 888)$, $C_2(1728045, 1440045)$;

base 6: $C_2(102436, 23071)$, $C_2(86400055, 6480050)$;

base 5: $C_2(5209, 2329)$;

base 4: $C_2(6, 5)$;

base 3: $C_2(3, 2)$.

La transformation S+P perd son caractère agréable dès que r devient plus grand que 1 et devient très vite divergente avec r croissant, même si elle possède des attracteurs que l'on peut calculer ...

- 3 - LES NOMBRES maxSP et minSP

En s'inspirant des opérations introduites en géométrie tropicale (ou en arithmétique lunatique) et en particulier de l'addition qui est remplacée par le min ou le max, nous allons au lieu de S+P considérer les applications $\min(S,P)$ et $\max(S,P)$ et nous parlerons des nombres minSP et maxSP.

Il est facile de montrer que, en toute base,

$n \rightarrow n_b \rightarrow \max(S, P)$ ou $\min(S, P)$, $1 < b < 11$,

n'aura que les solutions non nulles 1, 2, ..., $b - 1$ (on oublie la solution triviale 0).

En effet la recherche se ramènera à celle de $n = S$ (nombres de Niven particuliers [9]) ou $n = P$...

- PROPRIETE 2

Les ensembles des nombres maxSP et minSP sont toujours finis: pour chacun, en toute base b , il y a $(b - 1)$ nombres non nuls maxSP ou minSP: 1, 2, ..., $(b - 1)$.

Pour toute base, les applications maxSP et minSP n'ont que des solutions points fixes (pas de cycle) et les transformations correspondantes sont trivialement agréables.

- 3 - 1 - LES R-NOMBRES maxSP

En revanche le passage à une puissance,

$n \rightarrow n^r \rightarrow (n^r)_b \rightarrow \max(S, P)$ ou $\min(S, P)$, $1 < b < 11$, $r > 1$,

pourra donner diverses solutions points fixes et cycles.

Les solutions triviales 0 et 1 toujours valables ne seront pas indiquées et les chiffres entre parenthèses expriment, comme plus haut, la valeur de r .

On peut faire des calculs raisonnables jusqu'à $r = 5$ ou 6, suivant la base choisie, et on obtient dans

[1, 10⁷]:

base 10: 9(2), 30240(2), 60480(2); pas de solution pour $r > 2$ ici.

Pour $r = 2$, la base 10 possède aussi divers cycles $C_2(2880, 2304)$, $C_4(360, 108, 144, 252)$, $C_4(2700, 126, 1680, 256)$, $C_5(210, 16, 60, 18, 24)$, $C_5(7464960, \dots, 622080)$.

Pour les bases < 10 , on peut aller jusqu'à $r = 6$ (pour $b = 2, 3, 4$ et 6).

base 9: 8(2), 42(2), 10752(2);

3(3), 1741824(3);

12(4);

3(5).

base 8: 7(2);

9(3), 864(3), 340200(3);

2(4), 4(4).

base 7: 3(2), 4(2), 6(2), 300(2);

2(3), 4(3).

base 6: 5(2), 20(2), 1600000(2);

8(3), 30(3), 32(3), 184320(3);

86400(4), 92160(4), 8100000(4);

54(5), 1800(5), 2592000(5);

5(6), 18(6).

base 5: 4(2), 12(2), 1327104(2);

3(3), 96(3);

4(4).

base 4: 3(2);

2(3), 6(3), 7(3), 1417176(3);

3(4), 7(4), 9(4), 108(4), 972(4), 34992(4);

2(5), 18(5), 216(5), 23328(5);

12(6), 1296(6).

base 3: 2(2), 4(2), 5(2);

4(3), 128(3);

4(4), 256(4), 8192(4), 32768(4), 65536(4), 8388608(4);

10(5), 16(5), 32(5), 16384(5);

128(6), 256(6), 512(6), 262144(6).

base 2: 3(4), 5(4);

6(5), 7(5), 9(5);

6(6).

Quelques résultats en bases supérieures:

base 11: 10(2), 21(2), 432(2), 729(2);

5(3);

3(5).

base 12: 11(2), 9600(2);

264(3).

base 16: 15(2), 3465(2);

4(3), 3136(3);

6(4);

2(5), 4(5), 8(5).

base 36: 35(2);

6(3);

18(4);

6(5).

...

base 64: 63(2), 123200(2);

8(3), 87552(3);

4(4), 16(4).

Le plus souvent, le maximum est assuré par P, mais il peut quelquefois aussi correspondre à S:

pour $b = 9$ et $r = 3$, la solution 3 ($3^3 = 30_9$) est telle que $S = P = 3$;

pour $b = 10$ et $r = 2$, la solution 9 ($9^2 = 81$) est telle que $S = \max = 9$;

pour $b = 64$ et $r = 2$, la solution 63 ($63^2 = [62,1]_{64}$) est telle que $S = \max = 63$;

pour $b = 16$ et $r = 2$, la solution 15 ($15^2 = [14,1]_{16}$) est telle que $S = \max = 15$;

A côté de ces points fixes, on peut facilement obtenir pour $r = 2$, des cycles d'ordre 2 ou 3 comme:

base 9: $C_2(15120, 1400)$;

base 8: $C_2(4, 2)$;

base 7: $C_3(995328, 69120, 552960)$;

base 5: $C_2(216, 96)$, $C_2(17915904, 5971968)$.

En base 10, pour $r > 2$ on n'obtient plus de convergence, et de manière générale, le caractère agréable de l'application est perdu dès que r est supérieur à 2.

- 3 - 2 - LES R-NOMBRES minSP

Notons qu'ici on peut faire les calculs et obtenir des solutions jusqu'à des puissances de l'ordre de $r = 1000$, ce qui donne dans $[1, 10^7]$:

base 10: $8(3)$, $17(3)$, $18(3)$, $26(3)$, $27(3)$;

$7(4)$, $22(4)$, $25(4)$, $28(4)$, $36(4)$;

$28(5)$, $35(5)$, $36(5)$, $46(5)$;

$18(6)$, $45(6)$, $54(6)$, $64(6)$;

...

$82(10)$, $85(10)$, $94(10)$, $97(10)$, $106(10)$, $117(10)$;

$1363(100)$, $1378(100)$, $1408(100)$, $1414(100)$, $1489(100)$;

$14230(1000)$, $14440(1000)$, $19432(1000)$, $19702(1000)$;

$23967(1200)$.

La base 10 possède aussi divers cycles d'ordre bas, comme par exemple:

pour $r = 2$, le cycle $C_2(16, 13)$;

pour $r = 3$, le cycle $C_2(28, 19)$;

pour $r = 4$, le cycle $C_2(27, 18)$;

pour $r = 5$, les cycles $C_2(29, 23)$, $C_2(34, 31)$;

pour $r = 10$, le cycle $C_3(70, 43, 61)$;

pour $r = 100$, les cycles $C_2(1240, 925)$, $C_2(1330, 934)$, $C_2(1453, 1435)$, $C_4(1492, 1483, 1312, 1411)$;

pour $r = 1000$, les cycles $C_2(19269, 19017)$, $C_2(19179, 19161)$.

Les bases < 10 :

base 9: $3(3)$, $7(3)$, $15(3)$, $16(3)$, $23(3)$, $32(3)$;

$17(4)$, $32(4)$;

$3(5)$, $6(5)$, $21(5)$, $25(5)$, $33(5)$, $35(5)$, $47(5)$;

...

$97(10)$;

$1304(100)$;

$17545(1000)$, $18001(1000)$.

base 8: $6(3)$, $13(3)$, $14(3)$;

$2(4)$, $4(4)$, $15(4)$, $25(4)$;

$14(5)$, $22(5)$;

...

$2(100)$, $4(100)$, $744(100)$, $1026(100)$, $1054(100)$, $1103(100)$, $1135(100)$, $1243(100)$;

$2(1000)$, $4(1000)$, $14918(1000)$, $15262(1000)$, $16055(1000)$, $16199(1000)$, $16209(1000)$, $16391(1000)$.

base 7: $4(2)$, $9(2)$, $12(2)$;

$8(3)$, $9(3)$, $11(3)$, $12(3)$, $15(3)$, $16(3)$;

$10(4)$, $12(4)$, $16(4)$, $18(4)$, $19(4)$, $24(4)$, $25(4)$;

$19(5)$, $22(5)$, $26(5)$, $29(5)$, $30(5)$, $33(5)$;

...

$27(10)$, $51(10)$, $57(10)$;

$1063(100)$, $1080(100)$, $1089(100)$;

$11445(1000)$, $14550(1000)$.

base 6: $3(2)$, $10(2)$;

$2(3)$, $9(3)$, $11(3)$, $15(3)$, $16(3)$;

$4(4)$, $16(4)$, $20(4)$, $26(4)$;

$19(5)$, $21(5)$, $22(5)$, $25(5)$, $28(5)$;

...

46(10), 50(10);
911(100), 931(100), 975(100);
10650(1000), 13201(1000), 13226(1000), 13311(1000).

Pour 13311, observons que 13311^{1000} possède 4125 chiffres, la somme des chiffres de son transformé (avec 5301 chiffres) en base 6 donnant 13311, S étant bien sûr le minimum de S et P.
base 5: 8(2);

8(3), 9(3), 12(3), 13(3);
3(4), 9(4), 12(4), 13(4), 16(4);
2(5), 11(5), 16(5), 23(5), 24(5);
29(6);

...
40(10), 49(10), 72(10);
829(100);
9385(1000).

base 4: 2(3), 6(3), 9(3), 10(3);

13(4);
2(5), 10(5);
10(6);

...
33(10), 37(10);
424(100), 703(100);
9018(1000).

base 3: 8(3);

2(4), 8(4);
2(5), 4(5);
2(6), 8(6);

...
24(10);
447(100);
8266(1000), 8342(1000).

base 2: pas de solution dans $[1, 10^7]$.

Quelques résultats en bases supérieures:

base 12: 4(2);

6(3), 21(3), 22(3), 23(3), 32(3), 33(3), 34(3);
33(5), 34(5), 43(5), 44(5), 45(5);
1607(100).

base 16: 6(2), 10(2), 21(2);

4(3), 11(3), 20(3), 21(3), 25(3), 26(3), 29(3), 30(3), 31(3), 34(3), 35(3), 39(3);
2400(200), 2640(200), 3096(200), 3700(200), 3756(200), 4395(200), 4491(200), 4495(200);
15040(1000), 17440(1000), 24726(1000), 27711(1000).

base 36: 15(2), 21(2), 50(2);

6(3), 12(3), 14(3), 20(3), 21(3), 41(3), 49(3), 50(3), 55(3), 56(3), 64(3), 70(3), 71(3), 76(3), 99(3),
106(3);
43626(1000), 43710(1000), 51860(1000), 52245(1000), 52285(1000), 52411(1000), 52700(1000),
52910(1000), 52935(1000), 53025(1000), 53390(1000), 53445(1000), 53501(1000), 53516(1000),
54341(1000);
58360(1100).

Les divers calculs précédents avec des r de l'ordre de 1000 et plus peuvent faire intervenir des nombres de plus de 5000 chiffres, ce qui est déjà notable si l'on se souvient que les astrophysiciens estiment que le nombre d'atomes de l'univers observable n'est que de l'ordre de 10^{80} à 10^{82} ... On peut aussi obtenir assez facilement divers cycles pour des r jusqu'à plus de 500, par exemple, toujours dans $[1, 10^7]$:

pour $r = 521$, en base 10, il n'y a pas de point fixe mais des cycles $C_2(9517, 9322)$, $C_2(9292, 9205)$, $C_6(9549, \dots, 9252)$, $C_{11}(9440, \dots, 9071)$, ...;

pour $r = 251$ en base 9, il y a le cycle $C_2(3817, 3785)$ et les cycles $C_3(3391, 3807, 1751)$, $C_3(3651, 3323, 3739)$, $C_3(3715, 3707, 3763)$, ...;

pour $r = 190$ en base 8, on obtient 2 cycles d'ordre 2 et les cycles $C_3(2366, 2268, 2037)$, $C_3(2426, 2230, 2223)$, $C_3(2521, 2465, 2507)$, ...;

pour $r = 132$ en base 7 on obtient 3 cycles 2, le cycle $C_3(1473, 1401, 1461)$, ...;

pour $r = 510$ en base 5 on obtient les cycles $C_2(5464, 5432)$, $C_3(5380, 4432, 5276)$, ...;

on peut aussi obtenir divers cycles pour des bases > 10 , comme:

pour $r = 510$ en base 16, on note les cycles $C_2(12946, 12511)$ et $C_3(12640, 8350, 11335)$;

pour $r = 100$ en base 36, on peut trouver 7 cycles d'ordre deux, $C_2(3816, 2311)$, $C_2(3696, 3031)$, $C_2(3900, 3410)$, $C_2(4316, 4281)$, ...

Le caractère agréable persiste ici pour de grandes valeurs de r .

- REMARQUE

Observons que chaque fois que la solution correspond à S comme minimum, elle est aussi solution de $n = S(n^r)$ ce qui fait que $n^r (= (S(n^r))^r)$ est un nombre de Niven ([9]), n ne l'étant pas nécessairement; par exemple pour $b = 10$ et $r = 3$, la solution 26 (non Niven, 8 ne divisant pas 26) est telle que $26^3 = 17576$ est un nombre de Niven ($26|17576$) puisque $17576/26 = 676$.

Le plus souvent, les solutions S_{minP} correspondront à S comme minimum, ce qui fait que, 'presque partout dans \mathbb{N}^* ', on a équivalence, pour tout r , entre $S_{minP}(n^r)$ et $S(n^r)$ en ce qui concerne les points fixes...et presque toutes ces solutions n sont telles que n^r est un nombre de Niven (ce qui est trivialement assuré pour $r = 1$).

Pour certaines solutions (entiers < 10 le plus souvent), le minimum est exceptionnellement assuré par P :

pour $b = 3$ et $r = 4$, 2 est solution de S_{minP} mais pas de $S(n^r)$ (mini = $P = 2$);

pour $b = 6$ et $r = 2$, 3 est solution de S_{minP} mais pas de $S(n^r)$ (mini = $P = 3$);

pour $b = 12$ et $r = 2$, 4 est solution de S_{minP} mais pas de $S(n^r)$ (mini = $P = 4$);

et pour $b = 4$ et $r = 3$, 2 est solution de S_{minP} et de $S(n^r)$ (mini = $S = P = 2$).

- 4 - LES R-NOMBRES P_mS

A côté des nombres $S+P$ on peut envisager des nombres différence entre P et S .

Les nombres notés P_mS sont les points fixes de l'application;

(4) $n \rightarrow D(n) = |P(n) - S(n)|$.

Les deux applications précédentes S_{maxP} et S_{minP} ont montré que le plus souvent $P(n)$ est supérieur à $S(n)$; pour envisager une application différence de P et S , il est donc légitime de considérer $P(n) - S(n)$, mais pour rester dans des applications de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* , on s'intéressera à $D(n)$, la valeur absolue de la différence.

Comme plus haut, ce sont les r -nombres P_mS que l'on va étudier:

$n \rightarrow n^r \rightarrow (n^r)_b \rightarrow D((n^r)_b)$, $r \geq 1$.

Ici, le cas $r = 1$ est encore plus rapidement traité que pour les 3 cas précédents: on montrera facilement qu'il n'y a que la solution triviale 0 pour toute base et aucun autre attracteur.

Ceci est assuré par le fait que pour $r = 1$, l'application est toujours strictement décroissante en toute base et son itération décroît donc très vite vers la seule solution 0.

Dès que $r \geq 2$, des solutions points fixes et cycles vont exister, l'application perdant son caractère de décroissance.

Donnons quelques solutions dans $[1, 10^9]$: - Cas $r=2$

$b = 10$: 161, 198, 1701, 604755, 629810, 4354506, 100018736, 411505847;

(8 points fixes comme pour $S+P$ dans le même intervalle)

$C_2(2853, 11628)$, $C_2(27180, 47004)$, $C_2(27611, 63467)$, $C_2(259154, 3333905)$.

$b = 9$: 5, 16431, 25401543, 81647943, 142883936;

$C_2(11, 7)$, $C_2(109, 67)$, $C_2(89, 32)$, $C_2(17639944, 4838352)$;

$C_5(298722751, 13270983, \dots, 3135951)$.

$b = 8$: 55, 57, 7531, 24157, 37596, 3386830, 23224263, 622339129;

$C_2(36252, 8611)$, $C_2(25930744, 483798)$;

$C_3(2663, 1597, 278)$.

$b = 7$: 5, 557, 1419, 2565, 10769, 10770, 82910, 518358;

$C_2(461, 221)$, $C_2(4296, 1704)$, $C_2(46655942, 1990610)$.

$b = 6$: 3814, 518360, 2211794;

b = 5: 7, 8, 271, 364;
 $C_2(844, 556)$, $C_2(21233612, 17915852)$;
b = 4: 627, 2891;
pas de C_2 .
b = 3 ou 2: pas de solution.
 - Cas $r=3$
b = 10: 27180;
b = 9: 984;
b = 8: 3, 56;
b = 7: 57;
b = 6: 9, 282, 1057, 10770, 82943940;
b = 5: 8, 60, 744, 221144;
 $C_2(5156, 2276)$, $C_2(161243077, 11943879)$.
b = 4: 57, 465, 331734, 30233031, 90699201;
 $C_2(37, 14)$, $C_2(16529940790, 181398461)$;
b = 3: 8, 20, 240, 8163;
b = 2: 3, 5.
 - Cas $r = 4$
b = 10: 20700;
b = 9: 4;
b = 7: 12, 1176;
b = 6: 2, 13, 75;
b = 5: 12, 744;
b = 4: 125, 248787;
b = 3: 2, 19, 47;
b = 2: pas de solution.
 - Cas $r = 5$
b = 10, 9, 8, 7, 6: pas de solution;
b = 5: 2;
b = 4: 21;
b = 3: 2, 4, 106, 16341, 32716, 524229, 2097083, 2097088;
b = 2: 5.
 - Cas $r = 6$
b = 10, 9, 8, 6: pas de solution;
b = 7: 2, 3;
b = 5: 175;
b = 4: 3;
b = 3: 2, 17, 2013, 131016;
b = 2: 9.
Quelques r-nombres PmS en bases supérieures:
 - Cas $r = 2$
b = 11: 609, 1415, 5009, 7742, 145749;
b = 12: 3809;
b = 14: 6, 8924, 14376895;
b = 16: 312, 12920, 1646345, 3032580, 68428730;
b = 24: 238;
b = 36: 384, 1344.
 - Cas $r = 3$
b = 11: 3, 9, 25, 45;
b = 16: 102;
b = 24: 1248.
 - Cas $r = 4$
b = 11: 165;
b = 24: 7.

A côté du trivial 0, seul point fixe de $|P-S|$, on a pu calculer des r-nombres PmS, ainsi que quelques

cycles, pour des r de 2 à 6 dans toutes les bases envisagées.

- 4 - CLASSES DE NOMBRES PREMIERS PARTICULIERS

Notons C un chiffre premier (nombre premier à un seul chiffre), $C \in (2, 3, 5, 7)$.

Les applications précédentes S+P et |P-S| vont nous permettre d'obtenir des classes de nombres premiers particuliers qui n'ont qu'un seul chiffre C premier, les autres étant des 1 (en un certain nombre dépendant de C) et des 0 (en nombre ≥ 0).

On peut commencer à envisager les nombres premiers n tels que P(n), (S+P)(n) et |P(n)-S(n)| soient aussi premiers; on peut alors montrer que, nécessairement, le P(n) ne peut valoir que 2, 3, 5 ou 7 ce qui entraîne que ces n possèdent exactement un seul chiffre premier C puis des 1 (3 pour P = 2, 5, 7 et 5 pour P = 3) et des zéros (en nombre ≥ 0).

On va pouvoir en déduire une manière de générer des suites de premiers avec un seul chiffre C en choisissant S et P pour assurer P, S+P et |P-S| premiers, le S étant (conformément aux résultats précédents) la somme de C et du nombre de 1 (ou, si l'on préfère |P-S| est le nombre de 1); ces premiers auront donc de 4 à 6 chiffres non nuls.

Le couple (S = 5, P = 2) engendre des premiers avec un seul 2 et trois 1 comme:

2111, 10211, 12011, 12101, 21011, 21101, 101021, 102101, 120011, 121001, 201011, 201101, ..., 1020100001, 120000101, 1200001001, 1200010001, ...

Le couple (S = 8, P = 3) engendre des premiers avec un seul 3 et cinq 1 comme:

113111, 131111, 311111, 1103111, 1110311, 1111013, 1111031, 1111301, 1113011, 10013111, 10110131, ..., 1301011001, 1301100011, 1310001101, 1310110001, ..., 31101000000000000011, ...

Le couple (S = 8, P = 5) engendre des premiers avec un seul 5 et trois 1:

1151, 1511, 10151, 15101, 50111, 100151, 100511, 101051, 101501, 110051, 110501, 115001, 150011, ..., 1005100001, 1010000051, 1010050001, 1015000001, ..., 5010000000000000000000000100000001, ...

Le couple (S = 10, P = 7) engendre des premiers avec un seul 7 et trois 1:

1117, 1171, 10711, 11071, 11701, 17011, 70111, 71011, 101107, 101701, 107101, 110017, 170101, ..., 1070000101, 1070010001, 1100000017, 1100007001, 1700000101, ...

Parmi ces premiers, nous allons nous préoccuper de ceux qui débutent ou se terminent par un C. Pour alléger l'écriture de ces nombres, nous allons utiliser la notation scientifique standard et introduire des classes de nombres impairs possédant un seul chiffre plus grand que 1 et pas plus de 6 chiffres non nuls:

- DEFINITION 1: les nombres R(C) commencent par C et se terminent par 1.

(5) $R(C;a,b,c,d,e) = C \cdot 10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e + 1$, a > 3, b, c, d, e, f différents ou nuls et strictement inférieurs à a.

Ces nombres sont impairs, se terminent par 1, possèdent au plus 6 chiffres non nuls et commencent par C (le seul plus grand que 1), tous les (éventuels) autres étant des zéros.

Les nombres premiers qui nous intéressent sont ceux de type R(C) avec des exposants (a, b, c, d, e) convenables:

$R(2;3,2,1) = 2111$, $R(3;5,4,3,2,1) = 311111$, $R(5;30,28,8) = 5010000000000000000000000100000001$.

On peut, par exemple, affirmer qu'il existe des nombres premiers se terminant par 1, commençant par 5 et formés d'exactly 3 chiffres 1 et d'autant de zéros que l'on veut...et donc aussi grands que l'on veut.

Ainsi $R(5;35,31,20) = 5 \cdot 10^{35} + 10^{31} + 10^{20} + 1$ est premier, mais aussi $R(5;600,538,210) = 5 \cdot 10^{600} + 10^{538} + 10^{210} + 1$.

Avec C = 3, on a le premier $R(3;800,774,500,388,338) = 3 \cdot 10^{800} + 10^{774} + 10^{500} + 10^{388} + 10^{338} + 1$.

Avec C = 2, on a le premier $R(2;1000,982,687) = 2 \cdot 10^{1000} + 10^{982} + 10^{687} + 1$;

(En moins de 10 secondes de calcul, on a pu exhiber 5 premiers à 1001 chiffres avec C = 2,

$R(2;1000,807,576) = 2 \cdot 10^{1000} + 10^{807} + 10^{576} + 1$, $R(2;1000,830,557) = 2 \cdot 10^{1000} + 10^{830} + 10^{557} + 1, \dots$),

et aussi: $R(2;2000,1539,818) = 2 \cdot 10^{2000} + 10^{1539} + 10^{818} + 1$, $R(2;2200,1989,818) = 2 \cdot 10^{2200} + 10^{1989} + 10^{749} + 1$;

et même jusqu'à 3001 chiffres: $R(2;3000,2908,2097) = 2 \cdot 10^{3000} + 10^{2908} + 10^{2097} + 1$ (observons que ce premier est encadré par 2^{9966} et 2^{9967}).

CONCLUSION

Comme illustration des mathématiques récréatives autour des entiers, nous avons défini quatre nouvelles familles de nombres, points fixes d'applications associant un entier n (considéré non nul en oubliant la solution triviale 0 sans grand intérêt) à la somme $S+P$, à la différence $|P-S|$, au maximum ou au minimum de S et P d'une puissance n^r de n (en base 10), ou de son transformé $(n^r)_b$ (en base b).

Dans le cas $S+P$ avec $r = 1$, pour toute base b les solutions points fixes et cycles sont en nombre fini et toutes situées dans l'intervalle $[2, b^2 - 1]$, il y a exactement $(b - 1)$ nombres $S+P$ qui constituent une progression arithmétique de raison b , et la transformation est agréable.

Ce n'est plus le cas pour les r -nombres $S+P$ avec $r > 1$ dont nous avons cependant pu calculer de nombreux représentants dans des bases b de 2 à 36.

Pour les minSP et maxSP , si le cas $r = 1$ est relativement pauvre en représentants, avec les seules $(b - 1)$ solutions 1, 2, ..., $(b - 1)$ pour toute base b , nous avons pu déterminer de plus nombreuses solutions pour les cas $r > 1$ en bases de 2 à 36, mais en perdant le plus souvent le caractère agréable (du cas $r = 1$) des transformations correspondantes.

Si le seul nombre $|P-S|$ est 0, les r -nombres $|P-S|$ ont des représentants (et divers cycles) de $r = 2$ jusqu'à $r = 6$ en toute base.

Si on trouve des solutions $S+P$ au plus jusqu'à $r = 7$, on en obtient jusqu'à $r = 6$ pour les maxSP , en revanche on peut aller jusqu'à r de l'ordre de 1000 et plus pour les minSP (les calculs pouvant alors faire intervenir des nombres de plus de 5000 chiffres).

On termine enfin par une incursion dans l'ensemble des nombres premiers en déterminant des classes de premiers à un seul chiffre strictement supérieur à 1 (parmi 2, 3, 5, 7) quelques 1 (de 2 à 5) et des zéros. On peut ainsi exhiber assez facilement et vite (1 à 2 minutes de temps de calcul) de tels premiers (avec au plus 6 chiffres non nuls) possédant jusqu'à 3000 chiffres.

(* Professeur honoraire Université Paul Sabatier, Toulouse, France, Webmaster du site [SAYRAC](https://www.sayrac.fr)).

REFERENCES

- [1] Michael F. Armstrong, A brief introduction to Armstrong numbers, p.1-2.
- [2] I. Vardi, Niven numbers, §2.3 in Computational Recreations in Mathematics, Addison-Wesley, pp. 19 and 28-31, 1991.
- [3] S. Parameswaran, Numbers and their digits - a structural pattern, Note 81.24, The Mathematical Gazette, 81(491), 263-263 1997.
- [4] A. Beardon, S.P numbers, The Mathematical Gazette, 83(496), 25-32, 1999.
- [5] K. McLean, There are only three S.P numbers!, The Mathematical Gazette, 83(496), 32-38, 1999.
- [6] E. Bussmann, S.P numbers in bases other than 10, The Mathematical Gazette, 85(503), 245-248, 2001.
- [7] Jean-Marie De Koninck et Nicolas Doyon, Sur le nombre de numéros Niven jusqu'à x , Volume trimestriel fibonacci 41,5, 431-440, 2003.
- [8] R.L.Clerc, Les transformations agréables et une nouvelle classe de nombres narcissiques parfaits, p.1-17, (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03619147>), 2022.
- [9] R.L.Clerc, Quelques nombres de Niven-Harshad particuliers, p.1-18, (<https://hal.science/hal-04235744>), 2023.
- [10] R.L.Clerc, Perfect r -narcissistic numbers in any base, <https://hal.science/hal-04376934>, 2024.

- [11] R.L.Clerc, Nombres de Armstrong des quatre espèces et variantes, <https://hal.science/hal-04437219>, 2024.
- [OE1] Nombres S+P en base 10 [OEIS A038364](#), Felice Russo, 2014.
- [OE2] Nombres de Armstrong [OEIS A005188](#), N.J.A.Sloane, Robert G.Wilson.
- [OE3] Nombres de Niven-Harshad, [OEIS A005349](#), N.J.A.Sloane, Robert G.Wilson.
- [OE4] Liste nombres SP (sans chiffre 0), [OEIS A038369](#), F.Russo.
- [OE5] Liste nombres SP (chiffre 0 possible), [OEIS A066282](#), K.Brockhaus.
- [OE6] Nombres de Niven du type $S^*S_3^2$, [OEIS A366507](#), R.L.Clerc, 2023.
- [OE7] Nombres de Niven du type $S^{2*}S_3$, [OEIS A366512](#), R.L.Clerc, 2023.
- [OE8] Nombres r-narcissiques (rppdi), [OEIS A364601](#), R.L.Clerc, 2023.
- [OE9] Nombres SP en base 9, [OEIS A366832](#), R.L.Clerc, 2024.
- [OE10] Nombres SP en base 7, [OEIS A367070](#), R.L.Clerc, 2024.
- [OE11] Nombres $7*10^{n+1}$, [OEIS A056804](#), Robert G. Wilson v, 2000.
- [OE12] Nombres SP en base 12, [OEIS A370251](#), R.L.Clerc, 2024.